



文登教育

Wendeng Education



理工社®

2015

文登教育集团课堂用书

(数学一)

# 考研数学 复习指南

网络增值版

增值服务网址 [www.wendengonline.com](http://www.wendengonline.com)

陈文灯 黄先开 主 编


本书使用说明:

- ◆ 本书所提供的所有网络增值服务 **全部免费**。
- ◆ 答疑论坛说明及各 **免费课件** 介绍请扫描封底二维码。
- ◆ 书后附录全套 **课后题详解**，答疑论坛 **新增** 重点习题 **视频讲解**。
- ◆ 总结 **37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！

 北京理工大学出版社  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



责任编辑：许小兵

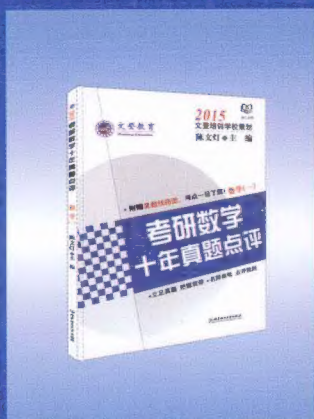
封面设计： 尚書坊 图文设计

## 名师介绍

**陈文灯** 中央财经大学教授，北京文登学校校长。原中央财经大学数学系主任，北京数学学会理事。在教学和科研上成果卓著，2000年获得“特殊贡献奖”，享受国务院特殊津贴，在考研学子和同仁中有口皆碑。



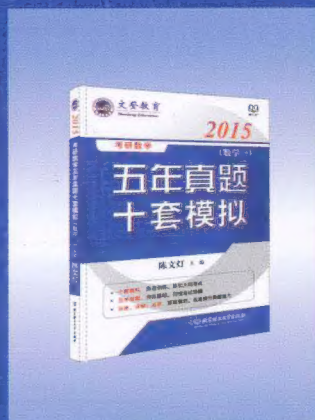
## 总结最独到 讲解最系统



十年点评，总结规律；  
考点线路，按图索迹；  
分值比重，题型清晰；  
思路分析，详解精细；  
技巧评注，总结对比；  
把握命题，考场无敌！

## 冲刺阶段制胜宝典

冲刺加速，五年真题；  
查缺补漏，十年模拟；  
大纲考点，命题规律；  
庖丁解牛，解析精辟；  
温故知新，题题珍惜；  
金榜题名，再创佳绩！



理工社网址：<http://www.bitpress.com.cn>

答疑论坛：<http://bbs.wendengonline.com>

ISBN 978-7-5640-8488-2



9 787564 084882 >

定价：59.80元



文登教育

Wendeng Education

2015

文登教育集团课堂用书

(数学一)

# 考研数学 复习指南

网络增值版

陈文灯 黄先开 主 编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指南. 数学一 / 陈文灯, 黄先开主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2013. 12  
ISBN 978-7-5640-8488-2

I. ①考… II. ①陈… ②黄… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 260376 号

---

---

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 48.75

字 数 / 1187 千字

版 次 / 2013 年 12 月第 1 版 2013 年 12 月第 1 次印刷

定 价 / 59.80 元

责任编辑 / 许小兵

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超



# 前言

本书从1995年出版以来,历经十九年的再版和修订,集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会,已成为广大考研读者的良师诤友,同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编,成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中,本书帮助许许多多考研学子圆了梦想,帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题,编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛([www.wendengonline.com/bbs](http://www.wendengonline.com/bbs))”,以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试,文登名师将一直伴随着您!许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息,我们曾数次认真商讨、仔细揣摩,对本书再次做了修订,希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外,在文登教育平台的基础上,我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课,建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南,效果将事半功倍!

此次再版,我们做了以下修订。

(1)“变繁为简,变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结,使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧,并给出了详细的分析,使同学们了解这些方法的由来,让“玄妙”变得顺理成章。例如,连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明,尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法,经过我们的分析,原题将变得非常“初等”,非常简单,只要仿效,即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应考试很有用,根据题型特点,能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”,以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容,修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助,再版力求尽量做到完美。为了精益求精,恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题:“如何有效地利用您的书提高复习效果?”“考好数学,书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看,对基础部分要多下点功夫,做到概念、定理能用自己的语言叙述,习题应全部都做。高数的基础:极限、导数与微分、不定积分;线性代数的基础:矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望  $E(X)$ 、方差  $D(X)$ 、协方差  $\text{cov}(X,Y)$ 、相关系数  $\rho_{XY}$ ]。如果是自学,应先仔仔细细地把本书看一遍,然后再详细看二三遍,对重点知识点着重理解、揣摩;如果是参加强化班,最好应该与上课“同步”进行,课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,  
技巧演练靠题型。  
勤学苦练强磨砺,  
功到高分自然成。

陈文灯

2013.11



# 目 录

## 第一篇 高等数学

第一章 函数、极限和连续 .....	1	二、重要定理 .....	45
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	1	三、导数与微分的运算法则 .....	45
一、函数的基本性质 .....	1	四、基本公式 .....	45
二、分段函数 .....	5	五、弧微分与曲率 .....	46
三、反函数 .....	5	六、高阶导数的定义与基本公式 .....	47
四、复合函数 .....	6	第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 .....	47
五、初等函数 .....	9	题型一 求复合函数的导数或微分 .....	47
六、函数的极限及其连续性 .....	9	题型二 求参数方程的导数或微分 .....	49
七、重要公式和定理 .....	12	题型三 求隐函数的导数或微分 .....	50
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 .....	19	题型四 求幂指函数的导数或微分 .....	50
题型一 未定式的定值法 .....	19	题型五 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 .....	51
题型二 类未定式的计算 .....	23	题型六 求分段函数的导数或微分 .....	51
题型三 数列的极限 .....	24	题型七 求高阶导数 .....	52
题型四 极限式中常数的确定(重点) .....	29	第 3 节 思维定势及综合题解析 .....	56
题型五 函数连续或间断点的判定 .....	32	一、思维定势 .....	56
第 3 节 思维定势及综合题解析 .....	34	二、综合题解析 .....	56
一、思维定势 .....	34	习题二 .....	59
二、综合题解析 .....	38	第三章 不定积分 .....	62
习题一 .....	39	第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	62
第二章 导数与微分 .....	43	一、不定积分的基本概念 .....	62
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	43		
一、导数与微分的定义 .....	43		

二、基本性质 .....	62
三、基本公式 .....	63
四、基本积分法 .....	64
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	77
题型一 有理函数的不定积分 .....	77
题型二 简单无理函数的不定积分 .....	78
题型三 三角有理式的不定积分 .....	79
题型四 含有反三角函数的不定积分 .....	83
题型五 抽象函数的不定积分 .....	83
题型六 分段函数的不定积分 .....	84
第3节 思维定势及综合题解析 .....	85
一、思维定势 .....	85
二、综合题解析 .....	86
习题三 .....	88
第四章 定积分及反常积分 .....	92
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	92
一、基本性质 .....	92
二、定理和公式 .....	95
三、定积分的计算法 .....	98
四、反常积分的基本概念 .....	102
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	103
题型一 分段函数的定积分 .....	103
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分 .....	105
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分 .....	106
题型四 对称区间上的定积分 .....	108
题型五 被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的定积分 .....	109

题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分 .....	110
题型七 已知一定积分,求另一一定积分 .....	111
题型八 定积分等式的证明 .....	112
题型九 定积分不等式的证明 .....	120
题型十 计算反常积分 .....	125
题型十一 反常积分的判敛 .....	126
第3节 思维定势及综合题解析 .....	127
一、思维定势 .....	127
二、综合题解析 .....	128
习题四 .....	129
第五章 微分中值定理 .....	133
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	133
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	134
题型一 闭区间上连续函数命题的证明 .....	134
题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理 .....	137
题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题 .....	138
题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明 .....	139
题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立 .....	140
题型六 欲证结论:在 $(a, b)$ ,内至少存在 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式 .....	143



第3节 思维定势及综合题解析 .....	144
一、思维定势 .....	144
二、综合题解析 .....	146
习题五 .....	147
<b>第六章 常微分方程</b> .....	150
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	150
一、基本概念 .....	150
二、二阶线性微分方程解的结构 .....	150
三、二阶常系数线性微分方程 .....	152
四、 $n$ 阶常系数线性微分方程 .....	152
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	155
题型一 一阶微分方程的计算 .....	155
题型二 可降阶的高阶方程的求解 .....	164
题型三 计算二阶线性微分方程 .....	165
题型四 欧拉方程的计算 .....	168
题型五 微分方程的应用 .....	170
第3节 思维定势及综合题解析 .....	173
一、思维定势 .....	173
二、综合题解析 .....	173
习题六 .....	175
<b>第七章 一元微积分的应用</b> .....	178
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	178
一、函数的单调增减性定理 .....	178
二、函数的极值与最值 .....	179
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点 .....	180
四、微元法及其应用 .....	182
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	184

题型一 求函数的极值 .....	184
题型二 求函数的最值 .....	185
题型三 关于方程根的讨论 .....	186
题型四 函数渐近线的求解 .....	191
题型五 函数作图 .....	192
题型六 求平面图形的面积 .....	193
题型七 求立体的体积 .....	195
题型八 求平面曲线的弧长 .....	196
题型九 求旋转体的侧面积 .....	197
题型十 变力做功、引力、液体的静压力 .....	198
第3节 思维定势与综合题解析 .....	201
一、思维定势 .....	201
二、综合题解析 .....	202
习题七 .....	205
<b>第八章 无穷级数</b> .....	208
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	208
一、无穷级数的基本概念和性质 .....	208
二、数项级数判敛法 .....	209
三、函数项级数的概念 .....	214
四、幂级数的概念和性质 .....	214
五、傅里叶级数的概念及定理 .....	216
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	219
题型一 正项级数的判敛 .....	219
题型二 任意项级数的判敛 .....	220
题型三 级数的证明或判敛 .....	222
题型四 计算函数项级数收敛域 .....	224
题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径 .....	226
题型六 函数在某点的幂级数展开 .....	227

题型七 幂级数求和 .....	229
题型八 数项级数求和 .....	233
题型九 周期与非周期函数的傅里叶级数 .....	236
第3节 思维定势及综合题解析 .....	239
一、思维定势 .....	239
二、综合题解析 .....	239
习题八 .....	241
第九章 矢量代数与空间解析几何 .....	245
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	245
一、矢量的概念及其性质 .....	245
二、平面与直线 .....	250
三、投影方程 .....	251
四、曲面方程 .....	253
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	257
题型一 求平面方程 .....	257
题型二 求空间直线方程 .....	259
第3节 思维定势及综合题解析 .....	261
一、思维定势 .....	261
二、综合题解析 .....	261
习题九 .....	262
第十章 多元函数微分学 .....	265
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	265
一、二元函数的定义 .....	265
二、二元函数的极限及连续性 .....	266
三、偏导数、全导数及全微分 .....	267
四、基本定理 .....	268
五、多元函数的极值 .....	270
六、条件极值与无条件极值 .....	271

第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	271
题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法 .....	271
题型二 复合函数微分法 .....	272
题型三 隐函数微分法 .....	275
题型四 空间曲线在某点处的切线和法平面方程 .....	278
题型五 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程 .....	279
题型六 求无条件极值 .....	281
题型七 求条件极值 .....	282
题型八 求最值 .....	283
第3节 思维定势及综合题解析 .....	285
一、思维定势 .....	285
二、综合题解析 .....	286
习题十 .....	287
第十一章 重积分 .....	290
第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	290
一、基本概念 .....	290
二、性质 .....	290
三、公式 .....	293
四、二重积分的解题技巧 .....	294
五、三重积分的解题技巧 .....	296
第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	298
题型一 更换二重积分的积分次序 .....	298
题型二 选择二重积分的积分次序 .....	300
题型三 二重积分坐标系的选择 .....	302



题型四	分段函数的二重积分的计算	303
题型五	二重积分等式的证明	306
题型六	二重积分不等式的证明	308
题型七	更换三重积分的积分次序	310
题型八	三重积分的计算	310
第3节	思维定势及综合题解析	312
一、思维定势		312
二、综合题解析		313
习题十一		314
第十二章	曲线、曲面积分及场论初步	319
第1节	重要概念、定理和公式的剖析	319
一、曲线积分的概念和性质		319
二、曲线积分的基本定理		320
三、曲面积分的概念和性质		321
四、曲面积分的基本定理		322
五、场论初步		322
第2节	重要题型的解题方法和技巧	327
题型一	对弧长的曲线积分的计算	327
题型二	对坐标的曲线积分的计算	328
题型三	对面积的曲面积分的计算	333
题型四	对坐标的曲面积分的计算	334
题型五	曲面面积的计算	339
第3节	思维定势及综合题解析	340

一、思维定势	340
二、综合题解析	341
习题十二	342
第十三章	函数方程与不等式证明 344
第1节	函数方程 344
一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程	344
二、利用极限求解函数方程	345
三、利用导数的定义求解方程	346
四、利用变上限积分的可导性求解方程	346
五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解	347
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	348
第2节	不等式的证明 351
一、引入参数法	351
二、利用微分中值定理	352
三、利用函数的单调增减性(重点)	354
四、利用函数的极值与最值	356
五、利用函数图形的凹凸性	358
六、利用泰勒展开式	358
七、杂例	360
习题十三	361

## 第二篇 线性代数

第一章	行列式 364
第1节	重要概念、定理和公式的剖析 364
一、排列与逆序	364
二、 $n$ 阶行列式的定义	365
三、行列式的基本性质	367
四、行列式按行(列)展开定理	369
五、重要公式与结论	371

第2节 重要题型的解题方法和技巧	372
题型一 抽象行列式的计算	372
题型二 低阶行列式的计算	372
题型三 $n$ 阶行列式的计算	374
第3节 思维定势与综合题解析	379
一、思维定势	379
二、综合题解析	380
习题一	381
第二章 矩阵	384
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	384
一、矩阵的概念	384
二、矩阵的运算	385
三、逆矩阵的概念	387
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	388
五、矩阵的初等变换与求逆	389
六、分块矩阵及其求逆	390
七、矩阵的秩及其求法	390
第2节 重要题型的解题方法和技巧	390
题型一 求逆矩阵	390
题型二 求矩阵的高次幂 $A^m$	393
题型三 有关初等矩阵的命题	395
题型四 解矩阵方程	396
题型五 求矩阵的秩	398
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明	400
题型七 关于方阵 $A$ 可逆的证明	400
题型八 与 $A$ 的伴随阵 $A^*$ 有关联的命题的证明	401
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	402

第3节 思维定势与综合题解析	404
一、思维定势	404
二、综合题解析	405
习题二	406
第三章 向量	412
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	412
一、向量的概念与运算	412
二、向量间的线性关系	412
三、向量组的秩和矩阵的秩	413
四、向量空间	414
五、重要定理与公式	416
六、小结	416
第2节 重要题型的解题方法和技巧	417
题型一 讨论向量组的线性相关性	417
题型二 有关向量组线性相关性命题的证明	421
题型三 判定一个向量是否可由一组向量线性表示	427
题型四 有关向量组线性表示命题的证明	428
题型五 求向量组的极大线性无关组	429
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算与证明	431
题型七 与向量空间有关的命题	435
第3节 思维定势与综合题解析	437
一、思维定势	437
二、综合题解析	437
习题三	438
第四章 线性方程组	442



第1节 重要概念、定理和公式的剖析	442
一、克莱姆法则	442
二、线性方程组的基本概念	442
三、线性方程组解的判定	443
四、非齐次线性方程组与其导出组的解的关系	444
五、线性方程组解的性质	444
六、线性方程组解的结构	444
第2节 重要题型的解题方法和技巧	445
题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)	445
题型二 含有参数的线性方程组解的讨论	449
题型三 讨论两个方程组的公共解	455
题型四 有关基础解系的证明	456
第3节 思维定势与综合题解析	458
一、思维定势	458
二、综合题解析	458
习题四	463
第五章 特征值和特征向量	468
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	468
一、矩阵的特征值和特征向量的概念	468
二、相似矩阵及其性质	468
三、矩阵可相似对角化的充要条件	469
四、实对称矩阵及其性质	469
五、重要公式与结论	470
第2节 重要题型的解题方法和技巧	471

题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	471
题型二 求抽象矩阵的特征值与特征向量	472
题型三 特征值与特征向量的逆问题	473
题型四 相似的判定及其逆问题	476
题型五 判断矩阵 $A$ 是否可对角化	478
题型六 有关特征值与特征向量的证明题	481
第3节 思维定势与综合题解析	483
一、思维定势	483
二、综合题解析	483
习题五	489
第六章 二次型	492
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	492
一、二次型及其矩阵表示	492
二、化二次型为标准型	492
三、配方法和正交变换法	493
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	494
第2节 重要题型的解题方法和技巧	497
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	497
题型二 化二次型为标准形	498
题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	502
题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	504
第3节 思维定势与综合题解析	506
一、思维定势	506

二、综合题解析 .....	507
习题六 .....	508

### 第三篇 概率论与数理统计

#### 第一章 随机事件和概率 .....

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	510
-------------------------	-----

一、随机试验和随机事件 .....	510
二、事件的关系及其运算 .....	511
三、事件的概率及其性质 .....	513
四、条件概率与事件的独立性 .....	514
五、重要概型 .....	515
六、重要公式 .....	515

第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	516
------------------------	-----

题型一 古典概型与几何概型 .....	516
题型二 事件的关系和概率性质的命题 .....	520

题型三 条件概率与积事件概率的计算 .....	522
-------------------------	-----

题型四 全概率公式与贝叶斯公式的命题 .....	523
--------------------------	-----

题型五 有关伯努利概型的命题 .....	525
----------------------	-----

第3节 思维定势与综合题解析 .....	527
一、思维定势 .....	527
二、综合题解析 .....	528
习题一 .....	529

#### 第二章 随机变量及其分布 .....

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	533
-------------------------	-----

一、概念与公式一览表 .....	533
二、重要的一维分布 .....	537
三、重要的二维分布 .....	539

第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	540
------------------------	-----

题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题 .....	540
-------------------------------	-----

题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数 .....	543
---------------------------------	-----

题型三 求一维随机变量函数的分布 .....	547
------------------------	-----

题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查 .....	549
-------------------------------	-----

题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论 .....	551
-----------------------------------	-----

题型六 求两个随机变量的简单函数的分布 .....	558
---------------------------	-----

#### 第3节 思维定势与综合题解析 .....

一、思维定势 .....	563
二、综合题解析 .....	565
习题二 .....	566

#### 第三章 随机变量的数字特征 .....

第1节 重要概念、定理和公式的剖析 .....	574
-------------------------	-----

一、一维随机变量的数字特征 .....	574
二、二维随机变量的数字特征 .....	576
三、几种重要的数学期望与方差 .....	577
四、重要公式与结论 .....	578

第2节 重要题型的解题方法和技巧 .....	578
------------------------	-----

题型一 求一维随机变量的数字特征 .....	578
------------------------	-----

题型二 求一维随机变量函数的数学期望 .....	583
--------------------------	-----

题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征 .....	585
----------------------------	-----

题型四 有关数字特征的证明题 .....	592
----------------------	-----

题型五 数字特征在经济中的应用	593
第3节 思维定势与综合题解析	596
一、思维定势	596
二、综合题解析	596
习题三	599
第四章 大数定律和中心极限定理	604
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	604
一、切比雪夫不等式	604
二、中心极限定理	604
三、重要公式与结论	605
四、注意	605
第2节 重要题型的解题方法和技巧	605
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	605
题型二 有关中心极限定理的命题	607
习题四	610
第五章 数理统计的基本概念	611
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	611
一、几个基本概念	611
二、三个抽样分布—— $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布与 $F$ 分布	612
三、正态总体下常用统计量的性质	612
四、重要公式与结论	613
五、经验分布函数	613
第2节 重要题型的解题方法和技巧	614
题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	614

题型二 求统计量的分布	615
第3节 思维定势	617
习题五	618
第六章 参数估计	620
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	620
一、矩估计与最大似然估计	620
二、估计量的评选标准	621
三、区间估计	622
四、重要公式与结论	624
第2节 重要题型的解题方法和技巧	624
题型一 求矩估计和最大似然估计	624
题型二 评价估计的优劣	628
题型三 区间估计或置信区间的命题	629
习题六	632
第七章 假设检验	635
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	635
一、显著性检验的基本思想	635
二、假设检验的基本步骤	635
三、两类错误	635
四、正态总体未知参数的假设检验	636
五、假设检验与区间估计的联系	637
第2节 重要题型的解题方法和技巧	637
题型一 正态总体的均值和方差的假设检验	637
题型二 有关两类错误的命题	638
习题七	639



## 附录 课后习题答案详解

<b>第一篇 高等数学</b> .....	641
第一章 函数、极限和连续 .....	641
第二章 导数与微分 .....	645
第三章 不定积分 .....	649
第四章 定积分及反常积分 .....	656
第五章 微分中值定理 .....	659
第六章 常微分方程 .....	662
第七章 一元微积分的应用 .....	668
第八章 无穷级数 .....	673
第九章 矢量代数与空间解析几何 .....	679
第十章 多元函数微分学 .....	682
第十一章 重积分 .....	686
第十二章 曲线、曲面积分及场论初步 .....	695

## 第十三章 函数方程与不等式证明

..... 697

<b>第二篇 线性代数</b> .....	701
第一章 行列式 .....	701
第二章 矩阵 .....	703
第三章 向量 .....	711
第四章 线性方程组 .....	716
第五章 特征值和特征向量 .....	724
第六章 二次型 .....	732
<b>第三篇 概率论与数理统计</b> .....	736
第一章 随机事件和概率 .....	736
第二章 随机变量及其分布 .....	739
第三章 随机变量的数字特征 .....	750
第四章 大数定律和中心极限定理 ...	756
第五章 数理统计的基本概念 .....	757
第六章 参数估计 .....	760
第七章 假设检验 .....	764

# 第一篇 高等数学

## 第一章 函数、极限和连续

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、函数的基本性质

##### 1. 奇偶性

设函数  $f(x)$  在对称区间  $X$  上有定义, 如果对于  $\forall x \in X$  恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称  $f(x)$  为偶函数(或  $f(x)$  为奇函数).

偶函数  $f(x)$  的图像关于  $y$  轴对称, 奇函数  $f(x)$  的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数, 偶函数的代数和仍为偶函数;
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数, 奇数个奇函数之积为奇函数;
- (3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数:  $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$ .

常见的奇函数:  $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$ .

**提示** 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

**注** (1)  $f(x) + f(-x) = 0$  是判别  $f(x)$  为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇函数或偶函数.

**【例 1.1】** 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left( \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

**【解】** (1) 令  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , 有  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\text{令 } t=-u}{=} \int_0^x f(-u)(-du) \\ &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

故  $y = \int_0^x f(t) dt$  为偶函数.

(3) 令  $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$ , 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以  $g(x)$  为奇函数, 又  $F(x)$  为奇函数.

故  $y = F(x) \left( \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$  为偶函数.

## 2. 周期性

设函数  $f(x)$  在区间  $X$  上有定义, 若存在一个与  $x$  无关的正数  $T$ , 使对于任一  $x \in X$ , 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数  $T$  称为函数  $f(x)$  的周期. 周期函数的运算性质:

- (1) 若  $T$  为  $f(x)$  的周期, 则  $f(ax+b)$  的周期为  $\frac{T}{|a|}$ ;
- (2) 若  $f(x), g(x)$  均是以  $T$  为周期的函数, 则  $f(x) \pm g(x)$  也是以  $T$  为周期的函数;
- (3) 若  $f(x), g(x)$  分别是以  $T_1, T_2, (T_1 \neq T_2)$  为周期的函数, 则  $f(x) \pm g(x)$  是以  $T_1, T_2$  的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期:  $\sin x, \cos x$ , 其周期  $T = 2\pi$ ;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$ , 其周期  $T = \pi$ .

**提示** 判别给定函数  $f(x)$  是否为周期函数, 主要是根据周期函数的定义, 有时也用其运算性质.

**【例 1.2】** 设对一切实数  $x$ , 有  $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$ , 则  $f(x)$  是周期为 \_\_\_\_\_ 的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \frac{1}{4} - f(x) + f^2(x) - \sqrt{f(x) - f^2(x)}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x) \quad (\text{由题设知 } f(x) \geq \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

即  $f(1+x) = f(x)$ , 故可知  $f(x)$  的周期为 1.

**【例 1.3】** 设  $f(x)$  是在  $(-\infty, +\infty)$  上以  $T$  为周期的连续函数,

- (1) 如果  $f(x)$  是奇函数, 则函数  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  也是以  $T$  为周期的周期函数;  
 (2) 如果  $\int_a^T f(x)dx \neq 0$ , 则函数  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  可表示成线性函数与以  $T$  为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + \int_0^x f(t)dt = F(x), \end{aligned}$$

所以,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  是以  $T$  为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数  $k$ , 有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k]dt = \int_a^x [f(t) - k]dt + k(x-a).$$

因为  $k(x-a)$  是线性函数, 所以, 只需证明当  $k$  取某一值时,  $g(x) = \int_a^x [f(t) - k]dt$  以  $T$  为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k]dt = \int_a^x [f(t) - k]dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k]dt \\ &= g(x) + \int_0^T f(t)dt - kT. \end{aligned}$$

取  $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$ , 有  $g(x+T) = g(x)$ , 即  $g(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数.

### 3. 有界性

设函数  $y = f(x)$  在区间  $X$  上有定义, 如果  $\exists M > 0$ , 使得对于一切  $x \in X$ , 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称  $f(x)$  在区间  $X$  上有界; 若不存在这样的  $M$ , 则称  $f(x)$  在区间  $X$  上无界.

【注】函数  $f(x)$  是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $ \sin x  \leq 1,$	$ \cos x  \leq 1,$	$x \in (-\infty, +\infty);$
$ \arcsin x  \leq \frac{\pi}{2},$	$ \arccos x  \leq \pi,$	$x \in [-1, 1];$
$ \arctan x  < \frac{\pi}{2},$	$ \operatorname{arccot} x  < \pi,$	$x \in (-\infty, +\infty)$

【提示】判别函数的界, 一般首先将函数取绝对值, 然后用不等式放缩法求解; 或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$

(D) 有界且  $-2 \leq f(x) \leq 2.$

【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$  (因为  $1+x^2 \geq 2|x|$ ),



故  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ , 可知(C)入选.

【例 1.5】函数  $f(x) = \frac{\lg x}{x}$  在区间  $[\frac{1}{2}, 1]$  上为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界且  $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$ .

(D) 有界且  $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$ .

【 】

【解】 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ ,  $f'(x) = \frac{x \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\lg e - \lg x)$ .

因为  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 所以  $f'(x) > 0$ . 故  $f(x)$  “ $\uparrow$ ”.

因此,  $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \lg 1$ , 即  $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$ , 可知, 该选(C).

#### 4. 单调性

设函数  $y = f(x)$  在区间  $X$  上有定义, 如果对  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ , 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称  $f(x)$  在区间  $X$  上是单调增加(或单调减少)的.

**提示** 若  $f(x)$  在区间  $X$  上没有告知可导, 则其单调性的判别用定义; 若  $f(x)$  在区间  $X$  上可导, 则利用导数判别更为简便.

【例 1.6】设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有定义,  $x_1 > 0, x_2 > 0$ . 求证:

(1) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调下降, 则  $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ ;

(2) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调上升, 则  $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ .

【证】(1) 设  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 且  $x_1 < x_2$ . 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2);$$

(2) 证明略.

【例 1.7】设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

证明:  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加.

【分析】只需证明  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 在  $(0, +\infty)$  内  $F'(x) > 0$  即可.

【证】因为  $f(x) > 0$ , 所以, 当  $x > 0$  时,  $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$  连续.

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{f(x)} = 0 = F(0),$$

即  $F(x)$  在  $x = 0$  处右连续, 所以,  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续.

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } F'(x) &= \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right]}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}. \end{aligned}$$

令  $g(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$ , 有

$$g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt > 0,$$

所以, 当  $x > 0$  时,  $g(x)$  单调增加, 即有  $g(x) > g(0) = 0$ . 故当  $x > 0$  时,  $F'(x) > 0$ . 所以,  $F(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加.

## 二、分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

$$(1) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0. \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

(2)  $y$  是  $x$  的整数部分, 记为  $y = [x]$ .

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

注 一般而言, 分段函数不是初等函数.

## 三、反函数

设函数  $y = f(x)$  的值域为  $Z_f$ , 如果对于  $Z_f$  中任一  $y$  值, 从关系式  $y = f(x)$  中可确定唯一的一个  $x$  值, 则称变量  $x$  为变量  $y$  的函数, 记为

$$x = \varphi(y),$$

$\varphi(y)$  称为函数  $y = f(x)$  的反函数, 习惯上把  $y = f(x)$  的反函数记为  $y = f^{-1}(x)$ .

注 (1)  $y = f(x)$  的图像与其反函数  $x = \varphi(y)$  的图像重合;  $y = f(x)$  的图像与其反函数  $y =$

$f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

**提示** 求反函数的步骤:

(1) 把  $x$  从方程  $y = f(x)$  中解出;

(2) 把刚才所得到的表达式中的  $x$  与  $y$  对换, 即得所求函数的反函数  $f^{-1}(x)$ .

**【例 1.8】** 求  $y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$  的反函数.

**【解】** 令  $u = \sqrt{1+4x}$ , 则  $y = \frac{1-u}{1+u}$ ,

$$\text{于是 } u = \frac{1-y}{1+y}, \text{ 即 } \sqrt{1+4x} = \frac{1-y}{1+y},$$

$$\text{故 } x = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1-y}{1+y} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{y}{(1+y)^2},$$

$$\text{即 } y = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

**【例 1.9】** 设  $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ . 求  $f^{-1}(x)$ .

**【解】** 求分段函数的反函数, 只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

$$\text{由 } y = x, -\infty < x < 1 \Rightarrow x = y, -\infty < y < 1,$$

于是, 反函数为:  $y = x, -\infty < x < 1$ .

$$\text{由 } y = x^2, 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 16,$$

于是, 反函数为:  $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 16$ .

$$\text{由 } y = 2^x, 4 < x < +\infty, \Rightarrow x = \log_2 y, 16 < y < +\infty.$$

于是, 反函数为:  $y = \log_2 x, 16 < x < +\infty$ .

$$\text{综上所述, } f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty \end{cases}.$$

#### 四、复合函数

设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D_f$ , 而函数  $u = \varphi(x)$  的值域为  $Z_\varphi$ , 若  $Z_\varphi \subset D_f$ , 则称函数  $y = f[\varphi(x)]$  为  $x$  的复合函数.

其中,  $x$  表示自变量;  $u$  表示中间变量;  $y$  表示因变量.

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点, 以下根据函数的特点分别讲几种复合的方法.

##### 1. 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代, 这种构成复合函数的方法称为代入法, 该法适用于初等函数的复合.

**【例 1.10】** 设  $f_n(x) = \underbrace{f[f \cdots f(x)]}_{n \text{ 次}}$ , 若  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 求  $f_n(x)$ .

$$\text{【解】 } f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

由以上两式可推测

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

由数学归纳法可证明该式成立.

## 2. 分析法

所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法, 该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

【例 1.11】设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ ,  $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $f[\varphi(x)]$ .

【解】 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$ .

1° 当  $\varphi(x) < 1$  时,

$$\text{或 } x < 0, \quad \varphi(x) = x+2 < 1, \quad \text{即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1;$$

$$\text{或 } x \geq 0, \quad \varphi(x) = x^2-1 < 1, \quad \text{即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}.$$

2° 当  $\varphi(x) \geq 1$  时,

$$\text{或 } x < 0, \quad \varphi(x) = x+2 \geq 1, \quad \text{即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0;$$

$$\text{或 } x \geq 0, \quad \varphi(x) = x^2-1 \geq 1, \quad \text{即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}.$$

$$\text{综上所述, } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

【例 1.12】设  $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ . 求  $f[f(x)]$ .

【解】 $f[f(x)] = \begin{cases} 4-f^2(x), & |f(x)| \leq 2 \\ 0, & |f(x)| > 2 \end{cases}$ .

1° 当  $|f(x)| \leq 2$  时,

$$\text{或 } |x| \leq 2, \quad |f(x)| = |4-x^2| \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ 2 \leq x^2 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leq |x| \leq 2;$$



或  $|x| > 2, |f(x)| = 0 \leq 2 \Rightarrow |x| > 2$ .

2° 当  $|f(x)| > 2$  时,

$$\text{或 } |x| \leq 2, |f(x)| = |4 - x^2| > 2 \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| > \sqrt{6} \text{ 或 } |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ |x| < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow |x| < \sqrt{2};$$

或  $|x| > 2, |f(x)| = 0 > 2$ , 矛盾.

综上所述, 
$$f[f(x)] = \begin{cases} 0, & |x| < \sqrt{2} \\ 4 - (4 - x^2)^2, & \sqrt{2} \leq |x| \leq 2 \\ 4, & |x| > 2 \end{cases}$$

### 3. 图示法

所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法,适用于分段函数,尤其是两个均为分段函数的函数复合.

解题步骤:

- ① 先画出中间变量函数  $u = \varphi(x)$  的图像;
- ② 把  $y = f(u)$  的分界点在  $xOu$  平面上画出(这是若干条平行于  $x$  轴的直线);
- ③ 写出  $u$  在不同区间段上  $x$  所对应的变化区间;
- ④ 将 ③ 所得结果代入  $y = f(u)$  中,便得  $y = f[\varphi(x)]$  的表达式及相应  $x$  的变化区间.

**【例 1.13】** 设  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$  求  $f[f(x)]$ .

**【解】** 令  $f(x) = u$ , 则  $f(u) = \begin{cases} 1+u, & u < 0 \\ 1, & u \geq 0 \end{cases}$ .

1° 作出  $u = f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$  的图像,见图 1-1;

2° 再在图 1-1 中作出  $y = f(u) = \begin{cases} 1+u, & u < 0 \\ 1, & u \geq 0 \end{cases}$  的分界点

$u = 0$  的图像( $x$  轴);

3° 从图中可以看出:当  $x < -1$  时,  $u < 0$ ; 当  $-1 \leq x$  时,  $u \geq 0$ ;

4° 将 3° 代入  $y = f(u)$  中,得

$$y = f[f(x)] = \begin{cases} 2+x, & x < -1 \\ 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

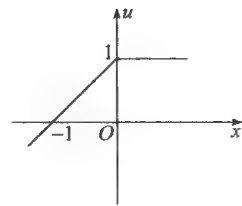


图 1-1

**【例 1.14】** 设  $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}, \text{求 } f[\varphi(x)].$$

**【解】方法一:**  $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ .

$$\text{令 } u = \varphi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

1° 作出  $u = \varphi(x)$  的图像, 见图 1-2;

2° 再在图 1-2 中作出  $y = f(u) = \begin{cases} u, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$  的分界点  $u = 0$  的图像( $x$  轴);

3° 从图中可以看出, 当  $x < 0$  时,  $u = e^{-x}$ , 当  $x \geq 0$  时,  $u = x^2$ ;

4° 将 3° 代入  $y = f(u)$ , 得  $f[\varphi(x)] = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

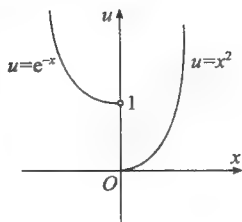


图 1-2

方法二: 注意到  $\varphi(x) \geq 0$ ,

$$\text{所以 } f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|] = \varphi(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

## 五、初等函数

由常数  $C$  及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

三个恒等式  $a^{\log_a x} = x (x > 0)$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, \infty)$$

## 六、函数的极限及其连续性

### 1. 数列极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

### 2. 函数极限

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $X > 0$  当  $|x| > X$  时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

### 3. 左右极限

左极限:  $f_-(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 当  $0 < x_0 - x < \delta$  时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

右极限:  $f_+(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 当  $0 < x - x_0 < \delta$  时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

### 4. 无穷小 (以 0 为极限的量称为无穷小量)

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $X > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 恒有

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

### 5. 无穷大(实际上是极限不存在的一种形式)

在自变量的某一变化过程中, 若函数  $f(x)$  的绝对值无穷增大, 则称函数  $f(x)$  为无穷大量.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ , 存在一个  $X > 0$ , 当  $|x| > X$  时, 恒有

$$|f(x)| > M.$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$ , 存在一个  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有

$$|f(x)| > M.$$

**注** 无界变量与无穷大量的区别: 无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量, 例如,  $y = f(x) = x \sin x$  是无界变量, 但不是无穷大量. 因为取  $x = x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ , 当  $n$  充分大时,  $f(x_n)$  可以大于一预先给定的正数  $M$ ; 但取  $x = x_n = 2n\pi$  时,  $f(x_n) = 0$ .

### 6. 无穷小的比较(重点)

设  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \beta(x) = 0$ .

(1) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  高阶的无穷小, 记为  $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ .

(2) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ , 则称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  低阶的无穷小.

(3) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是同阶无穷小.

(4) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是等价无穷小, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

(5) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C (C \neq 0), k > 0$ , 则称  $\alpha(x)$  为  $\beta(x)$  的  $k$  阶无穷小.

常用的等价形式

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $\tan x \sim x$ ,  $\arctan x \sim x$ ,

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

**【例 1.15】** 设  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$ ,  $g(x) = x^3 + x^4$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 则

- (A)  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小. (B)  $f(x)$  是比  $g(x)$  高阶的无穷小.  
(C)  $f(x)$  是比  $g(x)$  低阶的无穷小. (D)  $f(x)$  与  $g(x)$  是同阶, 但非等价无穷小.

【 】

**【解】** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt}{x^3 + x^4} \left( \frac{0}{0} \right) \xrightarrow{\text{用洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2 + 4x^3}$   

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{3}.$$

所以该选(D).

【例 1.16】当  $x \rightarrow 0$  时, 下列函数哪一个是其他三个的高阶无穷小

(A)  $x^2$ . (B)  $1 - \cos x$ . (C)  $x - \tan x$ . (D)  $\ln(1 + x^2)$ . 【 】

【解】因为当  $x \rightarrow 0$  时  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\ln(1 + x^2) \sim x^2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 0,$$

所以该选(C).

【例 1.17】把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小量  $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$ ,  $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$ ,  $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$  进行排列, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A)  $\alpha, \beta, \gamma$ . (B)  $\alpha, \gamma, \beta$ . (C)  $\beta, \alpha, \gamma$ . (D)  $\beta, \gamma, \alpha$ . 【 】

【分析】凡涉及比较的无穷小量个数  $\geq 3$ , 一般这样处理: 先写出各无穷小的等价无穷小, 然后再比较; 或者先求出各无穷小的导数, 然后写出对应的等价无穷小, 最后再比较.

【解】当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\alpha' = \cos x^2 \rightarrow 1$ ,  $\beta' = 2x \tan x \sim 2x^2$ ,  $\gamma' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{2}x$ ,

比较以上结果, 可知应选(B).

## 7. 函数连续性概念

定义 1 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的邻域内有定义, 给  $x$  在  $x_0$  处以增量  $\Delta x$ , 相应地得到函数增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

则称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续.

定义 2 设函数  $f(x)$  满足条件:

- (1)  $f(x)$  在  $x_0$  的邻域内有定义;
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ,

则称  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续.

一般来讲, 证明性的命题用函数连续的定义 1 较方便; 判断函数在某点是否连续, 尤其是判断分段函数在分界点处是否连续用定义 2 较方便.

定义 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内任一点均连续, 则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

定义 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 在  $x = a$  处右连续 [即  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ], 在  $x = b$  处左连续 [即  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ], 则称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

## 8. 间断点

定义 若  $f(x)$  在  $x_0$  处出现如下三种情形之一:

- (1)  $f(x)$  在  $x_0$  处无定义;
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ,



则称  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点.

间断点  $x_0$  的类型:

第 I 类间断点  $\triangleq f_-(x_0), f_+(x_0)$  均存在, 其中

若  $f_-(x_0) = f_+(x_0) \neq f(x_0), x = x_0$  称为可去间断点.

若  $f_-(x_0) \neq f_+(x_0), x = x_0$  称为跳跃间断点.

第 II 类间断点  $\triangleq f_-(x_0), f_+(x_0)$  至少有一个不存在.

若  $f_-(x_0), f_+(x_0)$  之中至少有一个为  $\infty$ , 则  $x = x_0$  称为无穷间断点.

## 七、重要公式和定理

定理 1  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A.$

定理 2  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$

【例 1.18】设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}.$

【解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 + \alpha(x) = \alpha(x), \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 6x + xf(x) = \alpha(x)x^3$$

$$\Leftrightarrow 6x + xf(x) = 6x - \sin 6x + \alpha(x)x^3.$$

当  $x \neq 0$  时,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \alpha(x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6\cos 6x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36\sin 6x}{6x} = 36. \end{aligned}$$

定理 3 (保号性定理) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在一个  $\delta > 0$ , 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  且  $x \neq x_0$  时,  $f(x) > 0$  [或  $f(x) < 0$ ].

定理 4 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, f(x) > 0$  [或  $f(x) < 0$ ], 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

定理 5 单调有界数列必有极限.

定理 6 (夹逼定理) 设在  $x_0$  的邻域内, 恒有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

【例 1.19】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx.$

【解】因为  $0 \leq x \leq 1, \sqrt{3} \leq \sqrt{x+3} \leq 2$  (把含  $n$  的项留下来),

所以  $\sqrt{3}x^n \leq x^n \sqrt{x+3} \leq 2x^n, 0 < x < 1.$

于是  $\int_0^1 \sqrt{3}x^n dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx \leq \int_0^1 2x^n dx.$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3}x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{n+1} = 0,$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0,$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx = 0$ .

【例 1.20】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ .

【解】  $3 \leq (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \leq 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$ ,

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3$  (因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 (\alpha > 0)$ ),

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$ .

【例 1.21】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0)$ .

【分析】比较  $1, x^n$  和  $\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$  的大小, 首先看不等式  $\frac{x^n}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq 1$  是否成立.

因为  $x > 0$ ,  $\frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}$ , 所以  $x \geq 2$  时,  $x^n \leq \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ .

即必须将  $[0, +\infty)$  分成  $[0, 1], (1, 2], (2, +\infty)$  三部分进行考虑.

【解】1° 当  $0 \leq x \leq 1$  时,

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3}.$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$ , 所以当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = 1$ .

2° 当  $1 < x \leq 2$  时,

$$x < \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3} x.$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} x = x$ ,

所以, 当  $1 < x \leq 2$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = x$ .

3° 当  $x > 2$  时,

$$\frac{x^2}{2} < \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3} \frac{x^2}{2}.$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ ,

所以, 当  $x > 2$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}$ .

综上所述  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x > 2 \end{cases}$ .

定理 7 无穷小的运算性质:

- (1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;

(3) 无穷小乘以有界变量仍为无穷小.

【例 1.22】求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 2x + 5}{3x^5 + 2x + 3} \right) (2 + \cos x - 3\sin x)$ .

【解】因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{3x^5 + 2x + 3} = 0$ ,  $|2 + \cos x - 3\sin x| \leq 6$ ,

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 2x + 5}{3x^5 + 2x + 3} \right) (2 + \cos x - 3\sin x) = 0$ .

【例 1.23】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi)$ .

【提示】凡函数的表达式中含有  $a + \sqrt{b}$  (或  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ), 则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根式  $a - \sqrt{b}$  (或  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ), 反之亦然, 然后再做有关分析运算.

【解】
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin[(\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi + n\pi]$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

又  $|(-1)^n| = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) = 0$ .

定理 8 (无穷大与无穷小的关系定理)

在同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小; 非“0”的无穷小量之倒数为无穷大.

定理 9 极限的运算法则

设  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = B,$

则 (1)  $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$ .

(2)  $\lim f(x)g(x) = \lim f(x)\lim g(x) = AB$ .

(3)  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$ .

定理 10 洛必达法则

法则 I  $\left(\frac{0}{0}\right)$  型 设函数  $f(x), g(x)$  满足条件:

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ;

(2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的邻域内可导(在  $x_0$  处可除外) 且  $g'(x) \neq 0$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在(或  $\infty$ ),

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

法则 I'  $\left(\frac{0}{0}\right)$  型 设函数  $f(x), g(x)$  满足条件:

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ;

(2) 存在一个  $X > 0$ , 当  $|x| > X$  时,  $f(x), g(x)$  可导, 且  $g'(x) \neq 0$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在(或  $\infty$ ),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  设函数  $f(x), g(x)$  满足条件:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ;
- (2)  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  的邻域内可导( $x_0$  处可除外), 且  $g'(x) \neq 0$ ;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在(或  $\infty$ ).

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II'  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  仿法则 I' 可写出.

**注** 用洛必达法则应注意的事项:

- (1) 只有  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  的未定式, 才可能用洛必达法则, 一次利用洛必达法则后得到的式子只要是  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$ ,

则可一直用下去;

- (2) 每用完一次洛必达法则, 要将式子整理化简;
- (3) 为简化运算, 经常将洛必达法则与等价无穷小结合使用;

- (4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在(非  $\infty$  型)  $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在;

- (5) 当  $x \rightarrow \infty$  时, 极限式中含有  $\sin x, \cos x$ , 不能用洛必达法则,

当  $x \rightarrow 0$  时, 极限式中含有  $\sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$ , 不能用洛必达法则.

**【例 1.24】** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{(\arcsin x)^2}$ .  $\left(\frac{0}{0}\right)$  型

**【解】** 因为  $\arcsin x \sim x$ , 原极限  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$ .

**【例 1.25】** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3\sin x}{3x - 2\cos x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{(\arctan x)^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

**【解】** (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3\sin x}{3x - 2\cos x} \xrightarrow[\text{同除以 } x]{\text{分子分母}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}\sin x}{3 - \frac{2}{x}\cos x} = \frac{1}{3}$ .

(因为当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{3}{x}, \frac{2}{x} \rightarrow 0, |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ )

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\arctan x \sim x$ ,

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

**定理 11** 初等函数在其定义域的区间内连续.

**重要公式(1):**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

该极限的特点:  $\begin{cases} \textcircled{1} \frac{0}{0} \text{ 型未定式;} \\ \textcircled{2} \sin \square \text{ 与分数线下方的变量 } \square \text{ 形式一致.} \end{cases}$

①  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  ( $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \neq 1$ , 为非  $\frac{0}{0}$  型未定式).

【例 1.26】求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2 - 1}}$ .

【解】  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

重要公式(2):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

该极限的特点:  $\begin{cases} \textcircled{1} 1^\infty \text{ 型未定式;} \\ \textcircled{2} \text{ 括号中 } 1 \text{ 后的变量(包括符号)与幂互为倒数.} \end{cases}$

【例 1.27】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n}$ .

【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = e \cdot 1 \cdot 1 = e$ .

提示 关于幂指函数有以下结论:

- (1) 设  $\lim u(x) = a > 0$ ,  $\lim v(x) = b$ , 且  $\lim u(x)v(x)$  存在, 则  $\lim [u(x)]^{v(x)} = a^b = [\lim u(x)]^{\lim v(x)}$ ;
- (2) 设  $\lim u(x) = 0$ ,  $\lim v(x) = \infty$ , 且  $\lim u(x)v(x)$  存在, 则  $\lim [1 + u(x)]^{v(x)} = e^{\lim u(x)v(x)}$ ;
- (3) 设  $\lim u(x) = 1$ ,  $\lim v(x) = \infty$ , 且  $\lim [u(x) - 1]v(x)$  存在, 则  $\lim [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim [u(x) - 1]v(x)}$ .

证明: 对于(2) 给出证明如下,

$$\lim [1 + u(x)]^{v(x)} = \lim e^{v(x) \ln [1 + u(x)]} = e^{\lim v(x) \ln [1 + u(x)]} \xrightarrow{\text{等价无穷小代换}} e^{\lim u(x)v(x)}.$$

【例 1.28】求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x^2)^{\frac{1}{1 - \cos x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{\sin x}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}.$$

【解】(1) 该极限为  $1^\infty$  型, 因此其底必定为  $e$ , 转而求其幂的极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x^2)^{\frac{1}{1 - \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x^2 \cdot \frac{1}{1 - \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}} = e^2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-2x) \cdot \frac{3}{\sin x}} = e^{-6}.$$



$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\cos x}{\cos x(1 + \sin x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x(1 + \sin x)}} = e^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

【例 1.29】求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^x; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+\ln n}{n-\ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$$

【解】(1) 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2a}{x+a} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{2a}{x+a} \right) x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2ax}{x+a}} = e^{-2a}.$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 令 } n=x, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+\ln x}{x-\ln x} \right)^{\frac{x}{\ln x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2\ln x}{x-\ln x} \right)^{\frac{x}{\ln x}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x-\ln x} \cdot \frac{x}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-\ln x}} = e^2.
 \end{aligned}$$

故原极限  $= e^2$ .

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos^2 \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \sin^2 \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{2}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\sin^2 \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

【例 1.30】求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x$ .

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}} = e.$$

【例 1.31】求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \cdot \frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{用洛必达法则}} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{n}} = e^{\frac{1+2+\cdots+n}{n}} = e^{\frac{1}{2}(n+1)}.$$

【例 1.32】求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$ .

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+b}(x+a+b)^{x+a}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{b}{x+a} \right)^{x+b} \left( 1 + \frac{a}{x+b} \right)^{x+a}}.$

因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{b}{x+a} \right)^{x+b} = e^b, \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x+b} \right)^{x+a} = e^a,$

所以原极限  $= \frac{1}{e^b e^a} = e^{-(a+b)}.$

重要公式(3):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

求  $x \rightarrow \infty$  时的极限,通常用“抓大头”的方法处理.所谓“抓大头”,就是抓住关于  $x$  的最高次数的项,而把其余的项略掉,例如:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}.$$

【例 1.33】求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 1}{3x^4 - 2x + 1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(100x^3 + 2x - 5)}{\ln(2x^{10} + 3x + 1)}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}. \end{aligned}$$

【解】(1) 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}.$

(2) 原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(100x^3)}{\ln(2x^{10})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 100 + 3\ln x}{\ln 2 + 10\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\ln x}{10\ln x} = \frac{3}{10}.$

(3) 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)^{20}(3x)^{30}}{(2x)^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$

【例 1.34】已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax + b\right) = 3$ , 求常数  $a, b$ .

【解】原极限  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 + (b-a)x + 1+b}{x+1} = 3,$

由公式(3)有  $\begin{cases} 1-a=0 \\ b-a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}.$

重要公式(4): 函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续  $\Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = f(x_0)$

【例 1.35】设  $f(x) = \begin{cases} \frac{A(\cos 2x - \cos 3x)}{x^2}, & x < 0 \\ 4, & x = 0 \\ \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续. 试确定  $A, B$ .

【解】 $f_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{A(\cos 2x - \cos 3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{A(-2\sin 2x + 3\sin 3x)}{2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{A(-4\cos 2x + 9\cos 3x)}{2} = \frac{5}{2}A,$

$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{B\sin x + \int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (B\cos x + \cos x^2) = 1 + B,$

因为  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 所以  $f_-(0) = f_+(0) = f(0)$ .

即  $\frac{5}{2}A = 1 + B = 4 \Rightarrow A = \frac{8}{5}, B = 3.$

重要公式(5):

<p>当 <math>x \rightarrow +\infty</math> 时, 以下各函数趋于 <math>+\infty</math> 的速度</p> <p><math>\ln x, x^a (a &gt; 0), a^x (a &gt; 1), x^x</math></p> <p>由慢到快 <math>\rightarrow</math></p>
<p>当 <math>n \rightarrow \infty</math> 时, 以下各数列趋于 <math>+\infty</math> 的速度</p> <p><math>\ln n, n^a (a &gt; 0), a^n (a &gt; 1), n!, n^n</math></p> <p>由慢到快 <math>\rightarrow</math></p>

知道了函数趋于无穷( $+\infty$ )的速度后,可求出一些极限,例如:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\ln n} = \infty.$$

### 几个常用极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} (a > 0) = 1$$

$$\text{特例: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

重要公式(6):

## 第2节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 未定式的定值法

**提示** 未定式是指呈  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$  等形式的极限,以下分别介绍求解方法.

#### 1. $\frac{0}{0}$ 型的求解方法

(1) 通过因式分解或根式有理化,消去“0”因子,再用极限运算法则或连续函数极限的求法求解.

所谓根式有理化是指极限式中含有  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  (或  $a \pm \sqrt{b}$ ) 的题型,在求极限之前先用它们的共轭根式  $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$  (或  $a \mp \sqrt{b}$ ) 分别乘以分子、分母,使其“0”因子呈现出来的一种运算.

(2) 利用等价无穷小的运算性质:

设  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0, \alpha(x) \sim \alpha^*(x), \beta(x) \sim \beta^*(x)$ , 则

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

**例** 乘、除可用等价无穷小代换,加减运算最好不用等价无穷小代换.因为掌握不好“度”,易出错.

(3) 洛必达法则(这是求解  $\frac{0}{0}$  型极限的最有效方法).

(4) 变量替换(数学运算的原则是一步比一步简单,若用洛必达法则后,式子反而比原来的复杂,说明用法则达不到求解目的.此时应想到变量替换法,通常是令  $x = \frac{1}{t^k}, k$  为自然数).

**【例 1.36】** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{【解】}(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} \quad (\text{根式有理化}) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})} \quad \left( \text{等价无穷小代换 } 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(x \ln(1 + x) - x^2)(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \quad (\text{根式有理化}) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x) - x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{1+x} - 1} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot (1 + x) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x \cos(\sin x)}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2} = \frac{1}{6}. \\
 &\quad [\text{因为 } 1 - \cos(\sin x) \sim \frac{1}{2}(\sin x)^2]
 \end{aligned}$$

【例 1.37】求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{【解】原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2} + 1)} = -\frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

【例 1.38】设  $f(x)$  在  $x = 12$  的邻域内为可导函数, 且  $\lim_{x \rightarrow 12} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 12} f'(x) = 1000$ . 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 12} \frac{\int_{12}^x \left[ t \int_t^{12} f(u) du \right] dt}{(12 - x)^3}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{【解】原式} &= \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x \int_x^{12} f(u) du}{3(12 - x)^2} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{\int_x^{12} f(u) du - xf(x)}{6(12 - x)} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{-f(x) - f(x) - xf'(x)}{-6} \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 12} f(x) + \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 12} xf'(x) = \frac{1}{6} \times 12 \times 1000 = 2000.
 \end{aligned}$$

【例 1.39】求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$ .

【解】若直接用洛必达法则,则原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}}{100x^{99}} = \frac{1}{50} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$ , 比用法则前复杂, 可见此路不通!

用变量替换法: 令  $u = \frac{1}{x^2}$ ,

$$\text{原式} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{50}}{e^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50u^{49}}{e^u} = \cdots = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^u} = 0.$$

## 2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的求解方法

(1) 洛必达法则;

(2) 变量替换法化为  $\frac{0}{0}$  型.

【例 1.40】求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}$ .

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + 2x^2} = \frac{1}{2}$ .

【例 1.41】求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{x}$ .

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1} = 1$ .

**提示** 若  $x \rightarrow \infty$  的极限中含有  $a^x (a > 0, a \neq 1)$ , 或  $\arctan x$ , 或  $\operatorname{arccot} x$  的, 一定要分别求出  $x \rightarrow +\infty$  与  $x \rightarrow -\infty$  的极限, 两者相等, 则  $x \rightarrow \infty$  时的极限存在, 否则不存在.

【例 1.42】求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x \arctan x}{e^x + x}$ .

【解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x \arctan x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{x}{e^x} \arctan x}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x \arctan x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} e^x - \arctan x}{\frac{1}{x} e^x + 1} = \frac{\pi}{2}$ , 故极限不存在.

3.  $\infty - \infty$  型  $\Rightarrow \frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 再用法则或“抓大头”方法处理, 求解方法有三种

(1) 通分; (2) 根式有理化; (3) 变量替换.

【例 1.43】求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$  ( $\infty - \infty$  型).

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

【例 1.44】求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]$  ( $\infty - \infty$  型).

【解】该题不能通分,更不可能用根式有理化,因此只能用变量替换法.

$$\begin{aligned} \text{原式} & \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t(1+t)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 1.45】求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$  ( $\infty - \infty$  型).

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$  (抓大头).

4.  $0 \cdot \infty$  型  $\Rightarrow \frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型,再用法则或“抓大头”方法求解

设  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \infty$ , 则

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left( \frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$ , 称将  $f(x)$  “下放”.

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \left( \frac{0}{0} \text{ 型} \right)$ , 称将  $g(x)$  “下放”.

● 对数与反三角函数一般不“下放”,因为下放后的导数比原来的复杂,违背了数学运算的原

则,例如  $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \left( \frac{1}{\ln x} \right)' = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$ , 后者比前者复杂.

【例 1.46】求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2 \right) x^2$  ( $0 \cdot \infty$  型).

【解】原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan 2x^2}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4x}{1 + (2x^2)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{1 + 4x^4} = \frac{1}{2}.$

5.  $0^0, \infty^0, 1^\infty$  型  $\xrightarrow{\text{用对数恒等式}} \frac{0}{0} \text{ 型或 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型}$

现以  $0^0$  型为例,设  $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$ , 则

$$\lim f(x)^{g(x)} (0^0) = \lim e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}, \text{ 指数为 } 0 \cdot \infty \text{ 型}.$$

$\infty^0, 1^\infty$  可作类似处理.

●  $1^\infty$  型的极限有两种求法:(1) 用对数恒等式化为  $0 \cdot \infty$ , 再化为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$ ; (2) 利用公式

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  或  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$  求解. 一般来讲,幂指函数的底呈  $[1+u(x)]$ , 或易化成这种形式的  $[u(x) \rightarrow 0]$ , 用后者简单.



【例 1.47】求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{k}{1+\ln x}}; (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x}; (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x; (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

【解】(1) 原式 =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k \ln x}{1+\ln x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right)}$  =  $e^k \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = e^k.$

(2) 原式 =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln(\cot x)}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\csc x}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot (-\csc^2 x)}{-\csc x \cdot \cot x}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x}{\sin x}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x}}$  =  $e^0 = 1.$

(3) 原式 =  $e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x - 1 \right) x}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \arctan x - 1}{\frac{1}{x}}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$  =  $e^{-\frac{2}{\pi}}.$

(4) 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ , =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2 \sqrt{1-x^2}}}$   
 =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})}}$  =  $e^{\frac{1}{6}}.$

【例 1.48】求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ , 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  均为正数.

【解】原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$   
 =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n} \cdot \frac{1}{x}}$  =  $e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{n}}$  =  $e^{\frac{\ln a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}$  =  $e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$  =  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$

## 题型二 类未定式的计算

**提示** 类未定式是指未能确切肯定某种运算结果的极限.

例如, 在某个过程中,  $f(x)$  与  $g(x)$  均无极限, 则不能肯定  $f(x) + g(x)$  的极限不存在, 而要具体问题具体分析, 又如, 若  $f(x)$  有极限,  $g(x)$  无极限, 也不能肯定  $f(x)g(x)$  的极限不存在.

【例 1.49】求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

【解】(1) 因为  $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2},$

$$\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0,$$

所以原极限 = 0.

这类极限有个特点就是被减函数与减函数的自变量的差恰为 1, 因此这类极限的求法可借助拉格朗日中值定理.

【另解】令  $f(t) = \sin \sqrt{t}$ , 显然当  $x > 0$  时,  $f(t)$  在  $[x, x+1]$  上满足拉格朗日中值定理, 于是有

$$\frac{\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}}{(x+1) - x} = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(\xi) = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \text{ 即}$$

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = \cos \sqrt{\xi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, x < \xi < x+1$$

$$\text{故原极限} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{\xi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = 0.$$

(2) 令  $f(t) = \ln \arctan t$ , 当  $x > 0$  时,  $f(t)$  在  $[x, x+1]$  上满足拉格朗日中值定理, 于是有

$$\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x = \frac{1}{\arctan \xi} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}, x < \xi < x+1,$$

$$\text{故原极限} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+\xi^2} \frac{1}{\arctan \xi} = \frac{2}{\pi}.$$

【例 1.50】求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ .

$$\begin{aligned} \text{【解】原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} [(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) - (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{-2}{2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例 1.51】设  $f(x-1) = \begin{cases} x, & x > 1, \\ x-2, & x \leq 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} -e^x, & x > 0, \\ e^x, & x \leq 0. \end{cases}$

求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ .

$$\text{【解】} f(x-1) = \begin{cases} x, & x > 1 \\ x-2, & x \leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } x-1=u} f(u) = \begin{cases} u+1, & u > 0, \\ u-1, & u \leq 0. \end{cases}$$

由于函数表示法与用什么字母表示无关, 所以,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0. \end{cases}$$

于是

$$f(x)g(x) = \begin{cases} -e^x(x+1), & x > 0 \\ e^x(x-1), & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-e^x(x+1)] = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x(x-1) = -1,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = -1.$$

### 题型三 数列的极限

**提示** 一般用以下方法.

#### 1. 子序列的极限与函数的极限等值

【例 1.52】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ .

$$\begin{aligned} \text{【解】先求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^x \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right) &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln [1 + (\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}) - 1)]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}) - 1]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}) - 1}{x^{-1}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x})} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}}} = e^2. \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = e^2$ .

$$\begin{aligned} \text{【另解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{1}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n}{\left( 1 - \tan \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2. \end{aligned}$$

【例 1.53】求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{n} \right)^n$ .

【解】先求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan x \right)^{x^2}$

$$\text{极限} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ \frac{2}{\pi} \arctan x - 1 \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \arctan x - 1}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}}} = 0. \text{故原极限} = 0.$$

## 2. 单调有界数列必有极限

【例 1.54】已知  $x_1 = \sqrt{a}$ ,  $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$ ,  $\dots$ ,  $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}$ ,  $a > 0$ . 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**提示** 此类问题的解题程序: ① 直接对通项进行分析或用数学归纳法验证数列  $\{x_n\}$  单调有界;

② 设  $\{x_n\}$  的极限存在, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 将其代入给定的  $x_n$  的表达式中, 则该式变为  $l$  的代数方程, 解之即得该数列的极限.

【解】先证  $\{x_n\}$  为单增数列, 由于

$$x_2 = \sqrt{a + x_1} > x_1,$$

设当  $n = k$  时,  $x_k > x_{k-1}$ , 则有

$$\begin{aligned} a + x_k &> a + x_{k-1}, \\ \Rightarrow \sqrt{a + x_k} &> \sqrt{a + x_{k-1}}, \text{即 } x_{k+1} > x_k, \end{aligned}$$

由数学归纳法知  $\{x_n\}$  为单增数列.

再证  $\{x_n\}$  有界, 显然  $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$ ,

设  $n = k$  时,  $x_k < \sqrt{a} + 1$ , 则当  $n = k + 1$  时,

$$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{(\sqrt{a} + 1)^2} = \sqrt{a} + 1,$$

可知  $\{x_n\}$  有界, 因此  $\{x_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时, 极限存在.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a + x_{n-1}} \Rightarrow l = \sqrt{a + l} \\ \Rightarrow l &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}) \quad \left( l = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4a}) \text{ 舍去} \right), \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

## 3. 利用极限定义求极限

**提示** 当数列  $x_n$  不单调时, 其极限的存在性可考虑用极限的定义证明, 解题程序是先求出

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 再证  $x_n$  的存在性.

**【例 1.55】** 设  $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, n \geq 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**【解】** 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x_n}\right)$ , 即  $l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2}$ , 因为  $x_n \geq 2$ ,

所以  $l \geq 2$ , 故  $l = 1 + \sqrt{2}$  ( $l = 1 - \sqrt{2}$  舍去). 以下证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

对任意的  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{l x_{n-1}} < \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} < \varepsilon \quad (\text{当 } n \text{ 足够大}), \end{aligned}$$

由极限定义  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l = 1 + \sqrt{2}$ .

#### 4. $n$ 项和, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

求解方法:

(1) 利用特殊级数求和法;

(2) 利用幂级数求和法;

(3) 利用定积分定义求极限  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ .

(i) 取  $\Delta x_k = \frac{1}{n}(b-a)$ ,  $\xi_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ , 则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx,$$

取  $\Delta x_k = \frac{1}{n}(b-a)$ ,  $\xi_k = a + \frac{k-1}{n}(b-a)$ , 则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a)\right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx;$$

(ii)  $[a, b] = [0, 1]$ , 则  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$

取  $\xi_k = \frac{k-1}{n}$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$ ,

取  $\xi_k = \frac{k}{n}$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$ .

(4) 利用夹逼定理求极限.

**提示** (1)  $n$  个项按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求解.

(2) 若每一项可提一个  $\frac{1}{n}$ , 提出  $\frac{1}{n}$  后剩下的可表示为一个通式, 则用定积分定义求解.

**【例 1.56】** 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} (p > 1).$$

【解】(1) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right]$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ . 令  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ , 则

$$f(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} dx \right)' = \left( \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{2} \right)^n \right)'$$

$$= \left[ \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} \right]' = \left( \frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

故原极限 =  $f(1) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \Big|_{x=1} = 3.$

(3) 因为  $\frac{i^2}{n^2} < \frac{i^2+1}{n^2} < \frac{(i+1)^2}{n^2}$ , 所以  $\exists \xi_i \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ , 使  $\xi_i^2 = \frac{i^2+1}{n^2}$ . 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \xi_i^2} + \frac{1}{n + \frac{n^2+1}{n}} - \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n + \frac{n^2+1}{n}} - \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \right] = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(4) \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ , 所以原极限 = 1.

$$(5) \text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right] \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$(6) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

### 5. $n$ 项乘积, 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

求解方法:

- (1) 分子、分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应;
- (2) 把通项拆开, 使各项相乘过程中中间项相消;
- (3) 夹逼定理;
- (4) 利用对数恒等式化为  $n$  项和形式.

【例 1.57】求下列极限:

$$(1) \text{ 当 } |x| < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$$

$$(2) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (2n-1)}$$

【解】(1) 原极限 =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^4)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} = \cdots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

因为当  $|x| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^{n+1}} = 0$ , 所以原极限 =  $\frac{1}{1-x}$ .

$$(2) \text{ 原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \left(2 \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}\right)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \left(2 \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$= \cdots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \stackrel{\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$(3) \text{ 因为 } 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (2n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n(n+1) \cdots (2n-1)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln n + \ln(n+1) + \cdots + \ln(2n-1)] - \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(1 + \frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n-1}{n})]} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 + \frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}} = e^{\int_0^1 \ln(1+x) dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^1 \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln 2 - [1 - \ln(1+x)] \Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1, \end{aligned}$$

$$\text{故原极限} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

① 式也可表示成:  $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 + \frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}} = e^{\int_0^1 \ln x dx} = 2\ln 2 - 1.$

#### 题型四 极限式中常数的确定(重点)

【例 1.58】确定正数  $a$  和  $b$ , 使  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 2.$

$$\begin{aligned} \text{【解】原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt}{bx - \sin x} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(b - \cos x) \sqrt{a+x^2}}, \end{aligned}$$

因为  $x \rightarrow 0$  时, 极限式的分子  $x^2 \rightarrow 0$ , 整个极限存在,

$$\text{所以必有 } \lim_{x \rightarrow 0} (b - \cos x) \sqrt{a+x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (b - \cos x) = 0,$$

于是,  $b = 1.$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 - \cos x) \sqrt{a+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2} x^2 \sqrt{a+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a}} = 2,$$

于是,  $a = 1.$

【例 1.59】设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax + b}{x^{2n} + 1}$  为连续函数, 求  $a, b.$

$$\text{【解】} f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{当 } |x| < 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{x}, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2}(1 + a + b), & \text{当 } x = 1 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2}(-1 - a + b), & \text{当 } x = -1 \text{ 时.} \end{cases}$$



因为  $f(x)$  连续, 所以  $f_-(-1) = f_+(-1) = f(-1)$ .

$$\begin{aligned} f_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1, f_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = -a + b \\ \Rightarrow -1 &= -a + b = \frac{1}{2}(-1 - a + b). \end{aligned} \quad (2)$$

同样,  $f_-(1) = f_+(1) = f(1)$ ,

$$\begin{aligned} f_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b, f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \\ \Rightarrow 1 &= a + b = \frac{1}{2}(1 + a + b), \end{aligned} \quad (3)$$

由 (2), (3) 式得,  $b = 0, a = 1$ .

**【例 1.60】** 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + \alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 求常数  $\alpha$ .

**【解】** 由题设有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = 1$ ,

$$\text{因为 } (1 + \alpha x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}\alpha x^2, \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0)$$

$$\text{所以原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}\alpha x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}\alpha = 1, \text{ 所以 } \alpha = -\frac{3}{2}.$$

**【例 1.61】** 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}f(x)} - 1}{x^2} = C, C \neq 0$ . 求常数  $a$  与  $b$ , 使得当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) \sim ax^b$ .

**【解】** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}f(x)} - 1}{x^2} = C \neq 0$ ,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}f(x) = 0, \text{ 故当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sqrt{1 + \frac{1}{x}f(x)} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}f(x),$$

$$\text{有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2x}f(x)}{x^2} = C, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^3} = C. \text{ 所以, 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } f(x) \sim 2Cx^3, \text{ 因此, } a = 2C, b = 3.$$

**【例 1.62】** 求常数  $a$ , 使极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos(a-t) dt$  存在, 并求此极限值.

**【解】** 因为

$$\begin{aligned} & \int_{-x}^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos(a-t) dt \\ &= \int_{-x}^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) (\cos a \cos t + \sin a \sin t) dt \\ &= \cos a \int_{-x}^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos t dt + \sin a \int_{-x}^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \sin t dt \\ &= 2\cos a \int_0^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos t dt \\ &= 2\cos a \left[ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t dt - \frac{1}{x^2} \int_0^x |t| \cos t dt \right] \end{aligned}$$

$$= 2\cos a \cdot \frac{x \int_0^x \cos t dt - \int_0^x |t| \cos t dt}{x^2},$$

所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos(a-t) dt \\ &= 2\cos a \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \int_0^x \cos t dt - \int_0^x t \cos t dt}{x^2} \\ &= 2\cos a \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t dt}{2x} = 2\cos a \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2} = \cos a; \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-x}^x \frac{1}{x} \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos(a-t) dt \\ &= 2\cos a \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \int_0^x \cos t dt + \int_0^x t \cos t dt}{x^2} \\ &= 2\cos a \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x \cos t dt + 2x \cos x}{2x} \\ &= 3\cos a. \end{aligned}$$

因为极限存在, 所以  $\cos a = 3\cos a$ . 即  $\cos a = 0, a = n\pi + \frac{\pi}{2}, n$  为整数, 且极限为 0.

**【例 1.63】** 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内具有二阶连续导数, 且  $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$ . 证明: 存在唯一的一组实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 使得当  $h \rightarrow 0$  时,  $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$  是比  $h^2$  高阶的无穷小.

**【证一】** 只需证明存在唯一的一组实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 使

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

由题设和洛必达法则得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 f''(h) + 4\lambda_2 f''(2h) + 9\lambda_3 f''(3h)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0). \end{aligned}$$

所以  $\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\lambda_1 f'(h) + 2\lambda_2 f'(2h) + 3\lambda_3 f'(3h)] = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)] = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) = 0.$$

因此,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

因为系数行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ , 所以方程组存在唯一解, 即存在唯一的一组实数  $\lambda_1$ ,

$\lambda_2, \lambda_3$ , 使得当  $h \rightarrow 0$  时,  $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$  是比  $h^2$  高阶的无穷小.

【证二】由麦克劳林公式得

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$f(3h) = f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2}f''(0)h^2 + o(h^2).$$

故有  $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h + \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2).$$

所以  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

以下同证法一.

### 题型五 函数连续或间断点的判定

【例 1.64】求下列函数的不连续点且判别类型:

$$(1) f(x) = \frac{x}{\tan x}, \quad (2) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}, \quad (3) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & |x| \leq 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}.$$

【解】(1)  $f(x) = \frac{x}{\tan x}$  的间断点为: 使  $\tan x = 0$  的点

$$x = k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

以及使  $\tan x$  无定义的点

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0, (k = 0, \pm 1, \dots)$$

所以  $x = 0$  及  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k = 0, \pm 1, \dots)$  为第 I 类间断点(可去间断点).

因为  $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty, (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 所以  $x = k\pi, (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$  为第 II 类间断点.

(2) 显然  $x = 0$  为间断点,

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1,$$

所以  $x = 0$  为第一类间断点(跳跃间断点).

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & x > 1, \\ 1-x, & x < -1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad f_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi}{2}x = 0, \\ f_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, \\ f(1) &= \cos \frac{\pi}{2}x = 0, \end{aligned}$$

所以  $x=1$  为  $f(x)$  的连续点.

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad f_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x) = 2, \\ f_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{\pi}{2}x = 0, \end{aligned}$$

所以  $x=-1$  为  $f(x)$  的第一类间断点(跳跃间断点).

**【例 1.65】** 研究下列复合函数的连续性:

(1) 设  $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+4, & x > 1 \end{cases}$ . 研究  $f[g(x)]$  的连续性.

(2)  $y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$ . 研究  $f[g(x)]$  的连续性.

**【解】** (1)  $f[g(x)] = \begin{cases} g^2(x), & g(x) \leq 1 \\ 2-g(x), & g(x) > 1 \end{cases}$

令  $u = g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+4, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $f(u) = \begin{cases} u^2, & u \leq 1 \\ 2-u, & u > 1 \end{cases}$

用图示法求解  $f[g(x)]$  (见图 1-3):

先作出  $u = g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+4, & x > 1 \end{cases}$  的图形, 再在  $xOu$  平面上画出  $u=1$  的图形.

由图可见, 当  $x \leq 1$  时,  $u = x$ ,

当  $x > 1$  时,  $u = x+4$ ,

于是,  $f[g(x)] = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -2-x, & x > 1 \end{cases}$

因为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2-x) = -3$ ,

所以  $x=1$  为  $f[g(x)]$  的第 I 类间断点(跳跃间断点).

(2) 同样可用图示法得出

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

可见  $x=1$  为其间断点(可去间断点).

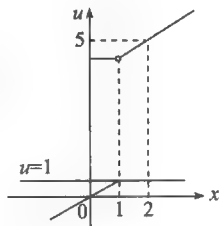


图 1-3

【例 1.66】设  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ , 则结论( )正确.

- (A) 在  $x = 0, x = 1$  处间断. (B) 在  $x = 0, x = 1$  处连续.  
(C) 在  $x = 0$  处间断, 在  $x = 1$  处连续. (D) 在  $x = 0$  处连续, 在  $x = 1$  处间断.

【解】因为

$$f_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1,$$

$$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

所以  $x = 0$  为  $f(x)$  的第 I 类间断点.

又因为

$$f_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1,$$

$$f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1, \quad \text{又 } f(1) = 1,$$

所以  $x = 1$  为  $f(x)$  的连续点. 故(C)入选.

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定式 1** 求给出通项的数列的极限, 要立即想到数列的单调有界定理.

【例 1.67】设  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

【解】 $x_1 = 10, x_2 = \sqrt{6 + x_1} = 4$ , 可知  $x_1 > x_2$ .

设  $x_k > x_{k+1}$ , 则  $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2}$ ,

于是由数学归纳法可知对一切自然数  $n$ , 有  $x_n > x_{n+1}$ , 即  $\{x_n\}$  单调减少.

又由题设可知  $x_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 即  $\{x_n\}$  有下界.

由单调减少有下界数列必有极限, 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 在  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$  两边取  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 得  $l = \sqrt{6 + l}$ .

解之得  $l = 3, l = -2$  (舍去).

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

**思维定势 2** 若从数列和  $S_n = \sum_{i=1}^n a_n$  中每项提出  $\frac{b-a}{n}$  或  $\frac{1}{n}$  后,  $n$  项和可写成

$\sum_{i=1}^n f\left[a + \frac{i(b-a)}{n}\right]$  或  $\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$  的形式, 要立刻想到定积分定义.

具体方法:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \cdot \frac{b-a}{n},$

特别有  $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}.$

【例 1.68】求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left( \cos \frac{\pi}{4n} + \cos \frac{3\pi}{4n} + \cdots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} \right);$$

【解】(1)  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \cdot \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \text{ 令 } S_n = \frac{\pi}{n} \left( \cos \frac{\pi}{4n} + \cos \frac{3\pi}{4n} + \cdots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} \right) = 2 \sum_{i=1}^n \cos \frac{2i-1}{4n} \pi \cdot \frac{\pi}{2n},$$

$S_n$  可看做  $f(x) = \cos x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的积分和式

$$2 \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \xi_i = \frac{2i-1}{4n} \pi, \Delta x_i = \frac{\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\text{于是 } I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

**思维定势 3** 遇到“ $1^\infty$ ”未定式时,要立刻想到极限  $\lim [1+f(x)]^{g(x)}$  [其中  $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$ ], 若不是  $\lim [1+f(x)]^{g(x)}$  形式,则要将其化成该形式,其结果为  $1^\infty = e^A, A = \lim f(x)g(x)$ .

【例 1.69】计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 3x)^{\frac{1}{\tan x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{x}{1-x}}.$$

【解】(1)  $A = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin 3x) \frac{1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-3x) \frac{1}{x} = -3$ , 故  $I = e^{-3}$ .

$$(2) A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \frac{1}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2}x^2 \right) \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } I = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(3) A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 \right] x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + abx}{(x-a)(x+b)} \xrightarrow{\text{抓大头准则}} a-b, \text{ 故 } I = e^{a-b}.$$

$$(4) A = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x}{1+x} - 1 \right) \cdot \frac{x}{1-x} = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } I = e^{-\frac{1}{2}}.$$

**思维定势 4** 当  $x \rightarrow 0$  时,求含有  $e^{\frac{1}{x}}, \arctan \frac{1}{x}, \operatorname{arccot} \frac{1}{x}, |x|$  的极限,要想到分别求  $x \rightarrow 0^+$  和  $x \rightarrow 0^-$  时的左、右极限,当左、右极限相等时,极限存在,否则不存在.(或当  $x \rightarrow \infty$  时,极限式中含有  $e^x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, |x|$  要分别求  $x \rightarrow +\infty$  和  $x \rightarrow -\infty$  时的左、右极限,当左、右极限相等时,极限存在,否则不存在.)

**【例 1.70】**求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$ .

**【解】**令  $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$ , 于是

$$f_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} (1 + e^{\frac{2}{x}})} = 0.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = 0.$$

**【例 1.71】**求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2|x|}{1+x} \arctan x$ .

**【解】**令  $f(x) = \frac{1+2|x|}{1+x} \arctan x$ , 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2|x|}{1+x} \arctan x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2|x|}{1+x} \arctan x = (-2) \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2|x|}{1+x} \arctan x = \pi.$$

**思维定势 5** 确定形如  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$  极限式中的常数时,要想到:

- (1) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$  ( $k$  为常数), 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .
- (2) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$  ( $k$  为常数), 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ( $\infty$ ), 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  ( $\infty$ ).
- (3) 若分子分母均为多项式的  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  型未定式中的常数, 一般用“抓大头”准则.

**【例 1.72】**设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内有一阶连续导数, 且  $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$ ,

若  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = 0$ , 试确定  $a, b$  的值.

**【解】**由已知有  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = 0$ , 而  $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ ,

$$\text{得 } \lim_{h \rightarrow 0} [af(h) + bf(2h) - f(0)] = 0,$$

即  $af(0) + bf(0) - f(0) = 0$ , 由于  $f(0) \neq 0$ ,

$$\text{于是 } a + b - 1 = 0.$$

①

又由洛必达法则得



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af'(h) + 2bf'(2h)}{1} = af'(0) + 2bf'(0) = 0,$$

由于

$$f'(0) \neq 0,$$

于是

$$a + 2b = 0,$$

②

所以,由①②得  $a = 2, b = -1$ .

**【例 1.73】** 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$ , 试确定  $a, b, c$  的值.

**【解】** 因为  $c \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0} (ax + \sin x) = 0$ ,

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0$ , 而当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\ln(1+t^3)}{t} \sim t^2 > 0$ , 所以  $b = 0$ .

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \cos x}{x^2} = c (c \neq 0), \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

$$\text{所以 } a = -1, c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{故 } a = -1, b = 0, c = -\frac{1}{2}.$$

**【例 1.74】** 设  $f(x)$  是多项式, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 8x^8}{2x^2 + 3x + 1} = 4, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 8$ , 求  $f(x)$ .

**【解】** 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 8x^8}{2x^2 + 3x + 1} = 4$ , 可设  $f(x) = 8x^8 + 8x^2 + ax + b$ ,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 8, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^8 + 8x^2 + ax}{x} = 8 \Rightarrow a = 8,$$

$$\text{故 } f(x) = 8x^8 + 8x^2 + 8x.$$

**思维定势 6** 当  $\frac{0}{0}$  型未定式呈现  $\frac{f_1(x) - g_1(x)}{f_2(x) - g_2(x)}$  或  $\frac{x^k}{f_2(x) - g_2(x)}$  或  $\frac{f_1(x) - g_1(x)}{x^k}$

形式, 且用洛必达法则求解较复杂或不可用时, 要想到用泰勒公式求解. 一般用泰勒公式展开到相互抵消后的后一项.

**【例 1.75】** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}; (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos \sqrt{x}}.$$

$$\text{【解】} (1) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$(2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2),$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4!}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{8} - \frac{1}{4!} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -3.$$

## 二、综合题解析

【例 1.76】设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e$ , 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)], \text{试确定 } c \text{ 的值.}$$

【解】  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2c}{x-c} \right)^x = e^{2c},$

由于  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 则根据拉格朗日中值定理知,  $\exists \xi \in (x-1, x)$ , 使

$$f(x) - f(x-1) = f'(\xi)$$

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\xi \rightarrow \infty$ , 所以  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = e$ , 即  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)] = e$ ,

$$\text{所以 } e^{2c} = e \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

【例 1.77】求函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \sin(\pi x))^n + \sin(\pi x)}{1 + [1 + \sin(\pi x)]^n}, -1 \leq x \leq 1.$

【分析】当  $x$  取不同值时, 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \sin(\pi x)]^n$  的取值不同, 所以, 应对  $x$  的取值进行讨论.

【解】(1) 显然有  $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(-1) = -\frac{1}{2}.$

(2) 当  $0 < x < 1$  时,  $1 + \sin(\pi x) > 1$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin(\pi x))^n = \infty$ , 所以,  $f(x) = x.$

(3) 当  $-1 < x < 0$  时,  $0 < 1 + \sin(\pi x) < 1$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \sin(\pi x)]^n = 0$ , 所以  $f(x) = \sin(\pi x).$

所以, 
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = -1 \\ \sin(\pi x), & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

【例 1.78】求下列极限:

(1) 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = A, (a > 0, a \neq 1), \text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$

(2) 设  $f(x)$  是三次多项式, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} = 1, (a \neq 0), \text{求} \lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a}.$$

**提示** 这类由已知的极限表示欲求解的极限的命题,切忌用洛必达法则处理给定极限式的左边,因为这实质上增加了题设条件.一般来讲,这类题是利用“逐步分析法”,极限与无穷小的关系定理,等价无穷小替换等方法解决.

**【解】**(1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = A$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x - 1) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = 0$ .

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln a} = A,$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = A \ln a.$$

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} = 1 \quad (a \neq 0)$ ,

所以  $f(2a) = f(4a) = 0$  (否则极限为  $\infty$ ).

可知  $x-2a, x-4a$  均为  $f(x)$  的因式, 又因为  $f(x)$  为三次多项式, 因此

令  $f(x) = A(x-2a)(x-4a)(x-B)$ , 其中  $A, B$  为待定常数, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} &= \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-2a} = -2Aa(2a-B) \\ &\Rightarrow -2Aa(2a-B) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} &= \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{A(x-2a)(x-4a)(x-B)}{x-4a} = 2Aa(4a-B) \\ &\Rightarrow 2Aa(4a-B) = 1, \end{aligned}$$

解以上联立方程组得 
$$\begin{cases} B = 3a, \\ A = \frac{1}{2a^2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a),$$

故 
$$\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a} = \lim_{x \rightarrow 3a} \frac{\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)(x-3a)}{x-3a} = -\frac{1}{2}.$$

**【例 1.79】** 已知  $f(x)$  在  $x=a$  处可导, 且  $f(x) > 0, n$  为自然数.

$$\text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f\left(a + \frac{1}{n}\right) / f(a) \right]^n.$$

**提示** 这类题应该向题设条件靠, 即将所求的极限式凑成  $f(x)$  在  $x=a$  处的导数定义形式.

**【解】** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f\left(a + \frac{1}{n}\right) / f(a) \right]^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} [f(a + \frac{1}{n}) / f(a) - 1]n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

### 习 题 一

#### 1. 填空题.

(1) 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$ , 则常数  $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 已知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \neq 0$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}, c = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 已知  $f'(3) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(7) 设函数  $f(x)$  有连续的导函数,  $f(0) = 0$ , 且  $f'(0) = b$ ,

若  $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则常数  $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

(8) 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$  为  $x$  的三阶无穷小, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1990}}{n^k - (n-1)^k} = A (\neq 0, \neq \infty)$ , 则  $A = \underline{\hspace{2cm}}, k = \underline{\hspace{2cm}}.$

## 2. 选择题.

(1) 设  $f(x)$  和  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义,  $f(x)$  为连续函数, 且  $f(x) \neq 0$ ,  $\varphi(x)$  有间断点, 则

A.  $\varphi[f(x)]$  必有间断点.

B.  $[\varphi(x)]^2$  必有间断点.

C.  $f[\varphi(x)]$  必有间断点.

D.  $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$  必有间断点. 【 】

(2) 设函数  $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$ , 则  $f(x)$  是

A. 偶函数.

B. 无界函数.

C. 周期函数

D. 单调函数. 【 】

(3) 当  $x \rightarrow 1$  时, 函数  $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$  的极限

A. 等于 2.

B. 等于 0.

C. 为  $\infty$ .

D. 不存在但不为  $\infty$ . 【 】

(4) 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a$  的值是

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D.  $\frac{1}{2}$ . 【 】

(5) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2 \times (n+1)^2} \right]$  的值是

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 不存在. 【 】

(6) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^{95} (ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}} = 8$ , 则  $a$  的值为

- A. 1.                      B. 2.                      C.  $\sqrt[5]{8}$ .                      D. 均不对.      【    】
- (7) 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^a} = \beta \neq 0$ , 则  $\alpha, \beta$  的数值为  
 A.  $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{3}$ .      B.  $\alpha = 5, \beta = \frac{1}{3}$ .      C.  $\alpha = 5, \beta = \frac{1}{3^5}$ .      D. 均不对.      【    】
- (8) 设  $f(x) = 2^x + 3^x - 2$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  
 A.  $f(x)$  是  $x$  的等价无穷小.                      B.  $f(x)$  与  $x$  是同阶但非等价无穷小.  
 C.  $f(x)$  是比  $x$  较低阶的无穷小.                      D.  $f(x)$  是比  $x$  较高阶的无穷小.      【    】
- (9) 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x} = 6$ , 则  $a$  的值为  
 A. -1.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.      【    】
- (10) 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$ , 其中  $a^2 + c^2 \neq 0$ , 则必有  
 A.  $b = 4d$ .                      B.  $b = -4d$ .                      C.  $a = 4c$ .                      D.  $a = -4c$ .      【    】

### 3. 计算题.

(1) 求下列极限:

①  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$

②  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}};$

③  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$

④  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}.$

(2) 求下列极限:

①  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2 \sqrt[3]{x^2-1}};$       ②  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right);$       ③  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x \sqrt{1-x^2})}{\tan x \ln(1+x)}.$

(3) 求下列极限:

①  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e^2 - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right];$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1);$

③  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( x + \frac{a}{n} \right) + \left( x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left( x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right] \cdot \frac{1}{n};$

④  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} \right);$

⑤  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-nx}}{1 + e^{-nx}};$       ⑥  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$ , 其中  $a > 0, b > 0$ .

4. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0 \\ 1, & x = 0. \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x > 0 \end{cases}$

试讨论  $f(x)$  在  $x = 0$  处的连续性与可导性.

5. 求下列函数的间断点并判别类型.

①  $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1};$       ②  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} \cdot x;$       ③  $f(x) = \begin{cases} \frac{x(2x + \pi)}{2 \cos x}, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x^2 - 1}, & x > 0 \end{cases}.$

6. 试确定常数  $a, b$  的值, 使极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt \right)$  存在, 并求该极限值.

7. 设  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} [\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)]$ , 且  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点, 求  $\alpha, \beta$  的值.

8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^5 + 7x^4 + 2)^a - x] = b, b \neq 0$ , 求  $a, b$  的值.

9. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ e^x + \beta, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的连续性.

10. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$ . 求  $f(0), f'(0), f''(0)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x^2}$ .

### 参 考 答 案

1. (1)  $a = 2$ . (2) 极限  $= \frac{1}{2}$ . (3)  $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$ .

(4) 极限  $= -1$ . (5)  $f[f(x)] = 1$ . (6) 极限  $= 2$ . (7)  $A = a + b$ .

(8)  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ . (9) 极限  $= \frac{1}{6}$ . (10)  $A = \frac{1}{1991}, k = 1991$ .

2. (1) D (2) B (3) D (4) A (5) B (6) C (7) C (8) B (9) A (10) D

3. (1) ①  $e$  ②  $e^2$  ③  $e^2$  ④  $e^{\frac{1}{2}}$ . (2) ①  $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$  ②  $\frac{2}{3}$  ③  $-1$ .

(3) ①  $e^2$  ②  $1$  ③  $x + \frac{a}{2}$ . ④  $1$ , 提示: 利用夹逼定理 ⑤  $\begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  ⑥  $\sqrt{ab}$ .

4. 在  $x = 0$  处连续且可导.

5. ①  $x = 0$ , 第一类间断点. ②  $x = \pm 1$ , 第一类间断点.

③  $x = 0$ , 第一类(跳跃)间断点;  $x = 1$ , 第二类间断点;  $x = -\frac{\pi}{2}$ , 第一类(可去)间断点;

$x = -k\pi - \frac{\pi}{2}, k = 1, 2, 3, \dots$ , 第二类(无穷)间断点.

6.  $a = -\frac{1}{3}, b = -1$ , 极限  $= -\frac{1}{10}$ .

7.  $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ . 8.  $a = \frac{1}{5}, b = \frac{7}{5}$ .

9. 当  $\alpha > 0$  且  $\beta = -1$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续;

当  $\alpha > 0$  且  $\beta \neq -1$  时,  $x = 0$  是  $f(x)$  的第一类(跳跃)间断点.

当  $\alpha \leq 0$  时,  $x = 0$  是  $f(x)$  的第二类间断点.

10.  $f(0) = -3, f'(0) = 0, f''(0) = 9, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x^2} = \frac{9}{2}$ .

提示: 将  $\sin x, f(x)$  泰勒展开.

## 第二章 导数与微分

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、导数与微分的定义

**定义1** 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的邻域内有定义, 给  $x$  在  $x_0$  处以增量  $\Delta x (\neq 0)$ , 函数  $y$  相应地得到增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

存在, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 该极限值称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的导数, 记为

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0},$$

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

令  $x_0 + \Delta x = x$ , 则  $(1) \Rightarrow (2)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

**注** 导数是一个分式的极限, 其中分子是函数在两点处的差值, 分母是两点处的差值.

**定义2** 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的左、右导数分别定义为

$$\begin{aligned} \text{左导数 } f'_-(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右导数 } f'_+(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

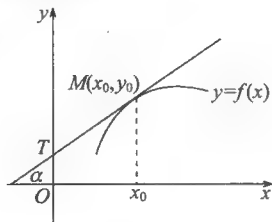


图 2-1

导数的几何意义:

$y = f(x)$  在  $x_0$  处的导数  $f'(x_0)$ , 表示曲线  $y = f(x)$  在  $M(x_0, y_0)$  处的切线  $MT$  的斜率, 即  $\tan \alpha = f'(x_0)$ , 如图 2-1 所示.

**注** 在导数的分式极限定义中, 分母的极限  $\rightarrow 0^+$  或  $\rightarrow 0^-$ , 如果只是单边行为 (即仅  $\rightarrow 0^+$  或仅  $\rightarrow 0^-$ ), 则该极限只能是函数在该点处的左导数或右导数, 而不是在该点的导数.

**【例 2.1】** 设  $f(0) = 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x = 0$  可导的充要条件为

$$(A) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h) \text{ 存在.} \quad (B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h).$$

$$(C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh) \text{ 存在.} \quad (D) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)].$$

【 】

【解】(A), (C) 项极限式的分母均为  $h^2$ , 而  $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0^+$ , 所以可排除 (A) (C).

对于 (D) 项, 令  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在点  $x = 0$  不可导, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0 \text{ 存在.}$$

故选 (B).

**定义 3** 如果  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内每一点均可导, 则称该函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导; 若  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且在  $x = a$  和  $x = b$  处分别具有右导数  $f'_+(a)$  和左导数  $f'_-(b)$ , 则  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上可导.

【例 2.2】设  $f'(x_0)$  存在, 求下列各极限.

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h};$$

$$(3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x}; \quad (4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}.$$

【解】(1)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} \cdot 3 = 3f'(x_0).$

(2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} (-1) = -f'(x_0).$

(3)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x} (-2) - \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{3\Delta x} \cdot 3 \right]$$

$$= -2f'(x_0) - 3f'(x_0) = -5f'(x_0).$$

(4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \right]$

$$= f'(x_0) - [-f'(x_0)] = 2f'(x_0).$$

【例 2.3】设  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ , 求  $f'(1)$ .

【解】因为  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ ,

$$\text{所以 } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2.$$

【例 2.4】设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 对任意  $x$ , 恒有  $f(x+1) = 2f(x)$ . 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x(1-x^2)$ , 试判断在  $x = 0$  处,  $f'(x)$  是否存在.

【解】当  $-1 \leq x < 0$  时,  $0 \leq x+1 < 1$ , 于是

$$f(x) = \frac{1}{2} f(x+1) = \frac{1}{2} (x+1) [1 - (x+1)^2] = \frac{1}{2} (x+1) (-2x - x^2),$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1-x^2)}{x} = 1,$$



$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}x(x+1)(2+x)}{x} = -1,$$

因为  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

**定义 4** 如果函数  $y = f(x)$  在点  $x$  处的某邻域内有定义, 当自变量在点  $x$  取得增量  $\Delta x$  时, 函数的增量  $\Delta y$  可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha,$$

其中  $A$  是与  $\Delta x$  无关的量;  $\alpha$  是当  $\Delta x \rightarrow 0$  时比  $\Delta x$  高阶的无穷小, 则称  $y = f(x)$  在  $x$  处可微,  $A\Delta x$  称为  $f(x)$  在点  $x$  处的微分, 记为  $dy$  或  $df(x)$ , 即  $dy = df(x) = A\Delta x$ , 由于当  $x$  为自变量时,  $dx = \Delta x$ , 同时可证  $f'(x) = A$ , 所以上式又可写成

$$dy = f'(x)dx.$$

**注** 当  $f'(x_0) \neq 0$  时,  $dy = f'(x_0)dx$  是  $\Delta y$  的线性主部.

## 二、重要定理

**定理 1**  $f'(x_0)$  存在  $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

**定理 2** 若  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 则  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 反之不真.

**定理 3** 函数  $f(x)$  在  $x$  处可微  $\Leftrightarrow f(x)$  在  $x$  处可导.

**定理 4** 设  $y = f(x)$  在点  $x$  的某邻域内单调连续, 在点  $x$  处可导且  $f'(x) \neq 0$ , 则其反函数在点  $x$  所对应的  $y$  处可导, 并且有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

## 三、导数与微分的运算法则

设  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  均可导, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v', \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$(2) (uv)' = uv' + vu', \quad d(uv) = u dv + v du;$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0), \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} (v \neq 0).$$

## 四、基本公式

(1) $y = c$ (常数)	$y' = 0$	$dy = 0$
(2) $y = x^a$ ( $a$ 为实数)	$y' = ax^{a-1}$	$dy = ax^{a-1} dx$
(3) $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a dx$
特例 $y = e^x$	$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = (e^x) dx$
(4) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$dy = \frac{1}{x \ln a} dx \quad (x > 0)$
特例 $y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx \quad (x > 0)$
(5) $y = \sin x$	$y' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
(6) $y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$

续表

(7) $y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx$
(8) $y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$
(9) $y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$	$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$
(10) $y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$	$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$
(11) $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(12) $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
(13) $y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$
(14) $y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$

## 五、弧微分与曲率

弧微分:  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx, (dx > 0), ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt (dt > 0),$

$ds = \sqrt{p^2(\theta) + p'(\theta)} d\theta (d\theta > 0).$

曲率: 曲线  $y = f(x)$  在点  $(x, y)$  处的曲率为  $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$

对于参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$

曲率半径: 曲线在点  $M$  处的曲率  $k (k \neq 0)$  与曲线在点  $M$  处的曲率半径  $\rho$  有如下关系:

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

曲率圆: 曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x, y)$  处的曲率圆方程为

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

其中,  $(\alpha, \beta)$  称为曲线在点  $M(x, y)$  处的曲率中心;  $R$  为曲线  $y = f(x)$  在点  $M(x, y)$  的曲率半径.

设  $y = f(x)$  的二阶导数  $y''$  在点  $x$  不为零, 则曲线在其对应点  $M(x, y)$  处的曲率中心  $D(\alpha, \beta)$  的计算公式为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{cases}$$

**【例 2.5】** 求抛物线  $y = \sqrt{x}$  在点  $M(1, 1)$  处的曲率圆方程.

**【解】** 由题设可知:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$\text{则 } y'|_{(1,1)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}, y'' \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}.$$

设  $y = \sqrt{x}$  在点  $(1, 1)$  处的曲率圆方程为

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

$$\text{其中 } \alpha = 1 - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \Big|_{(1,1)} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{7}{2},$$

$$\beta = 1 + \frac{1+y'^2}{y''} \Big|_{(1,1)} = 1 + \frac{1 + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = -4.$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \Big|_{(1,1)} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

故  $y = \sqrt{x}$  在点  $(1, 1)$  处的曲率圆方程为

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = \frac{125}{4}.$$

## 六、高阶导数的定义与基本公式

**定义** 若  $y = f(x)$  的导函数  $f'(x)$  在点  $x$  处可导, 则称  $f'(x)$  在  $x$  处的导数为  $y = f(x)$  在点  $x$  处的二阶导数, 记为  $\frac{d^2 y}{dx^2}, f''(x)$ , 即

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

同样可定义  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x)$  为  $f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$

高阶导数公式

$$(1) (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0), \text{ 特别 } (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3) (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(4) (x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$$

$$(5) (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(6) 莱布尼茨公式: 若  $u(x), v(x)$  均  $n$  阶可导, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \quad \text{其中 } u^{(0)} = u, \quad v^{(0)} = v.$$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求复合函数的导数或微分

**提示** 设  $y = f(u), u = \varphi(x)$ , 如果  $\varphi(x)$  在  $x$  处可导,  $f(u)$  在对应点  $u$  处可导, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在  $x$  处可导, 且有

$$y'_x = f'_u(u) \varphi'_x(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

这种求复合函数导数的方法称之为连锁法则. 该法则可推广到多个函数复合的情形中去.

**【例 2.6】** 设  $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$ ,  $f'(x) = \arcsin x^2$ , 求  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$ .

**【解】**  $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)' = \arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2 \cdot \frac{12}{(3x+2)^2},$

于是  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = (\arcsin 1) \cdot 3 = \frac{3}{2}\pi.$

**【例 2.7】** 求下列函数的导数:

$$(1) y = x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]; \quad (2) y = f^n[\varphi^n(\sin x^n)];$$

$$(3) y = x^a + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

**【解】** (1)  $y' = \cos(\ln x) + \sin(\ln x) + x\left[-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right]$

$$= \cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x).$$

$$(2) y' = n f^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot n \varphi^{n-1}(\sin x^n) \cdot \varphi'(\sin x^n) \cdot \cos x^n \cdot n x^{n-1}$$

$$= n^3 \cdot x^{n-1} \cos x^n \cdot f^{n-1}[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot \varphi^{n-1}(\sin x^n) \cdot f'[\varphi^n(\sin x^n)] \cdot \varphi'(\sin x^n).$$

$$(3) y' = a^a x^{a-1} + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a x^{a-1} + a^{a^x} \ln a \cdot a^x \ln a$$

$$= a^a x^{a-1} + a \ln a x^{a-1} a^{x^a} + \ln^2 a \cdot a^x a^{a^x}.$$

**【例 2.8】** 设  $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \sin x$ , 求  $f'[f(x)], \{f[f(x)]\}', \{f[f(x)]\}''$ .

**【解】** 令  $t = \frac{1}{2}x$ , 则  $f(t) = \sin 2t, f'(t) = 2\cos 2t, f''(t) = -4\sin 2t$ .

于是

$$f'[f(x)] = 2\cos 2[f(x)] = 2\cos(2\sin 2x);$$

$$\{f[f(x)]\}' = f'[f(x)] \cdot f'(x) = 2\cos(2\sin 2x) \cdot 2\cos 2x$$

$$= 4\cos(2\sin 2x) \cdot \cos 2x;$$

$$\{f[f(x)]\}'' = \{f'[f(x)] \cdot f'(x)\}' = f''[f(x)][f'(x)]^2 + f'[f(x)]f''(x)$$

$$= -4\sin(2\sin 2x) \cdot (2\cos 2x)^2 + 2\cos(2\sin 2x) \cdot (-4\sin 2x)$$

$$= -16\sin(2\sin 2x)\cos^2 2x - 8\cos(2\sin 2x)(\sin 2x).$$

**【例 2.9】** 作变换  $u = \tan y, x = e^t$ , 试将方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^2 (\tan y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - \sin y \cos y = 0$$

化为  $u$  关于  $t$  的方程.

**【解】** 由于  $y = \arctan u, t = \ln x$ , 故有

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ 又 } \sin y \cos y = \frac{u}{1+u^2},$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dt} \right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{2u}{(1+u^2)^2} \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right),$$

代入原方程并整理得

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - u = 0.$$

### 题型二 求参数方程的导数或微分

**提示** 设  $x(t), y(t)$  均二阶可导, 且  $x'(t) \neq 0$ , 则参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

所确定的函数  $y = y(x)$  的一、二阶导数:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}. \end{aligned}$$

**【例 2.10】** 设  $\begin{cases} x = \cos(t^2) \\ y = t\cos(t^2) - \int_1^{t^2} \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du, t > 0 \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ .

**【解】**  $x' = -2t\sin(t^2)$ ,

$$y' = \cos(t^2) - 2t^2 \sin(t^2) - \frac{1}{2t} \cos(t^2) \cdot 2t = -2t^2 \sin(t^2),$$

$$\frac{dy}{dx} = t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(t) = -\frac{1}{2t\sin(t^2)}.$$

**【例 2.11】** 设  $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$ , 求当  $t = 0$  时的导数  $\frac{dy}{dx}$ .

**【解】** 当  $t > 0$  时,  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}$ , 当  $t < 0$  时,  $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ .

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{9(\Delta t)^2}{3(\Delta t)} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} = 0,$$

故

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = 0.$$

**【例 2.12】** 设  $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$  其中  $f(t)$  的三阶导数存在, 且  $f''(t) \neq 0$ ,

求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}$ .

**【解】**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(t) = \frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f''(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f''(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2} \cdot \frac{1}{f'(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.$$

### 题型三 求隐函数的导数或微分

**提示** 由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的函数  $y = y(x)$ , 称  $y$  是变量  $x$  的隐函数, 其导数  $\frac{dy}{dx}$  的求法有三种方法:

1° 方程两边对  $x$  求导, 要记住  $y$  是  $x$  的函数, 则  $y$  的函数是  $x$  的复合函数, 例如  $\frac{1}{y}, y^2,$

$\ln y, e^y$  等均是  $x$  的复合函数. 对  $x$  求导应按复合函数连锁法则做.

2° 公式法. 由  $F(x, y) = 0$ , 知

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

其中,  $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$  分别表示  $F(x, y)$  对  $x$  和  $y$  的偏导数.

3° 利用微分形式不变性, 在方程两边求微分, 然后解出  $\frac{dy}{dx}$ .

**【例 2.13】** 设方程  $xy^2 + e^y = \cos(x + y^2)$ , 求  $y'$ .

**【解法一】**  $y^2 + 2xyy' + e^yy' = -\sin(x + y^2) \cdot (1 + 2yy')$ ,

$$y' = -\frac{y^2 + \sin(x + y^2)}{2xy + e^y + 2y\sin(x + y^2)}.$$

**【解法二】** 令  $F(x, y) = xy^2 + e^y - \cos(x + y^2)$ .

因为  $F'_x = y^2 + \sin(x + y^2)$ ,  $F'_y = 2xy + e^y + 2y\sin(x + y^2)$ ,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y^2 + \sin(x + y^2)}{2xy + e^y + 2y\sin(x + y^2)}.$$

**【解法三】**  $d(xy^2 + e^y) = d[\cos(x + y^2)]$ ,

$$y^2 dx + 2xy dy + e^y dy = -\sin(x + y^2)(dx + 2y dy),$$

$$[2xy + e^y + 2y\sin(x + y^2)]dy = -[y^2 + \sin(x + y^2)]dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + \sin(x + y^2)}{2xy + e^y + 2y\sin(x + y^2)}.$$

**【例 2.14】** 设有方程  $2x - \tan(x - y) = \int_0^{x-y} \sec^2 t dt$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

**【解】** 方程两边对  $x$  求导, 可得

$$2 - \sec^2(x - y) \cdot (1 - y') = \sec^2(x - y) \cdot (1 - y')$$

$$1 - y' = \frac{1}{\sec^2(x - y)} \Rightarrow y' = 1 - \cos^2(x - y) = \sin^2(x - y).$$

$$\begin{aligned} y'' &= 2\sin(x - y)\cos(x - y) \cdot (1 - y') = 2\sin(x - y)\cos(x - y)\cos^2(x - y) \\ &= 2\sin(x - y)\cos^3(x - y). \end{aligned}$$

### 题型四 求幂指函数的导数或微分

**提示**  $y = u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0, u(x) \neq 1) \Rightarrow y = e^{v(x)\ln u(x)}.$

$$y' = e^{v(x)\ln u(x)} \left[ v'(x)\ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

$$= u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

【例 2.15】设  $y = x^{a^x} + a^{x^x} + x^{x^a}$ , 求  $y'$ .

【解】 $y = e^{a^x \ln x} + a^{e^{x \ln x}} + e^{x^a \ln x}$

$$\begin{aligned} y' &= e^{a^x \ln x} \left( a^x \ln x \cdot \ln a + a^x \cdot \frac{1}{x} \right) + a^{e^{x \ln x}} e^{x \ln x} (\ln x + 1) \cdot \ln a + e^{x^a \ln x} \left( a x^{a-1} \ln x + x^a \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^{a^x} a^x \left( \ln a \ln x + \frac{1}{x} \right) + a^{x^x} (\ln x + 1) x^x \cdot \ln a + x^{x^a-1} (a \ln x + 1). \end{aligned}$$

【例 2.16】设由方程  $x^y = y^x$  确定  $y$  是  $x$  的函数, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

【解】 $e^{y \ln x} = e^{x \ln y}$ , 两边同时对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} e^{y \ln x} \left( y' \ln x + y \frac{1}{x} \right) &= e^{x \ln y} \left( \ln y + x \frac{y'}{y} \right) \\ \Rightarrow x^y \left( y' \ln x + \frac{y}{x} \right) &= y^x \left( \ln y + \frac{x}{y} y' \right) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y(yx^y - xy^x \ln y)}{x(xy^x - yx^y \ln x)}. \end{aligned}$$

### 题型五 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分

【提示】一般用对数微分法(即先对式子的两边取自然对数, 然后在等式的两端再对  $x$  求导).

【例 2.17】设  $y = (x-2)^2 \sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}}$ , 求  $y'$ .

【解】先将表达式写成分式指数幂的形式.

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2 (x+3)^{\frac{2}{3}} (3-2x^2)^{\frac{4}{3}} (1+x^2)^{-\frac{1}{3}} \cdot (5-3x^3)^{-\frac{1}{3}}, \\ \ln y &= 2 \ln(x-2) + \frac{2}{3} \ln(x+3) + \frac{4}{3} \ln(3-2x^2) - \frac{1}{3} \ln(1+x^2) - \frac{1}{3} \ln(5-3x^3), \end{aligned}$$

上式两边对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{2}{x-2} + \frac{2}{3(x+3)} - \frac{16x}{3(3-2x^2)} - \frac{2x}{3(1+x^2)} + \frac{3x^2}{5-3x^3}, \\ y' &= (x-2)^2 \sqrt[3]{\frac{(x+3)^2(3-2x^2)^4}{(1+x^2)(5-3x^3)}} \cdot \left[ \frac{2}{x-2} + \frac{2}{3(x+3)} - \frac{16x}{3(3-2x^2)} - \frac{2x}{3(1+x^2)} + \frac{3x^2}{5-3x^3} \right]. \end{aligned}$$

### 题型六 求分段函数的导数或微分

【提示】各区间段内导数的求法与一般所讲的导数的求法无异, 要特别注意的是分界点处的导数一定要用导数的定义求.

【例 2.18】设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , 令  $F(x) = \begin{cases} \int_0^1 f(xt) dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\int_0^x \ln(1+2t) dt}{x}, & x < 0 \end{cases}$ .

求  $F'(0)$ .

$$\text{【解】} \int_0^1 f(xt) dt \stackrel{\text{令 } u=xt}{=} \int_0^x f(u) \frac{du}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du,$$

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{2x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x \ln(1+2t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1,$$

故  $F'(0) = 1$ .

**【例 2.19】** 设  $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 又函数  $f(x)$  可导, 求  $F(x) = f[\varphi(x)]$  的导数.

$$\text{【解】} F(x) = f[\varphi(x)] = \begin{cases} f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } F'(x) &= f'\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) \left[ 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= f'\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) \left( 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

因为分界点  $x = 0$  的两侧  $f(x)$  的表达式用同一形式表示, 所以分界点处的导数只用一种形式求即可.

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0} \cdot \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0} \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = f'(0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{故 } F'(x) = \begin{cases} f'\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) \left( 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

### 题型七 求高阶导数

#### 1. 直接法

所谓直接法, 是指求出所给函数的一 ~ 三阶或四阶导数后, 分析所得结果的规律性, 从而写出  $n$  阶导数的方法.

**【例 2.20】** 设  $y = e^x \cos x$ , 求  $y^{(n)}$ .

$$\text{【解】} y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x) = \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$



$$y'' = \sqrt{2} \left[ e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] = (\sqrt{2})^2 e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y''' = (\sqrt{2})^2 \left[ e^x \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - e^x \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] = (\sqrt{2})^3 e^x \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{4}\right),$$

⋮

$$y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{4}\right).$$

**【例 2.21】** 设函数  $x = f(y)$  的反函数  $y = f^{-1}(x)$  及  $f'[f^{-1}(x)]$ ,  $f''[f^{-1}(x)]$  均存在, 且

$$f'[f^{-1}(x)] \neq 0, \text{ 则 } \frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} =$$

$$(A) -\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}, \quad (B) \frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$$

$$(C) -\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}, \quad (D) \frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$$

【 】

**【解】** 因为  $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$ , 所以由反函数的导数公式有

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f^{-1}(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \right) = \frac{-\{f'[f^{-1}(x)]\}'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2} = \frac{-f''[f^{-1}(x)][f^{-1}(x)]'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2} \\ &= \frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2} \cdot \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3} \end{aligned}$$

所以选择(C).

**【例 2.22】** 设  $f(x)$  任意阶可导, 且  $f'(x) = e^{-f(x)}$ ,  $f(0) = 1$ . 求  $f^{(n)}(0)$ .

**【解】**  $f''(x) = -e^{-f(x)} f'(x) = -e^{-2f(x)},$

$$f'''(x) = 2e^{-2f(x)} f'(x) = 2e^{-3f(x)},$$

$$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2e^{-3f(x)} \cdot f'(x) = -3 \cdot 2e^{-4f(x)},$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! e^{-nf(x)},$$

$$\text{所以, } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! e^{-nf(0)} = (-1)^{n-1} (n-1)! e^{-n}.$$

## 2. 间接法

利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换, 泰勒级数等方法, 达到将给定的函数求出  $n$  阶导数的方法, 称之为间接法.

(1) 分式有理函数的高阶导数.

**提示** 先将有理假分式通过多项式除法化为整式与有理真分式之和, 再将有理真分式写成部分分式之和, 最后仿  $(x^m)^{(n)}$  的表达式写出所给定的有理函数的  $n$  阶导数.

**【例 2.23】** 设  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , 求  $y^{(n)}$ .

**【解】** 若  $c \neq 0$ , 用多项式除法, 可得

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bx-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bx-ad}{c^2} \left(x + \frac{d}{c}\right)^{-1} \quad \left(x \neq -\frac{d}{c}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{故 } y^{(n)} &= \frac{bc-ad}{c^2}(-1)(-2)\cdots(-1-n+1)\left(x+\frac{d}{c}\right)^{-1-n} \\ &= \frac{bc-ad}{c^2} \frac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n! c^{n-1}(bc-ad)}{(cx+d)^{n+1}}.\end{aligned}$$

【例 2.24】设  $y = \frac{x^3}{x^2-3x+2}$ , 求  $y^{(n)} (n \geq 2)$ .

$$\text{【解】 } y = (x+3) + \frac{7x-6}{(x-2)(x-1)} = x+3 + \frac{8}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= (x+3)^{(n)} + [8(x-2)^{-1}]^{(n)} - [(x-1)^{-1}]^{(n)} \\ &= 0 + (-1)^n \cdot 8 \cdot n! (x-2)^{-1-n} - (-1)^n n! (x-1)^{-1-n} \\ &= (-1)^n n! \left[ \frac{8}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right], \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

(2) 由  $\cos^\alpha x, \sin^\beta x$  ( $m, n, \alpha, \beta$  均为自然数) 的和、差、积所构成的函数的高阶导数

**提示** 利用三角函数中积化和差与倍角公式把函数的次数逐次降低, 最后变为  $\cos kx, \sin kx$  之

和、差形式, 再用公式  $\sin^{(n)} kx = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \cos^{(n)} kx = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$  将给定函数的  $n$  阶导数写出来.

【例 2.25】设  $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ , 求  $y^{(n)}$ .

$$\begin{aligned}\text{【解】 } y &= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \sin 2x = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4}(\sin 6x - \sin 2x) \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x).\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{4} \left[ 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + 4^n \sin\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) - 6^n \sin\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right) \right].$$

【例 2.26】设  $y = \sin^5 x + \cos^5 x$ , 求  $y^{(n)}$ .

$$\begin{aligned}\text{【解】 } y &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{8} \cdot 4^n \cdot \cos\left(4x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

(3) 利用函数的泰勒级数展开式, 求函数在一点处的高阶导数.

【例 2.27】设  $y = \arcsin x$ , 求  $y^{(n)}(0)$ .

$$\text{【解】 因为 } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n}, \quad |x| < 1$$

$$\text{所以 } y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1. \quad \textcircled{1}$$

但由麦克劳林级数知

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \textcircled{2}$$

对比 ① 与 ② 中  $x^n$  的系数, 得

$$y^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

$$y^{(2k+1)}(0) = f^{(2k+1)}(0) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k \cdot k! (2k+1)} (2k+1)!, k = 1, 2, \dots$$

【例 2.28】设  $f(x) = \arctan x$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

【解】因为  $y' = f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad |x| < 1,$$

$$\text{所以} \quad y = f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, \quad (3)$$

其中  $|x| < 1$ ,

又  $f(x)$  在  $x=0$  处的麦克劳林级数展开式为

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (4)$$

对比 (3), (4) 中  $x^n$  的系数, 得

$$f^{(2k)}(0) = 0,$$

$$f^{(2k+1)}(0) = (2k+1)! \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^k (2k)!, \text{ 其中, } k = 0, 1, 2, \dots$$

(4) 利用递推公式求  $n$  阶导数.

【例 2.29】设  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$ , 求  $y^{(n)}(0)$ .

【解】  $y' = \frac{x}{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2}$

$$\Rightarrow (1-x^2)y' - xy - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y''' - 5xy'' - 4y' = 0$$

$\vdots$

$$\Rightarrow (1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0.$$

显然, 当  $x=0$  时,  $y' = 1$ ,  $y'' = 0$ ,  $y''' = 4, \dots$

故  $y^{(2n)}(0) = 0, y^{(2n+1)}(0) = 4^n(n!)^2$ .

(5) 利用莱布尼茨公式求高阶导数

对于形式为  $G(x) = xf(x)$  或  $F(x) = x^2f(x)$  的函数, 经常用莱布尼茨公式求高阶导数.

此时:

$$G^{(n)}(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x),$$

$$F^{(n)}(x) = x^2f^{(n)}(x) + 2xC_n^1f^{(n-1)}(x) + 2C_n^2f^{(n-2)}(x).$$

【例 2.30】设  $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

【解】  $f'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}, f'(0) = 0,$

$$f''(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{2x}{1+x} + 2x \cdot \frac{1}{1+x} + x^2 \cdot \frac{(-1)}{(1+x)^2}, f''(0) = 0,$$

$$f^{(n)}(x) = x^2[\ln(1+x)]^{(n)} + 2nx[\ln(1+x)]^{(n-1)} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}[\ln(1+x)]^{(n-2)}$$

$$= x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1) \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}},$$

所以  $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! \quad (n \geq 3)$ .

### 第3节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 题设条件中出现  $f'_+(a)$  或  $f'_-(b)$  或  $f'(a)$  时,则“不管三七二十一”先写出该点的导数的定义,然后结合极限的保号性处理即可.

**【例 2.31】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ , 证明: 存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**【证】** 不妨设  $f'_+(a) > 0$ ,  $f'_-(b) < 0$ , 于是

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

由极限保号性知, 存在一个  $\delta_1 > 0$ , 当  $x \in (a, a + \delta_1)$  时, 恒有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a). \quad ①$$

同理,

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0,$$

由极限保号性知, 存在一个  $\delta_2 > 0$ , 当  $x \in (b - \delta_2, b)$  时, 恒有

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow f(x) > f(b). \quad ②$$

由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导知,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必存在最大值, 由 ①② 知, 最大值只能在  $(a, b)$  内取得.

令  $\xi \in (a, b)$ ,  $f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ , 又  $f(x)$  在  $x = \xi$  处可导, 故由费尔马定理知,  $f'(\xi) = 0$ .

#### 二、综合题解析

**【例 2.32】** 已知  $f(x)$  是周期为 5 的连续函数, 它在  $x = 0$  的某邻域内满足关系式  $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$ , 其中,  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow 0$  时比  $x$  高阶的无穷小, 且  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程.

**【分析】** 曲线  $y = f(x)$  在点  $[6, f(6)]$  处的切线方程为  $y - f(6) = f'(6)(x - 6)$ . 由周期性,  $f(6) = f(1)$ ,  $f'(6) = f'(1)$ , 故只需求  $f(1)$  与  $f'(1)$ . 又已知只给出  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 所以利用导数定义求  $f'(1)$ .

**【解】** 由连续性, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [8x + \alpha(x)],$$

即  $f(1) - 3f(1) = 0$ , 故  $f(1) = 0$ .

因此,  $f'(1) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u)}{u}$ . 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + a(x)}{\sin x},$$

即 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(1 + \sin x)}{\sin x} + \frac{3f(1 - \sin x)}{-\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + a(x)}{x},$$

也即 
$$f'(1) + 3f'(1) = 8, \text{ 故 } f'(1) = 2.$$

由周期性 
$$f'(6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 2.$$

所以, 要求的切线方程为  $y = 2(x - 6)$ .

**【例 2.33】** 设  $\rho = \rho(x)$  是抛物线  $y = \sqrt{x}$  上任一点  $M(x, y) (x \geq 1)$  处的曲率半径,  $s = s(x)$  是该抛物线上介于点  $A(1, 1)$  与  $M$  之间的弧长, 求  $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$  的值.

**【解】**

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

$$\rho = \rho(x) = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x + 1)^{\frac{3}{2}},$$

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx.$$

所以, 
$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(4x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d\rho}{ds} \right) \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x + 1}},$$

因此, 
$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}(4x + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{4x + 1}} - 36x = 9.$$

**【例 2.34】** 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}}$ , 求  $f(x)$  并讨论  $f(x)$  的连续性与可导性.

**【解】** 
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ \frac{a+b+1}{2}, & x = 1. \\ ax + b, & x < 1 \end{cases}$$

仅当  $f_-(1) = f_+(1) = f(1)$  时,  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续,

即 
$$a + b = 1 = \frac{1}{2}(a + b + 1) \quad (3)$$

因此, 当  $a + b = 1$  时,  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续, 显然  $f(x)$  在  $x \neq 1$  处连续, 故当  $a + b = 1$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

当  $f'_-(1) = f'_+(1)$  时,  $f(x)$  在  $x = 1$  处可微. 又注意到可微必连续, 于是

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{\text{由 (3)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = a,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{\text{由 (3)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

故仅当  $a = 2, b = -1$  时,  $f'_-(1) = f'_+(1)$ , 即  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 显然在  $x \neq 1$  处,  $f(x)$

也可导.

综上所述,当  $a = 2, b = -1$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导.

**【例 2.35】** 设函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  的某个邻域内有二阶导数,且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 0,$$

求: (1)  $f(0), f'(0)$  和  $f''(0)$  的值;

$$(2) \text{ 极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right].$$

**【分析】** (1) 由题设知,  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$  ( $f(x)$  在点  $x = 0$  的二阶泰

勒公式). 于是可由  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = 0$  计算  $f(0), f'(0)$  和  $f''(0)$  的值.

(2) 由上述  $f(x)$  的泰勒公式计算所给的极限.

**【解】** (1) 由题设知  $f(x)$  在点  $x = 0$  的充分小邻域内有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) \quad (f(x) \text{ 在点 } x = 0 \text{ 的二阶泰勒公式}),$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ 3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^4) \right] + \left[ f(0)x + f'(0)x^2 + \frac{1}{2}f''(0)x^3 + o(x^3) \right]}{x^3}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[3 + f(0)]x + f'(0)x^2 + \left[ -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}f''(0) \right]x^3 + o(x^3)}{x^3}. \end{aligned}$$

$$\text{于是有} \quad \begin{cases} 3 + f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}f''(0) = 0 \end{cases},$$

即  $f(0) = -3, f'(0) = 0, f''(0) = 9$ .

(2) 由(1)知在点  $x = 0$  的充分小邻域内有

$$f(x) = -3 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \left[ -3 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \right]}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

**1.** (2) 的极限也可如下方式计算:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{x^2} + \frac{f(x)}{x^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{3}{x^2} - \frac{\sin 3x}{x^3} \right) + \left[ \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{x^2} - \frac{\sin 3x}{x^3} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

## 习 题 二

## 1. 填空题.

(1)  $\frac{d}{dx} \int_x^0 x \cos t^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2)  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 则  $f^{(n)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设  $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 设函数  $y = y(x)$  由方程  $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 已知  $f(-x) = -f(x)$  且  $f'(-x_0) = k$ , 则  $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设  $f(x)$  可导, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0 - n\Delta x)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(7) 设  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{3} f'(x_0)$ , 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

(8) 已知  $\frac{d}{dx} \left[ f\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1}{x}$ , 则  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(9) 设  $f$  为可导函数,  $y = \sin\{f[\sin f(x)]\}$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 设函数  $y = f(x)$  由方程  $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$  所确定, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 1)$  处的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

## 2. 选择题.

(1) 设  $f(x)$  可导,  $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$ , 则  $f(0) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = 0$  处可导的

A. 充分必要条件.

B. 充分但非必要条件.

C. 必要但非充分条件.

D. 既非充分又非必要条件. 【 】

(2) 设  $f(x)$  是连续函数, 且  $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$ , 则  $F'(x)$  等于

A.  $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x).$

B.  $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x).$

C.  $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x).$

D.  $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x).$  【 】

(3) 已知函数  $f(x)$  具有任意阶导数, 且  $f'(x) = [f(x)]^2$ , 则当  $n$  为大于 2 的正整数时,  $f(x)$  的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x)$  是

A.  $n! [f(x)]^{n+1}.$

B.  $n [f(x)]^{n+1}.$

C.  $[f(x)]^{2n}.$

D.  $n! [f(x)]^{2n}.$  【 】

(4) 设函数对任意  $x$  均满足  $f(1+x) = af(x)$ , 且  $f'(0) = b$ , 其中  $a, b$  为非零常数, 则

A.  $f(x)$  在  $x = 1$  处不可导.

B.  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 且  $f'(1) = a.$

C.  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 且  $f'(1) = b.$

D.  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 且  $f'(1) = ab.$  【 】

(5) 设  $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$ , 则使  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶导数  $n$  为

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3. 【 】

(6) 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 当自变量  $x$  由  $x_0$  增加到  $x_0 + \Delta x$  时, 记  $\Delta y$  为  $f(x)$  的增量,  $dy$  为  $f(x)$  的微分,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$  等于

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D.  $\infty$ .

【 】

(7) 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处可导, 则

A.  $a = 1, b = 0$ .

B.  $a = 0, b$  为任意常数.

C.  $a = 0, b = 0$ .

D.  $a = 1, b$  为任意常数.

【 】

(8) 设  $f(0) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导的充要条件为

A.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$  存在.

B.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$  存在.

C.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh h)$  存在.

D.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$  存在. 【 】

(9) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 则

A. 当  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ .

B. 当  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

C. 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .

D. 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$  时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 【 】

(10) 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 则函数  $|f(x)|$  在  $x = a$  处不可导的充分条件是

A.  $f(a) = 0$  且  $f'(a) = 0$ .

B.  $f(a) = 0$  且  $f'(a) \neq 0$ .

C.  $f(a) > 0$  且  $f'(a) > 0$ .

D.  $f(a) < 0$  且  $f'(a) < 0$ . 【 】

### 3. 计算题.

(1)  $y = \ln[\cos(10 + 3x^2)]$ , 求  $y'$ .

(2) 已知  $f(u)$  可导,  $y = f[\ln(x + \sqrt{a + x^2})]$ , 求  $y'$ .

(3) 已知  $\int_0^y e^{t^2} dt = \int_0^{x^2} \cos t dt + \sin y^2$ , 求  $y'$ .

(4) 设  $y$  为  $x$  的函数是由方程  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$  确定的, 求  $y'$ .

(5) 已知  $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

(6) 设  $x = y^2 + y, u = (x^2 + x)^{3/2}$ , 求  $\frac{dy}{du}$ .

(7) 设函数  $f(x)$  二阶可导,  $f'(0) \neq 0$ , 且  $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$ .

(8) 设曲线  $x = x(t), y = y(t)$  由方程组  $\begin{cases} x = te^t \\ e^t + e^y = 2e \end{cases}$  确定, 求该曲线在  $t = 1$  处的曲率  $k$ .

4. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ , 其中  $g(x)$  有二阶连续导数, 且  $g(0) = 1$

(1) 确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  在  $x = 0$  点连续; (2) 求  $f'(x)$ .

5. 已知当  $x \leq 0$  时,  $f(x)$  有定义且二阶可导, 问  $a, b, c$  为何值时

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x > 0 \end{cases}$$



是二阶可导.

6. 已知  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

7. 设  $y = x \ln x$ , 求  $f^{(n)}(1)$ .

8. 证明  $y = (\arcsin x)^2$  满足方程

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} - (n-1)^2y^{(n-1)} = 0.$$

### 参 考 答 案

1. (1)  $\int_{x^2}^0 \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4$ . (2)  $\frac{(-1)^n 2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$ . (3)  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}$ .

(4)  $\frac{y \sin(xy) - e^{x+y}}{e^{x+y} - x \sin(xy)}$ . (5)  $f'(x_0) = k$ . (6)  $(m+n)f''(x_0)$ .

(7)  $k = \frac{1}{3}$ . (8)  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ .

(9)  $f'(x) \cos f(x) f'[\sin f(x)] \cdot \cos\{f[\sin f(x)]\}$ . (10)  $x - 2y + 2 = 0$ .

2. (1) A (2) A (3) A (4) D (5) C (6) B (7) C (8) B (9) D (10) B

3. (1)  $y' = -6x \tan(10 + 3x^2)$ . (2)  $y' = \frac{f'[\ln(x + \sqrt{a+x^2})]}{\sqrt{a+x^2}}$ .

(3)  $y' = \frac{2x \cos x^2}{e^{y^2} - 2y \cos y^2}$ . (4)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

(5)  $y'' = -\frac{2}{e^t (\cos t + \sin t)^3}$ . (6)  $y' = \frac{2}{3(2y+1)(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$ .

(7)  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 3$ ,  $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{9f'(0) + 6f''(0)}{[f'(0)]^2}$ .

(8)  $k = e(1 + 4e^2)^{-\frac{3}{2}}$ .

4. (1)  $a = g'(0)$ . (2)  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x[g'(x) + \sin x] - [g(x) - \cos x]}{x^2} & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}(g''(0) + 1), & x = 0. \end{cases}$

5.  $a = \frac{1}{2}f''(0)$ ,  $b = f'(0)$ ,  $c = f(0)$ .

6. 当  $n = 2k$  时,  $f^{(n)}(0) = n!$ ,  $n = 2k+1$  时,  $f^{(n)}(0) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ )

7.  $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-2}(n-2)!$ .

8. 提示: 先求  $y', y''$ , 得关系式:  $(1-x^2)y'' = 2 + xy'$ , 再两边求  $(n-1)$  阶导数, 利用莱布尼茨公式.

## 第三章 不定积分

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、不定积分的基本概念

##### 1. 原函数的定义

设函数  $f(x)$  在区间  $I$  中有定义, 如果存在函数  $F(x)$ , 使得对于区间  $I$  中任一个  $x$ , 均有

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  中的一个原函数.

如果函数  $f(x)$  有原函数  $F(x)$ , 则有无穷多个原函数, 且其全部原函数可表示为

$$F(x) + C \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数}).$$

##### 2. 不定积分

函数  $f(x)$  在区间  $I$  中的原函数的全体, 称为  $f(x)$  在区间  $I$  中的不定积分, 记为  $\int f(x)dx$ .

设  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  中的一个原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

其中,  $f(x)$  为被积函数;  $f(x)dx$  为被积表达式;  $x$  为积分变量;  $C$  为积分常数

- (1) 不定积分和原函数是两个不同的概念, 前者是个集合, 后者是该集合中的一个元素, 因此

$$\int f(x)dx \neq F(x).$$

(2) 设  $F(x), G(x)$  均是  $f(x)$  在区间  $I$  中的原函数, 显然有  $\int f(x)dx = F(x) + C$ ,

$$\int f(x)dx = G(x) + C, \text{ 即有 } F(x) + C = G(x) + C, \quad \text{①}$$

但  $F(x) = G(x)$  不一定成立 (因为  $C$  是任意取值, ① 式两边的  $C$  不一定相等, 所以不能随意去掉).

#### 二、基本性质

$$(1) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx, (k \neq 0 \text{ 为常数});$$

$$(2) \int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_k(x)]dx \\ = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int f_k(x)dx;$$

$$(3) \left[ \int f(x) dx \right]' = f(x) \quad \text{或} \quad d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$(4) \int F'(x) dx = F(x) + C \quad \text{或} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

### 三、基本公式

$$(1) \int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C \quad (k \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$(3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$(4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(5) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(6) \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$(7) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(8) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$(9) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$(11) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

以上公式把  $x$  换成  $u$  仍然成立,  $u$  是以  $x$  为自变量的函数.

**【例 3.1】** 若  $f(x)$  的导函数是  $\sin x$ , 则  $f(x)$  的一个原函数为

(A)  $1 + \sin x$ .

(B)  $1 - \sin x$ .

(C)  $1 + \cos x$ .

(D)  $1 - \cos x$ .

**【解】** 因为  $f'(x) = \sin x$ , 所以  $f(x) = -\cos x + C$ .

取

$$f(x) = -\cos x,$$

于是

$$\int f(x) dx = \int (-\cos x) dx = -\sin x + \tilde{C}.$$

令  $\tilde{C} = 1$ , 则得  $f(x)$  的一个原函数为  $1 - \sin x$ , 故选择 (B).

【例 3.2】设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 记  $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$ , 则  $F(x) =$

$$(A) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{1}{2}x^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$(B) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{1}{2}x^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$(C) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$(D) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

【解】当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ .

当  $1 < x \leq 2$  时,  $F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^x (2-x) dx = -\frac{7}{6} + 2x - \frac{1}{2}x^2$ .

故 
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{1}{2}x^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

因此选择(B).

【另解】也可以从连续函数的原函数也连续的特性去分析处理.

#### 四、基本积分法

##### (一) 第一换元积分法(也称凑微分法)

设 
$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

则 
$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx &= \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) \xrightarrow{\text{令 } u = \varphi(x)} \int f(u) du \\ &= F(u) + C \xrightarrow{u = \varphi(x)} F[\varphi(x)] + C. \end{aligned}$$

● (1) 由  $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x)$ , 这一步是凑微分的过程, 所以第一换元法也称凑微分法.

(2) 运算熟练后不必再设中间变量  $u = \varphi(x)$ .

(3) 凑微分法是非常重要的积分法, 要运用自如, 务必熟记基本积分表, 并掌握常见的凑微分形式及“凑”的一些技巧.

常见的几种凑微分的形式

$$(1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b)$$

$$(2) \int f(ax^n+b) x^{n-1} dx = \frac{1}{na} \int f(ax^n+b) d(ax^n+b)$$

$$(3) \int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x)$$

$$(4) \int f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} = - \int f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(5) \int f(\ln x) \frac{dx}{x} = \int f(\ln x) d(\ln x)$$

$$(6) \int f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x})$$

$$(7) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$$

$$(8) \int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d(\cos x)$$

$$(9) \int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$$

$$(10) \int f(\cot x) \csc^2 x dx = - \int f(\cot x) d(\cot x)$$

$$(11) \int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$$

$$(12) \int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$$

**【例 3.3】** 设  $\int f(x) dx = x^2 + C$ , 则  $\int xf(1-x^2) dx$  为

$$(A) -2(1-x^2)^2 + C.$$

$$(B) 2(1-x^2)^2 + C.$$

$$(C) -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$$

$$(D) \frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$$

【 】

**【解】**  $\int xf(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$

故选择(C).

**【例 3.4】** 求下列各式的不定积分.

$$(1) \int e^{e^x+x} dx; \quad (2) \int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx;$$

$$(3) \int x(1+x^2)^{100} dx; \quad (4) \int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2} dx;$$

$$(5) \int \frac{\cot \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta; \quad (6) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

**【解】** (1)  $\int e^{e^x+x} dx = \int e^{e^x} d(e^x) = e^{e^x} + C.$

$$(2) \int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = - \int \cos \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin \frac{1}{x} + C.$$

$$(3) \int x(1+x^2)^{100} dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{100} d(1+x^2) = \frac{1}{202} (1+x^2)^{101} + C.$$

$$(4) \int \frac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int (1+2\arctan x)^{\frac{1}{2}} d(1+2\arctan x)$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 2\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$(5) \int \frac{\cot \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(\sin \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \int \frac{d(\sin \theta)}{(\sin \theta)^{\frac{3}{2}}} = -2(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} + C.$$

$$(6) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2} d(\arcsin x) = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$$

可以将常见的凑微分的 12 个公式进一步推广, 即当  $f(u)$  分别取  $u^a, a^u, \sin u, \cos u, \sec^2 u, \csc^2 u, \tan u, \cot u, \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \frac{1}{1+u^2}$  等形式, 而  $u = \varphi(x)$  分别取  $ax+b, ax^b, e^x, \ln x, \sin x, \cos x, \arctan x, \arcsin x, \tan x, \cot x$  等函数时, 也仍然成立.

**【例 3.5】** 求下列各式的不定积分.

$$(1) \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx; \quad (2) \int (x-1)e^{x^2-2x} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}; \quad (4) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx; \quad (6) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

**【解】** (1)  $\int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx = \int \frac{d(1 + \sin x \cos x)}{1 + \sin x \cos x} = \ln |1 + \sin x \cos x| + C.$

$$(2) \int (x-1)e^{x^2-2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2-2x} d(x^2-2x) = \frac{1}{2} e^{x^2-2x} + C.$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\right)\cos^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{2 + \tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\sin x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx \\ &= \sec x - \tan x + x + C. \end{aligned}$$

$$(5) \int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx = -\int \frac{d(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)^5} = \frac{1}{4} (\cos x + \sin x)^{-4} + C.$$

$$(6) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

### 复杂积分式的凑微分法

**提示** 将被积式  $g(x)dx$  写成  $f(x)\varphi(x)dx$  或  $\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$ , 其中  $f(x)$  较  $\varphi(x)$  复杂. 对  $f(x)$  或构成  $f(x)$  的主要部分求导, 若其导数为  $\varphi(x)$  的常数倍, 则  $\varphi(x)dx = kdf(x)$  或  $\varphi(x)dx = kdf_*(x)$ , 其中  $k$  为常数,  $f_*(x)$  为  $f(x)$  的主要部分.

**【例 3.6】** 计算下列积分:

$$(1) \int \sqrt{(x^2+x)e^x} (x^2+3x+1)e^x dx; \quad (2) \int (x \ln x)^{\frac{3}{2}} (\ln x + 1) dx;$$

$$(3) \int e^{e^x \cos x} (\cos x - \sin x) e^x dx; \quad (4) \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5}}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(6) \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}, \quad b \neq a.$$

【解】(1) 因为  $[(x^2 + x)e^x]' = (2x + 1)e^x + (x^2 + x)e^x = (x^2 + 3x + 1)e^x$ ,

$$\text{所以原式} = \int \sqrt{(x^2 + x)e^x} d[(x^2 + x)e^x] = \frac{2}{3} [(x^2 + x)e^x]^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$(2) \text{ 因为 } (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$\text{所以原式} = \int (x \ln x)^{\frac{3}{2}} d(x \ln x) = \frac{2}{5} (x \ln x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$(3) \text{ 因为 } (e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x),$$

$$\text{所以原式} = \int e^{e^x \cos x} d(e^x \cos x) = e^{e^x \cos x} + C.$$

$$(4) \text{ 因为 } \left( \arctan \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{x} \right)^2} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{1 + x^2},$$

$$\text{所以原式} = - \int \arctan \frac{1}{x} d \left( \arctan \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2} \left( \arctan \frac{1}{x} \right)^2 + C.$$

$$(5) \text{ 因为 } [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{所以原式} &= \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5} d[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5] \\ &= \frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5]^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$(6) \text{ 因为 } (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)' = a^2 \cdot 2 \cos x (-\sin x) + b^2 \cdot 2 \sin x \cos x = (b^2 - a^2) \sin 2x,$$

$$\text{所以原式} = \frac{1}{b^2 - a^2} \int \frac{d(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} = \frac{2}{b^2 - a^2} \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + C.$$

【例 3.7】计算下列积分.

$$(1) \int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + \cos x e^{\sin x})} dx;$$

$$(2) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{\ln x + 2}{x \ln x (1 + x \ln^2 x)} dx;$$

$$(4) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

提示 分子分母同乘(或除)以一个因子,再仿前法凑(或凑其中一部分形式).

【解】(1) 因为  $(\cos x e^{\sin x})' = -\sin x e^{\sin x} + \cos x e^{\sin x} = (\cos x - \sin x) e^{\sin x}$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{(\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}}{\cos x e^{\sin x} (1 + \cos x e^{\sin x})} dx = \int \frac{d(\cos x e^{\sin x})}{\cos x e^{\sin x} (1 + \cos x e^{\sin x})} \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos x e^{\sin x}} - \frac{1}{\cos x e^{\sin x} + 1} \right) d(\cos x e^{\sin x}) = \ln \left| \frac{\cos x e^{\sin x}}{1 + \cos x e^{\sin x}} \right| + C. \end{aligned}$$

(2) 原被积式的分子分母同除以  $x^2$ , 得

$$\int \frac{\frac{1 - \ln x}{x^2}}{\left( \frac{x - \ln x}{x} \right)^2} dx = - \int \frac{1}{\left( \frac{x - \ln x}{x} \right)^2} d \left( \frac{x - \ln x}{x} \right) = \frac{1}{\frac{x - \ln x}{x}} + C = \frac{x}{x - \ln x} + C.$$

$$(3) \text{ 因为 } (x \ln^2 x)' = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2),$$

所以只要分子分母同乘以  $\ln x$ , 便有

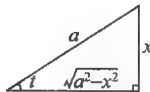
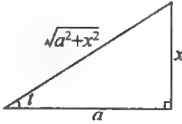
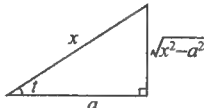
$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{d(x \ln^2 x)}{x \ln^2 x (1 + x \ln^2 x)} = \int \left( \frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{1}{1 + x \ln^2 x} \right) d(x \ln^2 x) \\ &= \ln |x \ln^2 x| - \ln |1 + x \ln^2 x| + C.\end{aligned}$$

(4) 原被积分式的分子分母同除以  $x^2$ , 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left[ \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right] + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} \right) + C.\end{aligned}$$

## (二) 第二换元积分法

### 1. 利用三角函数代换, 变根式积分为三角有理式积分

被积函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	

**注意** 记住三角形示意图可为变量还原提供方便。

**【例 3.8】** 求下列不定积分。

$$(1) \int \frac{x dx}{(x^2 + 1) \sqrt{1 - x^2}};$$

$$(2) \int \frac{x^3 dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(3) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx; \quad (a > 0)$$

$$(4) \int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx;$$

$$(6) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

**【解】** (1) 因为被积函数  $f(x)$  中含有  $\sqrt{1 - x^2}$ ,

所以应作变换  $x = \sin t, dx = \cos t dt$ ,

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\sin t \cos t}{(\sin^2 t + 1) \cos t} dt = - \int \frac{d(\cos t)}{2 - \cos^2 t} \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{1}{\sqrt{2} - \cos t} + \frac{1}{\sqrt{2} + \cos t} \right) d(\cos t)\end{aligned}$$



$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-x^2}} \right| + C.$$

(2) 因为被积函数  $f(x)$  中含有  $\sqrt{1+x^2}$ , 所以应作变换  $x = \tan t$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\tan^3 t}{\sec^3 t} \cdot \sec^2 t dt = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} dt = - \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} d(\cos t) \\ &= \int \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 t} \right) d(\cos t) = \cos t + \frac{1}{\cos t} + C = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

(3) 因为被积函数  $f(x)$  中含有  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , 所以应作变换  $x = a \sec t$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{a \tan t}{a^4 \sec^4 t} \cdot a \sec t \cdot \tan t dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{a^2} \int \sin^2 t d(\sin t) \\ &= \frac{1}{3a^2} \sin^3 t + C = \frac{1}{3a^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \right)^3 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &\stackrel{\text{令 } x = \tan t}{=} \int \frac{\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2} \sec^2 t dt \\ &= \int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

(5) 令  $x = 3 \sec t$ , 则  $dx = 3 \sec t \cdot \tan t dt$ , 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \tan t}{9 \sec^2 t} 3 \sec t \cdot \tan t dt \\ &= \int \frac{\tan^2 t}{\sec t} dt = \int (\sec t - \cos t) dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| - \sin t + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} + C_1 \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}| - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 9} + \tilde{C}. \end{aligned}$$

(6) 令  $x = \sin t$ , 则  $dx = \cos t dt$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int \frac{\cos t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t} d(\sin t) - \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt \\ &= -\frac{1}{\sin t} + \cot t + t + C = -\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + C. \end{aligned}$$

## 2. 倒代换 (即令 $x = \frac{1}{t}$ )

**提示** 设  $m, n$  分别为被积函数的分子、分母关于  $x$  的最高次数, 当  $n - m > 1$  时, 用倒代换可望成功.

**【例 3.9】** 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}} (a > 0); \quad (2) \int \frac{dx}{x(x^7 + 2)};$$

$$(3) \int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(4) \int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx.$$

【解】(1) 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , 于是

$$\text{原式} = \int t^2 \frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2} dt\right) = -\int \frac{t dt}{\sqrt{a^2 t^2 + 1}}$$

$$= -\frac{1}{a^2} \int \frac{d(a^2 t^2 + 1)}{2 \sqrt{a^2 t^2 + 1}} = -\frac{\sqrt{a^2 t^2 + 1}}{a^2} + C \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C.$$

$$(2) \text{原式} \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7 + 2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= -\int \frac{t^6}{1 + 2t^7} dt = -\frac{1}{14} \int \frac{1}{1 + 2t^7} d(1 + 2t^7)$$

$$= -\frac{1}{14} \ln |1 + 2t^7| + C = -\frac{1}{14} \ln |2 + x^7| + \frac{1}{2} \ln |x| + C.$$

$$(3) \text{原式} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} \stackrel{\text{令 } x + \frac{1}{2} = \frac{1}{t}}{=} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= -\int \frac{t dt}{\left(1 + \frac{3}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3} \int \frac{d\left(\frac{3}{4}t^2 + 1\right)}{\left(1 + \frac{3}{4}t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{3}{4}t^2\right)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}} + C.$$

$$(4) \int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{t}}{=} \int \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} \left(-\frac{1}{t^2} dt\right)$$

$$= -\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int \frac{t}{2\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= -\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C.$$

### 3. 指数代换 (适用于被积函数 $f(x)$ 由 $a^x$ 所构成的代数式)

**提示** 令  $a^x = t$ ,  $dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dt}{t}$ .

【例 3.10】求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{2^x dx}{1 + 2^x + 4^x};$$

$$(2) \int \frac{dx}{e^x (1 + e^{2x})};$$

$$(3) \int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}};$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}.$$

【解】(1) 令  $2^x = t$ ,  $dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{dt}{t}$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{t}{1+t+t^2} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \ln 2} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3} \ln 2} \arctan \frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

(2) 令  $e^x = t$ ,  $dx = \frac{dt}{t}$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{t(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{t} = \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{t} - \arctan t + C = -e^{-x} - \arctan(e^x) + C. \end{aligned}$$

(3) 令  $e^{\frac{x}{3}} = t$ ,  $x = 3 \ln t$ ,  $dx = \frac{3}{t} dt$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{1+t^3+t^2+t} \cdot \frac{3}{t} dt = \int \left( \frac{6}{t} - \frac{3}{1+t} - \frac{3t+3}{1+t^2} \right) dt \\ &= 6 \ln t - 3 \ln(1+t) - \frac{3}{2} \ln(1+t^2) - 3 \arctan t + C \\ &= x - 3 \ln(1+e^{\frac{x}{3}}) - \frac{3}{2} \ln(1+e^{\frac{2x}{3}}) - 3 \arctan(e^{\frac{x}{3}}) + C. \end{aligned}$$

(4) 令  $e^x = t$ ,  $x = \ln t$ ,  $dx = \frac{1}{t} dt$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2} dt. \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2} dt &\stackrel{\text{令 } \sqrt{1+t}=u}{=} \int \frac{u}{(u^2-1)^2} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2-1+1}{(u^2-1)^2} du \\ &= 2 \int \frac{du}{u^2-1} + 2 \int \frac{du}{(u^2-1)^2} \\ &= 2 \int \frac{du}{u^2-1} + \frac{1}{2} \int \left[ -\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u+1)^2} \right] du \\ &= -\ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| - \frac{1}{2} \ln |u-1| - \frac{1}{2(u-1)} + \\ &\quad \frac{1}{2} \ln |u+1| - \frac{1}{2(u+1)} + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| - \frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x} + C_1. \end{aligned} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2} dt &\stackrel{\text{令 } \sqrt{1-t}=v}{=} \int \frac{-2v^2 dv}{(1-v^2)^2} = -2 \int \frac{v^2}{(v^2-1)^2} dv \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| - \frac{\sqrt{1-e^x}}{e^x} + C_2. \end{aligned} \quad (4)$$

将③,④代入②得

$$\text{原式} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| - \frac{\sqrt{1+e^x}}{2e^x} - \frac{\sqrt{1-e^x}}{2e^x} + C.$$

### (三) 分部积分法

设  $u = u(x), v = v(x)$  具有连续的导数, 则公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

称为分部积分公式.

关键: 如果把被积函数分成两部分, 如何选取  $u$  和  $dv$ .

选取的原则: (1) 积分容易者选为  $dv$ ; (2) 求导简单者选为  $u$ .

在二者不可兼得的情况下, 首先要保证的是前者.

可用分部积分法求积分的类型:

1.  $\int P_n(x)e^{kx} dx, \int P_n(x)\sin ax dx, \int P_n(x)\cos ax dx$ , 其中  $k, a$  为常数,  $P_n(x)$  为  $n$  次多项式

选取:  $u(x) = P_n(x), dv = e^{kx} dx$  (或  $\sin ax dx, \cos ax dx$ ).

**【例 3.11】** 求下列不定积分.

$$(1) \int (x^2 + 1)e^{2x} dx; \quad (2) \int (x^3 + 2x + 5)\cos 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】}(1) \text{ 原式} &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int 2xe^{2x} dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{2x} - \int xe^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{1}{2}(x^3 + 2x + 5)\sin 2x - \frac{1}{2} \int (3x^2 + 2)\sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}(x^3 + 2x + 5)\sin 2x + \frac{1}{4}(3x^2 + 2)\cos 2x - \frac{3}{2} \int x\cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2}(x^3 + 2x + 5)\sin 2x + \frac{1}{4}(3x^2 + 2)\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C. \end{aligned}$$

由以上可看出, 这种类型的积分可反复利用分部积分公式进行下去, 但较繁且易错, 以下介绍一个分部积分法的推广公式.

设  $u = u(x), v = v(x)$  有  $n+1$  阶连续导数, 则

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - u'''v^{(n-3)} + \cdots + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx.$$

**【证】** 当  $n=0$  时,  $\int uv' dx = uv - \int vu' dx$ ,

$$\text{当 } n \geq 1 \text{ 时, } \int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)} dx,$$

$$\int u'v^{(n)} dx = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)} dx,$$

$$\int u'' v^{(n-1)} dx = u' v^{(n-2)} - \int u''' v^{(n-2)} dx$$

$$\vdots$$

$$\int u^{(n)} v' dx = u^{(n)} v - \int u^{(n+1)} v dx$$

由下往上依次代入,即可证得推广的分部积分公式.

用表格法表示推广公式如下:

$u$ 的各阶导数	$u$ $\oplus$ $u'$ $\ominus$ $u''$ $\oplus$ $u'''$ $\ominus$ $\dots$ $u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$ 的各阶原函数	$v^{(n+1)}$ $v^{(n)}$ $v^{(n-1)}$ $v^{(n-2)}$ $\dots$ $v$

计算规则:

- 1° 推广公式的各项(不包括符号)为从左到右下错位相乘,最后一项为  $\int u^{(n+1)} v dx$ ;
- 2° 各项符号为“+”“-”相间,最后一项符号为  $(-1)^{n+1}$ ;
- 3° 当表格中同一列的两个函数乘积等于所给被积函数的常数倍时,求导和求原函数工作不再进行,用解方程的方法即可求得积分.当被积函数中有一个因子为对数或反三角函数时,须做变量替换把它换成指数或三角函数时才能使用表格法.

**注** 当  $P_n(x)$  的次数较高时,用表格法相当方便.

**【例 3.12】** 求下列不定积分.

$$(1) \int (x^5 + 3x^2 - 2x + 5) \cos x dx; \quad (2) \int (x^4 - 2x^3 - 1) e^{2x} dx.$$

**【解】** (1) 设  $u = x^5 + 3x^2 - 2x + 5$ ,  $v^{(n+1)} = \cos x$ , 用表格表示如下:

$x^5+3x^2+2x+5$	$\oplus$	$5x^4+6x-2$	$\ominus$	$20x^3+6$	$\oplus$	$60x^2$	$\ominus$	$120x$	$\oplus$	$120$	$\ominus$	$0$
$\cos x$		$\sin x$		$-\cos x$		$-\sin x$		$\cos x$		$\sin x$		$-\cos x$

原式 =  $(x^5 + 3x^2 - 2x + 5) \sin x + (5x^4 + 6x - 2) \cos x - (20x^3 + 6) \sin x - 60x^2 \cos x + 120x \sin x + 120 \cos x + C$ .

(2) 令  $u = x^4 - 2x^3 - 1$ ,  $v^{(n+1)} = e^{2x}$ , 用表格表示如下:

$x^4-2x^3-1$	$\oplus$	$4x^3-6x^2$	$\ominus$	$12x^2-12x$	$\oplus$	$24x-12$	$\ominus$	$24$	$\oplus$	$0$
$e^{2x}$		$\frac{1}{2}e^{2x}$		$\frac{1}{4}e^{2x}$		$\frac{1}{8}e^{2x}$		$\frac{1}{16}e^{2x}$		$\frac{1}{32}e^{2x}$

原式 =  $\left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2} - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) e^{2x} + C$

=  $\left( \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \right) e^{2x} + C$

2.  $\int e^{kx} \sin(ax+b) dx$ ,  $\int e^{kx} \cos(ax+b) dx$ , 其中  $k, a, b$  均为常数

$u(x)$ ,  $dv(x)$  的选取可随意,用表格法计算也相当方便,例如  $\int e^{kx} \sin(ax+b) dx$  的计算如下:

$\sin(ax+b)$	$\oplus$	$a \cos(ax+b) - a^2 \sin(ax+b)$
$e^{kx}$		$\frac{1}{k} e^{kx}$ $\ominus$ $\frac{1}{k^2} e^{kx}$ $\oplus$

$$\begin{aligned}\int e^{kx} \sin(ax+b) dx &= \frac{1}{k} e^{kx} \sin(ax+b) - \frac{a}{k^2} e^{kx} \cos(ax+b) - \frac{a^2}{k^2} \int e^{kx} \sin(ax+b) dx \\ \Rightarrow \frac{a^2+k^2}{k^2} \int e^{kx} \sin(ax+b) dx &= \frac{k \sin(ax+b) - a \cos(ax+b)}{k^2} e^{kx} + C \\ \text{所以 } \int e^{kx} \sin(ax+b) dx &= \frac{k \sin(ax+b) - a \cos(ax+b)}{k^2+a^2} e^{kx} + C.\end{aligned}$$

$$3. \int P_n(x) \ln(x) dx, \int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arctan x dx$$

选取:  $u(x) = \ln x, \arcsin x, \arctan x$ ;  $dv(x) = P_n(x) dx$ .

利用  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

可把  $\int P_n(x) \arccos x dx, \int P_n(x) \operatorname{arccot} x dx$

化为  $\int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arctan x dx$

的积分.

**提示** 当  $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x$  的次数高于 1 时, 最好作变量替换化为指数函数、三角函数, 然后再用表格法计算部分积分, 最后还原变量.

**【例 3.13】** 求下列不定积分:

$$(1) \int x^2 \arccos x dx; \quad (2) \int x (\arcsin x)^2 dx;$$

$$(3) \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1); \quad (4) \int x^3 (\ln x)^4 dx.$$

**【解】** (1) 原式  $= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \int \frac{1}{3} x^3 \left( -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} d(x^2)$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \sqrt{1-x^2} d(x^2) + \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + C.$$

(2) 令  $\arcsin x = u, x = \sin u, dx = \cos u du,$

于是 原式  $= \int \sin u \cdot u^2 \cos u du = \frac{1}{2} \int u^2 \sin 2u du$

$u^2$	$2u$	$2$	$0$
$\sin 2u$	$-\frac{1}{2} \cos 2u$	$-\frac{1}{4} \sin 2u$	$\frac{1}{8} \cos 2u$

故原式  $= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} u^2 \cos 2u + \frac{1}{2} u \sin 2u + \frac{1}{4} \cos 2u \right) + C$

$$= -\frac{1}{4} u^2 (\cos^2 u - \sin^2 u) + \frac{1}{4} u (2 \sin u \cos u) + \frac{1}{8} (\cos^2 u - \sin^2 u) + C$$

$$= -\frac{1}{4} (\arcsin x)^2 \cdot (1-2x^2) + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x + \frac{1}{8} (1-2x^2) + C.$$

(3) 原式  $= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C.$

(4) 令  $\ln x = u, x = e^u, dx = e^u du$

$$\text{原式} = \int e^{3u} \cdot u^4 e^u du = \int u^4 e^{4u} du$$

$$\begin{array}{ccccccc} u^4 & & 4u^3 & & 12u^2 & & 24u & & 24 & & 0 \\ \oplus & & \ominus & & \oplus & & \ominus & & \oplus & & \\ e^{4u} & & \frac{1}{4}e^{4u} & & \frac{1}{16}e^{4u} & & \frac{1}{64}e^{4u} & & \frac{1}{256}e^{4u} & & \frac{1}{1024}e^{4u} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left( \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{16}u^2 - \frac{3}{32}u + \frac{3}{128} \right) e^{4u} + C \\ &= \frac{1}{4} \left( \ln^4 x - \ln^3 x + \frac{3}{4} \ln^2 x - \frac{3}{8} \ln x + \frac{3}{32} \right) x^4 + C. \end{aligned}$$

#### 4. 递推公式

不定积分中的递推公式的推导,一般多用分部积分法求解.

**【例 3.14】**建立下列不定积分的递推公式:

$$(1) I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx; \quad (2) I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{1+x^2}} dx, \quad (n \geqslant 2)$$

$$(3) I_n = \int \sec^n x dx; \quad (4) I_n = \int \tan^n x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n \right]$$

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right].$$

$$\begin{aligned} (2) I_n &= \int \frac{x}{x^{n+1} \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} - \int \sqrt{1+x^2} [-(n+1)] x^{-(n+2)} dx \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{1+x^2}{x^{n+2} \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)I_{n+2} + (n+1)I_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = -\frac{1}{n+1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} - \frac{n}{n+1} I_n$$

$$I_n = \frac{1}{1-n} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

$$(3) I_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx = \sec^{n-2} x \tan x - \int (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \tan x dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow I_n = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

$$(4) I_n = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
 &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}.
 \end{aligned}$$

【例 3.15】求下列不定积分：

$$\begin{aligned}
 (1) & \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx; & (2) & \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx; & (3) & \int \sin(\ln x) dx; \\
 (4) & \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx; & (5) & \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx; & (6) & \int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx.
 \end{aligned}$$

【解】(1)  $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{x}{\sin^3 x} d(\sin x) = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx &= \int \frac{1 + \sin x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int \tan \frac{x}{2} e^x dx \\
 &= \int \frac{e^x}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) + \int \tan \frac{x}{2} e^x dx \\
 &= \tan \frac{x}{2} e^x - \int \tan \frac{x}{2} e^x dx + \int \tan \frac{x}{2} e^x dx = e^x \tan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\
 &= x \sin(\ln x) - \left\{ x \cos(\ln x) - \int x \left[ -\sin(\ln x) \frac{1}{x} \right] dx \right\} \\
 &= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx
 \end{aligned}$$

故  $\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] x + C.$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx &= -\frac{1}{x+2} (x+1)e^x + \int \frac{1}{x+2} [(x+1)e^x]' dx \\
 &= -\frac{1}{x+2} (x+1)e^x + \int e^x dx = \frac{e^x}{x+2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2} (x^2 e^x)' dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2} x(x+2) e^x dx \\
 &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - e^x + C = \frac{x-2}{x+2} e^x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x} dx &= -e^{-x} \operatorname{arccot} e^x + \int e^{-x} \left( -\frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) dx \\
 &= -e^{-x} \operatorname{arccot} e^x - \int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} d(e^x) = -e^{-x} \operatorname{arccot} e^x - \int \left( \frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) d(e^x) \\
 &= -e^{-x} \operatorname{arccot} e^x - \ln e^x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C \\
 &= -e^x \operatorname{arccot} e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C.
 \end{aligned}$$



## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

## 题型一 有理函数的不定积分

**提示** 有理函数的积分总可化为整式和如下四种类型的积分:

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{A}{x-a} dx &= A \ln |x-a| + C \\
 (2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx &= -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1) \\
 (3) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} &= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^n} \stackrel{\substack{\text{令 } x+\frac{p}{2}=u \\ \text{则 } \frac{4q-p^2}{4}=a^2}}{\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}} \\
 (4) \int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^n} dx &= -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(a-\frac{p}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \\
 &\text{其中 } p^2-4q < 0
 \end{aligned}$$

这就是说,有理函数积分从理论上讲总可以“积”出来,但过分的墨守成规将会造成很大的运算困难. 因此遇到有理函数积分的试题,最好先分析被积函数的特点,灵活选择解法,常用的方法中有凑微分法和变量替换法.

**【例 3.16】** 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{x(2+x^{10})}; \quad (2) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx; \quad (3) \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx.$$

**【解】** (1) 
$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x(2+x^{10})} &= \int \frac{x^9 dx}{x^{10}(2+x^{10})} = \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10})}{x^{10}(2+x^{10})} \\
 &= \frac{1}{20} \int \left( \frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{2+x^{10}} \right) d(x^{10}) = \frac{1}{20} [\ln x^{10} - \ln(x^{10}+2)] + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{20} \ln(x^{10}+2) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx &= \int \frac{(1-x^7)x^6}{x^7(1+x^7)} dx = \frac{1}{7} \int \frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)} d(x^7) \\
 &= \frac{1}{7} \int \left( \frac{1}{x^7} - \frac{2}{1+x^7} \right) d(x^7) = \ln |x| - \frac{2}{7} \ln |1+x^7| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx &= \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \int \frac{x^n}{1+x^n} d(x^n) \\
 &= \frac{1}{n} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^n} \right) d(x^n) = \frac{1}{n} (x^n - \ln |x^n+1|) + C.
 \end{aligned}$$

**【例 3.17】** 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{2x^3+1}{(x-1)^{100}} dx; \quad (2) \int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^4+2}; \quad (3) \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}; \quad (4) \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx.$$

**【解】** (1) 令  $x-1 = \frac{1}{u}$ , 则  $dx = -\frac{1}{u^2} du$ , 于是

$$\text{原式} = \int u^{100} \left[ 2 \left( \frac{u+1}{u} \right)^3 + 1 \right] \left( -\frac{1}{u^2} \right) du = - \int u^{95} (3u^3 + 6u^2 + 6u + 2) du$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{33}u^{99} - \frac{3}{49}u^{98} - \frac{6}{97}u^{97} - \frac{1}{48}u^{96} + C \\
 &= -\frac{1}{33} \frac{1}{(x-1)^{99}} - \frac{3}{49(x-1)^{98}} - \frac{6}{97(x-1)^{97}} - \frac{1}{48(x-1)^{96}} + C.
 \end{aligned}$$

(2) 令  $x^4 = u$ , 则  $du = 4x^3 dx$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{4} \int \frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} du = \frac{1}{4} \int \left( 1 + \frac{1}{u+1} - \frac{4}{u+2} \right) du \\
 &= \frac{1}{4} (u + \ln |u+1| - 4 \ln |u+2|) + C \\
 &= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x^4) - \ln(x^4+2) + C.
 \end{aligned}$$

(3) 令  $x^{10} = u$ , 则  $du = 10x^9 dx$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{10} \int \frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{1}{10} \int \frac{u+1-u}{u(u+1)^2} du = \frac{1}{10} \int \left[ \frac{1}{u(u+1)} - \frac{1}{(u+1)^2} \right] du \\
 &= \frac{1}{10} \int \left[ \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} \right] du = \frac{1}{10} \left( \ln |u| - \ln |u+1| + \frac{1}{u+1} \right) + C \\
 &= \ln |x| - \frac{1}{10} \ln(1+x^{10}) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C.
 \end{aligned}$$

(4) 令  $x^n = u$ , 则  $du = nx^{n-1} dx$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{n} \int \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{u^2 + 1 - 1}{(1+u^2)^2} du \\
 &= \frac{1}{n} \int \left[ \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{(1+u^2)^2} \right] du = \frac{1}{n} \arctan u - \frac{1}{n} \int \frac{du}{(1+u^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{由递推公式} \quad \int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2(2-1)} \left[ \frac{u}{(u^2+1)} + \int \frac{du}{1+u^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
 \text{故原式} &= \frac{1}{n} \arctan u - \frac{1}{n} \left[ \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan u \right] + C \\
 &= \frac{1}{2n} \arctan u - \frac{u}{2n(u^2+1)} + C = \frac{1}{2n} \arctan(x^n) - \frac{x^n}{2n(x^{2n}+1)} + C.
 \end{aligned}$$

### 题型二 简单无理函数的不定积分

**提示** 无理函数的积分, 一般是通过选择变量替换, 去掉根号, 化为有理函数的积分来进行.

常见的变换除了第二换元积分法中所介绍的三角代换外还有:

类型	积分形式	所作代换
1	$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	$t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$ , $N$ 为 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 的最小公倍数
2	$\int R(\sqrt{a-x}, \sqrt{b-x}) dx$	$\sqrt{a-x} = \sqrt{b-a} \cdot \tan t$
3	$\int R(\sqrt{x-a}, \sqrt{b-x}) dx$	$\sqrt{x-a} = \sqrt{b-a} \cdot \sin t$
4	$\int R(\sqrt{x-a}, \sqrt{x-b}) dx$	$\sqrt{x-a} = \sqrt{b-a} \cdot \sec t$

解题时应注意先将无理函数的分子或分母有理化.

【例 3.18】求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; \quad (2) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx; \quad (3) \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$$

【解】(1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \xrightarrow{\text{令 } x=t^6} \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3 + 1 - 1}{1+t} dt = 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$

$$= 6 \left( \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln |1+t| \right) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) + C.$$

$$(2) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{(1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1})} dx$$

$$= \int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx.$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} dx \left( \text{令 } x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sec t \right)$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2} \sec t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \tan t} \cdot \frac{1}{2} \sec t \tan t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sec^2 t + \sec t) dt = \frac{1}{2} (\tan t + \ln | \sec t + \tan t |) + C$$

$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{x^2+x} + \ln | 2x+1 + 2\sqrt{x^2+x} |) + C,$$

所以原积分  $= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{4}\ln | 2x+1 + 2\sqrt{x^2+x} | + C.$

$$(3) \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} dx$$

$$= \int (x+1)\sqrt{x} dx - \int x\sqrt{x+1} dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int (x+1-1)\sqrt{x+1} dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

### 题型三 三角有理式的不定积分

**提示** 由  $\sin x, \cos x$  及常数, 经过有限次四则运算所得到的函数称为三角有理式, 记为  $R(\sin x,$

$\cos x)$ , 积分  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  称为三角有理式的积分.

对这类积分的基本思路是: (1) 尽量使分母简单. 为此, 或将分子分母同乘以某个因子, 把分母化为  $\sin^k x$  (或  $\cos^k x$ ) 的单项式, 或将分母整个看成一项. (2) 尽量使  $R(\sin x, \cos x)$  的幂降低. 为此通常利用倍角公式或积化和差公式以达到目的.

## 1. “1”的妙用

【例 3.19】求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}, \quad (2) \int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x},$$

$$(3) \int \frac{1}{\sin^3 x} dx.$$

【解】(1) 
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x} = \frac{1}{\sin x \cos^5 x} + \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^5 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{1}{\sin x \cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 x \cos x} \\ &= \frac{2}{\sin x \cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^5 x} + 2 \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x \cos x}, \end{aligned}$$

故原积分 = 
$$\int \left( \frac{\sin x}{\cos^5 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x \cos x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2\sin^2 x} + 3\ln |\csc 2x - \cot 2x| + C.$$

(2) 
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} &= \frac{1}{2\sin x \cos x + 2\sin x} = \frac{1}{2\sin x (\cos x + 1)} \\ &= \frac{1}{4\sin x \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{8\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} + \frac{1}{4\sin x}, \end{aligned}$$

故原积分 = 
$$\frac{1}{8} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \int \csc x dx$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{4} \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

(3) 
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \csc x dx + \int \cot^2 x \csc x dx \\ &= \int \csc x dx - \int \cot x d(\csc x) \\ &= \ln |\csc x - \cot x| - \left[ \cot x \csc x - \int \csc x \cdot (-\csc^2 x) dx \right] \end{aligned}$$

$$= \ln |\csc x - \cot x| - \cot x \csc x - \int \frac{dx}{\sin^3 x},$$

$$\text{故} \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| - \frac{1}{2} \cot x \csc x + C.$$

## 2. 分母的简化

分母可化为单项式的积分类型.

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{(1 \pm \cos x)^k} dx &= \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)(1 \mp \cos x)^k}{(\sin^2 x)^k} dx \\ &\text{因为 } 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}, 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ &\text{所以更常用的是:} \\ &\int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{(1 + \cos x)^k} dx = \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right)^k} dx \\ &\int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{(1 - \cos x)^k} dx = \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)^k} dx \\ (2) \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{(1 \pm \sin x)^k} dx &= \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)(1 \mp \sin x)^k}{(\cos^2 x)^k} dx \\ (3) \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)}{(\cos x \pm \sin x)^k} dx &= \int \frac{P^*(\sin x, \cos x)(\cos x \mp \sin x)}{(\cos 2x)^k} dx \end{aligned}$$

● 这种分子分母同乘以一个因式的做法在不定积分中是允许的,但在定积分运算中一般不允许.

**【例 3.20】**求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx; \quad (2) \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\sin x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 因为 } 1 + \sin x + \cos x = \sin x + (1 + \cos x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{所以原积分} &= \int \frac{dx}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)} \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\ &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

**【例 3.21】**求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx; \quad (2) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$$

$$\text{【解】} (1) \text{ 因为 } \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2(\sin x + \cos x)},$$

$$\begin{aligned} \text{所以原积分} &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{x + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx \\ &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx = x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

### 3. 降幂法

常用的降幂公式

(1) 积化和差公式

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$$

(2) 倍角公式

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

【例 3.22】求下列不定积分.

$$(1) \int \sin 4x \cos 2x \cos 3x dx; \quad (2) \int \sin^2 x \cos^4 x dx; \quad (3) \int \sin^5 x \cos^6 x dx.$$

【解】(1)  $\sin 4x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) \cos 3x$

$$= \frac{1}{2} \sin 6x \cos 3x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos 3x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 9x + \frac{1}{4} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 5x - \frac{1}{4} \sin x,$$

$$\text{原积分} = \frac{1}{4} \int (\sin 9x + \sin 5x + \sin 3x - \sin x) dx$$

$$= -\frac{1}{36} \cos 9x - \frac{1}{20} \cos 5x - \frac{1}{12} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x + C.$$

$$(2) \sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{4} (2 \sin x \cos x)^2 \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{8} (1 + \cos 2x) \frac{1 - \cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{16} (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{16} \left( 1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 6x \right)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x,$$

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \int \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x \right) dx \\ &= \frac{1}{16}x + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{192} \sin 6x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int \sin^6 x \cos^6 x dx &= - \int \sin^4 x \cos^6 x d(\cos x) = - \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^6 x d(\cos x) \\ &= - \int (\cos^6 x - 2\cos^8 x + \cos^{10} x) d(\cos x) \\ &= - \frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{2}{9} \cos^9 x - \frac{1}{11} \cos^{11} x + C.\end{aligned}$$

#### 题型四 含有反三角函数的不定积分

**提示** 这类题可直接令反三角函数为新变量求解.

**【例 3.23】** 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx; \quad (2) \int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$$

**【解】** (1) 令  $\arctan x = u, x = \tan u, dx = \frac{du}{\cos^2 u}$ .

于是

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \int \frac{\tan^2 u}{1 + \tan^2 u} \cdot u \cdot \frac{du}{\cos^2 u} = \int u \tan^2 u du \\ &= \int u (\sec^2 u - 1) du = \int u \sec^2 u du - \frac{1}{2} u^2 \\ &= \int u d(\tan u) - \frac{1}{2} u^2 = u \tan u - \int \tan u du - \frac{1}{2} u^2 \\ &= u \tan u + \ln |\cos u| - \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= x \arctan x + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.\end{aligned}$$

(2) 令  $\arccos x = u, x = \cos u, dx = -\sin u du$ .

于是

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \int \frac{u}{\sin^3 u} (-\sin u du) = \int u d(\cot u) \\ &= u \cot u - \int \cot u du = u \cot u - \ln |\sin u| + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x - \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + C.\end{aligned}$$

#### 题型五 抽象函数的不定积分

**提示** 所谓抽象函数的不定积分,是指被积函数由抽象函数所构成的一类积分,其解法同样可用换元法和分部积分法.

**【例 3.24】** 求解下列不定积分.

$$(1) \int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{f'^3(x)} \right] dx; \quad (2) \int \frac{f'(\ln x)}{x \sqrt{f(\ln x)}} dx.$$

(3)  $\int x f'(2x) dx$ , 其中  $f(x)$  的原函数为  $\frac{\sin x}{x}$ .

【解】(1) 
$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{f'^3(x)} \right] dx &= \int \frac{f(x) f'^2(x) - f^2(x) f''(x)}{f'^3(x)} dx \\ &= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{f'^2(x)} dx = \int \frac{f(x)}{f'(x)} d\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2 + C. \end{aligned}$$

(2) 原积分  $= \int \frac{f'(\ln x)}{\sqrt{f(\ln x)}} d(\ln x) = \int \frac{d(f(\ln x))}{\sqrt{f(\ln x)}} = 2\sqrt{f(\ln x)} + C.$

(3) 
$$\begin{aligned} \int x f'(2x) dx &= \frac{1}{2} \int x d(f(2x)) = \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{2} \int f(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{4} \int f(2x) d(2x), \end{aligned}$$

因为  $\frac{\sin x}{x}$  为  $f(x)$  的原函数, 所以  $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$

于是 
$$f(2x) = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{4x^2},$$

故 
$$\int x f'(2x) dx = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{8x} - \frac{\sin 2x}{8x} + C = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4x} \sin 2x + C.$$

### 题型六 分段函数的不定积分

**提示** 连续函数必有原函数, 且原函数连续. 如果分段函数的分界点是函数的第一类间断点, 则包含该点在内的区间不存在原函数.

解题程序:

(1) 先分别求出各区间段的不定积分表达式;

(2) 由原函数的连续性确定出各积分常数的关系.

【例 3.25】设  $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ , 求  $\int f(x) dx$ .

【解】当  $x < 0$  时,  $\int f(x) dx = \int 1 dx = x + C_1,$

当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $\int f(x) dx = \int (x+1) dx = \frac{1}{2} x^2 + x + C_2,$

当  $x > 1$  时,  $\int f(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C_3,$

由于原函数的连续性, 分别考虑在  $x = 0, x = 1$  处的左、右极限可知

$$C_1 = C_2, \quad \frac{1}{2} + 1 + C_2 = 1 + C_3.$$

解之, 有  $C_1 = C_2 = C_3 - \frac{1}{2}.$

令  $C_1 = C_2 = C_3 - \frac{1}{2} = C,$  则



$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + C, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & x > 1 \end{cases}$$

【例 3.26】求  $\int \max(x^3, x^2, 1) dx$ ,

【解】令  $f(x) = \max(x^3, x^2, 1) = \begin{cases} x^3, & x \geq 1 \\ x^2, & x \leq -1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$ .

当  $x \geq 1$  时,  $\int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1$ ,

当  $x \leq -1$  时,  $\int f(x) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2$ ,

当  $|x| < 1$  时,  $\int f(x) dx = \int dx = x + C_3$ .

由于原函数的连续性,有

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{4}x^4 + C_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + C_3),$$

即  $\frac{1}{4} + C_1 = 1 + C_3$ . ①

又  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + C_3) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{1}{3}x^3 + C_2 \right)$ ,

即  $-1 + C_3 = -\frac{1}{3} + C_2$ . ②

联立解 ①, ②, 并令  $C_3 = C$ , 则

$$C_1 = \frac{3}{4} + C, \quad C_2 = -\frac{2}{3} + C,$$

故  $\int \max(x^3, x^2, 1) dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + C, & x \leq -1, \\ x + C, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4} + C, & x \geq 1. \end{cases}$

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 含有对数函数、反三角函数的不定积分(不定积分), 要想到利用三步法来求解: (1) 凑微分法; (2) 分部积分法; (3) 变量替换法.

具体如下:

(1) 若对数函数、反三角函数的导数是另一部分的常数倍, 则用凑微分法;

- (2) 若对数函数、反三角函数的导数不是另一部分的常数倍,而另一部分不通过作变量替换可得出积分,则用分部积分法,此时设对数函数、反三角函数为  $u$ ,另一部分设为  $dv$ ;  
 (3) 如果另一部分需要通过变量替换才可积分,用变量替换法,此时将对数函数、反三角函数设成变量  $t$ .

【例 3.27】计算下列不定积分.

$$(1) \int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad (2) \int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx; \quad (3) \int \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad (4) \int x \arctan x dx.$$

【解】(1)  $\int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int 10^{2\arcsin x} d\arcsin x$

$$= \frac{1}{2} \int 10^{2\arcsin x} d(2\arcsin x) = \frac{10^{2\arcsin x}}{2 \ln 10} + C.$$

$$(2) \int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x \ln \ln x} d \ln x = \int \frac{1}{\ln \ln x} d \ln \ln x = \ln \ln \ln x + C.$$

$$(3) \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

$$(4) \int x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

## 二、综合题解析

【例 3.28】设函数  $f(x, y)$  可微,  $f(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \cos y$ , 求不定积分  $\int f(x, x) dx$ .

【分析】先由  $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \cos y$  及  $f(0, 0) = 0$  算出  $f(x, y)$  的表达式, 然后计算不定积分  $\int f(x, x) dx$ .

【解】由  $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$  得  $f(x, y) = c(y)e^{-x}$ , 其中  $c(y)$  是可微的待定函数.

上式两边对  $y$  求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = c'(y)e^{-x}.$$

与题设  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \cos y$  比较得  $c'(y) = \cos y$ , 即  $c(y) = \int \cos y dy = \sin y + C$ . 所以

$$f(x, y) = (\sin y + C)e^{-x}.$$

利用  $f(0, 0) = 0$  得  $C = 0$ . 所以

$$f(x, y) = e^{-x} \sin y.$$

从而  $\int f(x, x) dx = \int e^{-x} \sin x dx$ .

下面计算不定积分

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\int e^{-x} d \cos x = -(e^{-x} \cos x + \int e^{-x} \cos x dx)$$

$$\begin{aligned}
 &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} d \sin x \\
 &= -e^{-x} \cos x - (e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx) \\
 &= -e^{-x} (\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x dx.
 \end{aligned}$$

所以, 
$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_1.$$

因此 
$$\int f(x, x) dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_1.$$

【例 3.29】设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 0$  及

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases},$$

(1) 求  $f(x)$  的表达式;

(2) 记由曲线  $y = f(x)$ ,  $y = -f(-x)$  及直线  $x = 1$  围成的位于第 I 象限内的图形为  $D$ , 求  $D$  的面积  $S$ .

【分析】(1) 根据所给的  $f'(\ln x)$  及  $f(0) = 0$  计算  $f(x)$  的表达式.

(2) 画出  $D$  的图形, 用定积分计算它的面积  $S$ .

【解】(1) 由  $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ ,

得 
$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \begin{cases} 1, & e^t \leq 1 \\ e^{\frac{t}{2}}, & e^t > 1 \end{cases} \quad (\text{其中 } t = \ln x) \\
 &= \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ e^{\frac{t}{2}}, & t > 0 \end{cases},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(u) du = \int_0^x f'(u) du \\
 &= \begin{cases} \int_0^x du, & x \leq 0 \\ \int_0^x e^{\frac{u}{2}} du, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 2(e^{\frac{x}{2}} - 1), & x > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

(2) 由(1)得

$$\begin{aligned}
 -f(-x) &= \begin{cases} x, & -x \leq 0 \\ -2(e^{-\frac{x}{2}} - 1), & -x > 0 \end{cases}, \\
 &= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -2(e^{-\frac{x}{2}} - 1), & x < 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

由此可知, 当  $x \geq 0$  时,  $y = f(x) = 2(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ ,

$y = -f(-x) = x$ .

由于当  $x \geq 0$  时,  $e^x \geq 1 + x$  (且仅当  $x = 0$  取等号).

所以, 对  $x \geq 0$  有  $2(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 2 \cdot \frac{x}{2} = x$ . 曲线  $y =$

$f(x)$ ,  $y = -f(-x)$  及直线  $x = 1$  围成的位于第一象限内的图形  $D$ , 如图 3-1 所示.

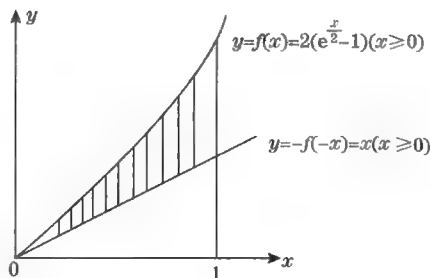


图 3-1

于是  $D$  的面积  $S = \int_0^1 (2e^{\frac{x}{2}} - 2 - x) dx = \left( 4e^{\frac{x}{2}} - 2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = 4e^{\frac{1}{2}} - \frac{13}{2}$ .

### 习 题 三

1. 求下列不定积分.

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx; & (2) & \int \frac{1}{1+x^2} \arctan \frac{1+x}{1-x} dx; \\ (3) & \int \frac{\cos x + \sin x + 1}{(1 + \cos x)^2} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx; & (4) & \int \frac{dx}{x(x^8 + 1)}; \\ (5) & \int \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx. \end{aligned}$$

2. 求下列不定积分.

$$\begin{aligned} (1) & \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}; & (2) & \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}; \\ (3) & \int \frac{dx}{(2x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1}}; & (4) & \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0); \\ (5) & \int \sqrt{(1-x^2)^3} dx; & (6) & \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx; \\ (7) & \int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx. \end{aligned}$$

3. 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{2^x(1+4^x)}.$$

4. 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{x^5}{(x-2)^{100}} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^4}}.$$

5. 求下列不定积分.

$$\begin{aligned} (1) & \int x \cos^2 x dx; & (2) & \int \sec^3 x dx; & (3) & \int \frac{(\ln x)^3}{x^2} dx; \\ (4) & \int \cos(\ln x) dx; & (5) & \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx. \end{aligned}$$

6. 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx; \quad (2) \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad (3) \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx.$$

7. 设  $f(x) = \begin{cases} x \ln(1+x^2) - 3, & x \geq 0 \\ (x^2 + 2x - 3)e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ , 求  $\int f(x) dx$ .

8. 设  $f'(e^x) = a \sin x + b \cos x$ , ( $a, b$  为不同时为零的常数). 求  $f(x)$ .

9. 求下列不定积分.

$$\begin{aligned} (1) & \int 3^{x^2+3x} (2x+3) dx; & (2) & \int (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}} (3x-1) dx; \\ (3) & \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx; & (4) & \int \frac{x dx}{(1+x^2 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}. \end{aligned}$$

10. 设当  $x \neq 0$  时,  $f'(x)$  连续, 求  $\int \frac{xf'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx$ .

11. 设  $f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \tan^2 x$ , 求  $f(x)$ .

12. 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$(2) \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$$

$$(3) \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(4) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx.$$

13. 求下列不定积分.

$$(1) \int x^3 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx \quad (a > 0);$$

$$(3) \int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;$$

$$(4) \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx \quad (a > 0).$$

14. 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}};$$

$$(2) \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx;$$

$$(3) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

15. 求下列不定积分.

$$(1) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx;$$

$$(2) \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx;$$

$$(3) \int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx.$$

### 参 考 答 案

1. (1)  $\frac{1}{4} \left( \ln \frac{1+x}{1-x} \right)^2 + C;$

(2)  $\frac{1}{2} \left( \arctan \frac{1+x}{1-x} \right)^2 + C;$

(3)  $\frac{1}{2} \left( \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right)^2 + C;$

(4)  $-\frac{1}{8} \ln(1+x^8) + C;$

(5)  $\frac{1}{2} x - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C.$

2. (1)  $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C;$

(2)  $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C;$

(3)  $\arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C;$

(4)  $\frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2-x^2} \right) + C;$

(5)  $\frac{3}{8} \arcsin x + \frac{x(5-2x^2)}{8} \sqrt{1-x^2} + C;$

(6)  $\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + C;$

(7)  $\arccos \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$

3. (1)  $\arctan(e^x - e^{-x}) + C;$

(2)  $-\frac{1}{\ln 2} (2^{-x} + \arctan 2^x) + C.$

4. (1)  $-\left[ \frac{32}{99(x-2)^{99}} + \frac{40}{49(x-2)^{98}} + \frac{80}{98(x-2)^{97}} + \frac{5}{12(x-2)^{96}} + \frac{2}{19(x-2)^{95}} + \frac{1}{94(x-2)^{94}} \right] + C;$

$$(2) -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C,$$

$$5. (1) \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C; \quad (2) \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C;$$

$$(3) -\frac{1}{x}[(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 6\ln x + 6] + C; \quad (4) \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C;$$

$$(5) -\frac{x}{8}\csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cot \frac{x}{2} + C.$$

$$6. (1) \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x} \right] + C;$$

$$(2) \sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C;$$

$$(3) -\frac{1}{2}(e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.$$

$$7. \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}[x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geq 0 \\ -(x^2 + 4x + 1)e^{-x} + 1 + C, & x < 0 \end{cases}.$$

$$8. f(x) = \frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x) + (b-a)\cos(\ln x)] + C.$$

$$9. (1) \frac{3^{x^2+3x}}{\ln 3} + C; \quad (2) \frac{1}{5}(3x^2 - 2x + 5)^{\frac{5}{2}} + C;$$

$$(3) \frac{1}{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2 + C; \quad (4) \ln |\ln(1+\sqrt{1+x^2})| + C.$$

$$10. \frac{f(x)}{xe^x} + C.$$

$$11. -\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}(x-2)^3 + C.$$

$$12. (1) \frac{1}{4}\arctan x - \frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{x}{4(x^2+1)} + C;$$

$$(2) (1+x)\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + C \left( \text{提示: 令 } \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = t, x = \tan^2 t; \right)$$

$$(3) -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln |x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C;$$

$$(4) -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.$$

$$13. (1) \frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$(2) \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C;$$

$$(3) \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + C;$$

$$(4) -\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + \frac{3a^2}{2}\arcsin \frac{x-a}{a} + C$$

$$\left( \text{提示: 原积分化为 } \int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} dx, \text{ 令 } x-a = a \sin t \right)$$

$$14. (1) \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}} + C;$$

$$(2) \ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$(3) \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C.$$

$$15. (1) -\frac{4}{3} \sqrt{1-x} \sqrt{x} + C \left( \text{提示: } \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} dx^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} dx \sqrt{x} \right);$$

$$(2) \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin(e^{-x}) + C;$$

$$(3) 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln|x| - (\arctan \sqrt{x-1})^2 + C.$$

## 第四章 定积分及反常积分

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、基本性质

(1) 定积分只与被积函数和积分限有关,而与积分变量无关,即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt = \cdots;$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx;$$

$$\text{特例: } \int_a^a f(x) dx = \int_b^b f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b dx = b - a;$$

$$(4) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$(5) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数});$$

$$(6) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{定积分对区间的可加性});$$

(7) 定积分比较定理 设  $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx,$$

推论: ① 当  $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$  时,  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ,

$$\text{② } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

(8) 估值定理 设  $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ , 其中  $m, M$  为常数, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a);$$

(9) 积分中值定理 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则在  $[a, b]$  上至少存在一个点  $\xi$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a),$$

也可写成

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

所以积分中值定理也称之为平均值公式.

与定积分性质有关的命题有三个: 估值问题、不等式的证明和求极限.



## 1. 估值问题

定积分估值问题是指确定常数  $m, M$ , 使  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$  成立. 其中,  $M$  要求尽可能小,  $m$  尽可能大, 即  $M, m$  分别接近于  $f(x)$  的上下确界.

**提示** (1) 或者求出被积函数  $f(x)$  在积分区间  $[a, b]$  上的最值, 定出  $f(x)$  的范围; 或者用不等式放缩法写出  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的界限; 或者二者结合得出  $f(x)$  的适合范围;  
(2) 用估值定理或比较定理进行分析处理.

**【例 4.1】** 估计下列各积分值.

$$(1) \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx; \quad (2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx; \quad (3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}}.$$

**【解】** (1) 令  $f(x) = x \arctan x, x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$ ,

因为  $f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} > 0$ , 所以  $f(x)$  “ $\nearrow$ ”.

$$\text{于是} \quad \max f(x) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

$$\min f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{18} \pi,$$

因此  $\frac{\sqrt{3}}{18} \pi \leq f(x) \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , 由估值定理有  $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2}{3} \pi$ .

$$(2) \text{ 令} \quad f(x) = 1 + \sin^2 x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right],$$

因为  $f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ,

$$\text{令} \quad f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{\pi}{2}, \pi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 2, \quad f(\pi) = 1, \quad f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1 + \sin^2 \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2},$$

所以  $1 \leq f(x) \leq 2$ . 故  $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx \leq 2\pi$ .

$$(3) \text{ 因为} \quad 4 \geq 4 - 2x - x^2 + x^3 \geq 4 - 2x - x^2, x \in [0, 1],$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{2} \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-2x-x^2}},$$

$$\text{由估值定理有} \quad \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}},$$

$$\text{而} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{\sqrt{5-(x+1)^2}} = \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{故} \quad \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2+x^3}} \leq \arcsin \frac{2}{5} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

## 2. 不等式的证明

**提示** 思路之一: 与估值问题同.

思路之二:先将积分区间分成若干子区间,再用比较定理进行分析处理.

【例 4.2】证明下列不等式.

$$(1) 2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \frac{8}{3}; \quad (2) \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leq \frac{\pi}{6}, (n > 2).$$

【证】(1) 令

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, x \in [-1, 1],$$

则

$$f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}} = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}},$$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0$ .

因为  $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$ ,  $f(0) = 1$ , 所以  $1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ .

上式两边对  $x$  在  $[-1, 1]$  上积分, 得不出右边要证的结果, 因此必须对  $f(x)$  重新进行分析, 显然有  $f(x) = \sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{1+2x^2+x^4} = \sqrt{(1+x^2)^2} = 1+x^2$ ,

$$\text{于是} \quad \int_{-1}^1 dx \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \int_{-1}^1 (1+x^2) dx,$$

故

$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \frac{8}{3}.$$

(2) 显然当  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  时,  $(n > 2)$  有

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6},$$

即

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leq \frac{\pi}{6}.$$

【例 4.3】设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续且单调递减. 证明:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx.$$

【证】因为  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续且单调递减 所以

$$f(i+1) \leq f(i), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

因此, 由比较定理有

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx \\ &\leq \int_1^2 f(1) dx + \int_2^3 f(2) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(n) dx \\ &= f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n f(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) + \int_1^n f(x) dx &= f(1) + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx \\ &\geq f(1) + \int_1^2 f(2) dx + \int_2^3 f(3) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(n) dx \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n f(k). \end{aligned}$$

故命题得证.

## 3. 求极限

**提示** (1) 将被积函数  $f(x)$  在积分区间内放大或缩小, 注意: 一般情况下以  $n$  为指数幂的因子保留; (2) 利用定积分比较定理; (3) 取极限.

**【例 4.4】** 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx.$$

**【解】** (1) 因为

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n,$$

$$\text{所以} \quad 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

$$\text{又} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = 0, \quad \text{故} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0.$$

$$(2) \text{ 因为} \quad 0 \leq \frac{x^n e^x}{1+e^x} \leq x^n, \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{所以} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\text{又} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad \text{故} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx = 0.$$

## 二、定理和公式

## 1. 重要公式

(1) 设  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上连续, 则

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时} \end{cases}$$

(2) 设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数,  $a$  为任意实数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

$$(3) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

**【例 4.5】** 求下列定积分.

$$(1) \int_3^3 [x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{9-x^2}] dx;$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \arctan x + \cos^7 x + \sin^8 x) dx.$$

**提示** 凡遇积分区间是关于原点对称的, 就应考虑到“对称区间上函数积分的奇偶性”, 即重要公式(1).

**【解】** (1) 因为  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$  为奇函数,  $x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  为奇函数,  $\sqrt{9-x^2}$  为偶函数,

所以 原积分  $= 2 \int_0^3 (-\sqrt{9-x^2}) dx = -2 \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$

$$\stackrel{\text{由公式(3)}}{=} (-2) \frac{\pi}{4} (3)^2 = -4.5\pi.$$

(2) 因为  $x^2 \arctan x$  为奇函数,  $\cos^7 x, \sin^8 x$  为偶函数,

$$\begin{aligned} \text{所以原积分} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 x dx + \sin^8 x) dx = 2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx \right) \\ &= 2 \left( \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 2 \left( \frac{16}{35} + \frac{35\pi}{256} \right). \end{aligned}$$

## 2. 重要定理

**定理 1** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x \in [a, b]$ , 则变上限积分  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  对  $x$  可导, 并且有

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}(\Phi(x)) = \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

**推论 1** 设  $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$ , 则  $F'(x) = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ .

**推论 2** 设  $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$ , 则  $F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$ .

**推论 3** 设  $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x) dt$ , 则  $F'(x) = \left[ g(x) \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]'_x$ .

$$= g'(x) \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt + g(x) f[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

**定理 2** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x \in [a, b]$ , 则  $\int_a^x f(t) dt$  是  $f(x)$  的一个原函数.

**定理 3** (牛顿—莱布尼茨公式) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**例 1** (1) 函数在闭区间上连续这个条件若不满足, 则结论可能不成立;

(2) 一见到函数  $f(x)$  在闭区间上“连续”, 就应该联想到  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  是  $f(x)$  的一个原函数, 在证明定积分有关命题时, 这是一条思路.

**【例 4.6】** 求下列导数.

$$(1) F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}; \quad (2) F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos t^2 dt;$$

$$(3) \text{ 由方程 } \int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = 1, \text{ 确定 } y \text{ 为 } x \text{ 的函数, 求 } \frac{dy}{dx}.$$

**【解】** (1)  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}}(x^3)' - \frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}}(x^2)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$

$$\begin{aligned} (2) F'(x) &= \cos(\cos x)^2 (\cos x)' - \cos(\sin x)^2 (\sin x)' \\ &= -\sin x \cos(\cos^2 x) - \cos x \cos(\sin^2 x). \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 方程 } \int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = 1 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$e^{y^2} \cdot y' + \frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2}} 2x = 0 \Rightarrow y' = \pm 2e^{-y^2} \sin x^2.$$

**【例 4.7】** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且满足  $\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$ , 求  $f(2)$ .

**【解】** 方程  $\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$  的两边对  $x$  求导, 得

$$f[x^2(1+x)][x^2(1+x)]' = 1,$$

即

$$f(x^2 + x^3) \cdot (2x + 3x^2) = 1.$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } f(2) = \frac{1}{5}.$$

**【例 4.8】** 设当  $x > 0$  时,  $f(x)$  可导, 且满足方程

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \quad (x > 0).$$

求  $f(x)$ .

**【解】** 方程两边对  $x$  求导, 得

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x).$$

将原方程的  $f(x)$  的表达式代入上式, 得

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^x f(t) dt + \frac{1}{x} \left[ 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \right] = \frac{1}{x},$$

积分得,

$$f(x) = \ln x + C.$$

由原方程中令  $x = 1$ , 可得  $f(1) = 1$ , 上式中令  $x = 1$ , 得  $C = 1$ .

故

$$f(x) = \ln x + 1.$$

**【例 4.9】** 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 2}}}{\ln x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x t^2 e^t dt;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t \sin t dt}{x^6 e^x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}.$$

**【解】** (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 2}} \stackrel{\text{取 } p=1}{=} 1$ , 可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 2}} \text{ 发散趋于 } +\infty, \text{ 因此本题属 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型未定式,}$$

$$\text{所以原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 2}} = 1.$$

$$(2) \text{ 原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x t^2 e^t dt}{x e^{x^2}} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + x e^{x^2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + 2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t e^t \sin t dt}{x^6 e^x} \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{x^2} \sin x^2 \cdot 2x}{6x^5 e^x + x^6 e^x}$$

$$\frac{\sin x^2 \sim x^2}{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 e^{x^2}}{x^5 (6+x) e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{(6+x) e^x} = \frac{1}{3}.$$

(4) 本题是属于  $\frac{\infty}{\infty}$  型的未定式, 由于  $|\sin t|$  是以  $\pi$  为周期的函数, 因此有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^\pi |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2,$$

其中,  $n \in \mathbf{N}$ . 又当  $x \rightarrow +\infty$ , 存在  $n$ , 使  $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ , 因此

$$\int_0^{n\pi} |\sin t| dt \leq \int_0^x |\sin t| dt \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t| dt,$$

$$2n \leq \int_0^x |\sin t| dt \leq 2(n+1).$$

可见当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\int_0^x |\sin t| dt \rightarrow +\infty$ .

由第一章洛必达法则的注中可知, 本题不能用洛必达法则.

因为 
$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \frac{2(n+1)}{n\pi},$$

而 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi},$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{2}{\pi}. \quad (\text{夹逼定理})$$

**【例 4.10】** 设  $f(x)$  是连续函数, 且  $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

**【解】** 因为  $f(x)$  连续, 所以  $\int_0^1 f(t) dt$  存在, 不妨设  $\int_0^1 f(t) dt = l$ ,

于是 
$$f(x) = x + 2l,$$

积分有 
$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t + 2l) dt,$$

$$l = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 + 2l \Rightarrow l = -\frac{1}{2},$$

故 
$$f(x) = x + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = x - 1.$$

### 三、定积分的计算法

定积分的计算常用的有三种方法: 牛顿—莱布尼茨公式, 换元积分法, 分部积分法.

#### (一) 牛顿—莱布尼茨公式

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

使用公式的注意事项:

(1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续;

(2)  $F(x)$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

**【例 4.11】** 求下列定积分.

$$(1) \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx.$$

【解】(1)  $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2 \int_1^4 \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$   
 $= 2 \int_1^4 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \right) d(\sqrt{x}) = 2 [\ln \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] \Big|_1^4 = 2 \ln \frac{4}{3}.$

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} [x \tan x + \ln \cos x] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.$

## (二) 定积分的换元积分法

**定理** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 若变换  $x = \varphi(t)$  满足如下条件:

- (1)  $\varphi'(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 且  $\varphi'(t) \neq 0$ ;  
 (2)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ , 并且当  $t$  在  $[\alpha, \beta]$  上变化时,  $\varphi(t)$  的值在  $[a, b]$  上变化, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

● (1) 在做变量替换的同时, 一定要更换积分上下限; (2) 用  $t = \varphi(x)$  引入新变量  $t$  时, 一定要注意反函数  $x = \varphi(t)$  的单值、可微等条件.

【例 4.12】求下列定积分.

$$(1) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)} dx; \quad (2) \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx \quad (a > 0);$$

$$(3) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} dx;$$

$$(5) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}; \quad (6) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

【解】(1) 令  $u = \arcsin \sqrt{x}, x = \sin^2 u, dx = 2 \sin u \cos u du$ .

$$\text{原积分} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\sin u \cos u} 2 \sin u \cos u du = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{5}{144} \pi^2.$$

(2) 令  $x = \frac{1}{u}, dx = -\frac{du}{u^2}.$

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{1}{u^2} - a^2} \cdot u^4 \cdot \left(-\frac{1}{u^2} du\right) = \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{1 - a^2 u^2} u du \\ &= -\frac{1}{2a^2} \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \sqrt{1 - a^2 u^2} d(1 - a^2 u^2) = -\frac{1}{2a^2} \cdot \frac{2}{3} (1 - a^2 u^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}. \end{aligned}$$

(3) 令  $e^{-x} = \sin t, x = -\ln \sin t, dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt.$

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \left(-\frac{\cos t}{\sin t} dt\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \ln |\csc t - \cot t| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(4) 令  $x = \frac{\pi}{2} - u, dx = -du.$

$$\text{原积分} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{10} u - \sin^{10} u}{4 - \cos u - \sin u} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{10} x - \sin^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} dx,$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} + \frac{\cos^{10} x - \sin^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} \right) dx = 0,$$

故原积分 = 0.

(5) 令  $x = a \sin t, dx = a \cos t dt$ .

$$\text{原积分} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos t dt}{a \sin t + a \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt.$$

$$\text{又因为} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \stackrel{t = \frac{\pi}{2} - u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin u}{\cos u + \sin u} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

$$\text{所以} \quad 2 \times \text{原积分} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{故原积分} = \frac{\pi}{4}.$$

注意: 此题不可这样解:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t (\cos t - \sin t)}{(\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t - \cos t \sin t}{\cos 2t} dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t - \sin 2t}{\cos 2t} dt. \end{aligned}$$

理由是  $\cos t - \sin t$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  处为“零”.

(6) 令  $x = \tan t$ , 则有

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \frac{\cos t + \sin t}{\cos t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \frac{\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + t \right)}{\cos t} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} + t \right) \right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{因为} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{8} \ln 2,$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} + t \right) \right) dt &\stackrel{t = \frac{\pi}{4} - u}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right) (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{所以原积分} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

**【例 4.13】** 求  $I_n = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$  ( $n$  为自然数).

$$\text{【解】} I_n \stackrel{x = \frac{\pi}{2} - u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\left( \frac{\pi}{2} - u \right) \cos^{2n} u}{\cos^{2n} u + \sin^{2n} u} (-du)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} u}{\cos^{2n} u + \sin^{2n} u} du - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^{2n} u}{\cos^{2n} u + \sin^{2n} u} du$$



$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} u}{\cos^{2n} u + \sin^{2n} u} du = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x} dx & \stackrel{x = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^{2n} t}{\sin^{2n} t + \cos^{2n} t} (-dt) \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx, \end{aligned}$$

$$\text{故 } I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

### (三) 定积分的分部积分法

设  $f(x), v(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续导函数  $u'(x), v'(x)$ , 则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

其中,  $u(x), dv = v'(x)dx$  的选择与不定积分的分部积分法相同.

**【例 4.14】** 求下列定积分.

$$(1) \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$$

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{x}{2}} (\cos x - \sin x)}{\sqrt{\cos x}} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx;$$

$$(4) \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$$

**【解】** (1) 原式  $= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$

$$= \pi - \int_0^3 \frac{x}{1+x} d(\sqrt{x}) = \pi - \int_0^3 \frac{1 + (\sqrt{x})^2 - 1}{1 + (\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x})$$

$$= \pi - (\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) \Big|_0^3 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\cos x} dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{x}{2}} \sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{x}{2}} \sin x}{\sqrt{\cos x}} dx &= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}} d(\sqrt{\cos x}) = 2 \left( e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\cos x} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\cos x} dx \right) \\ &= \sqrt[4]{8} (e^{\frac{\pi}{8}} - e^{-\frac{\pi}{8}}) - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{\cos x} dx, \end{aligned}$$

$$\text{所以原积分} = \sqrt[4]{8} (e^{\frac{\pi}{8}} - e^{-\frac{\pi}{8}}).$$

$$(3) \text{ 原积分} = \int_0^1 \ln(1+x) d\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{\ln(1+x)}{2-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2-x} \cdot \frac{dx}{1+x}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln 2 + \frac{1}{3} [\ln |x-2| - \ln |1+x|] \Big|_0^1$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3} (-\ln 2 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln 2.$$

$$(4) \text{ 因为 } \cos(n+1)x = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x.$$

$$\text{所以原积分} = \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(nx) \cos x dx - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin(nx) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{又 } \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(nx) \cos x dx &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) d\sin^n x = \frac{1}{n} \sin^n x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin^n x \sin(nx) dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^n x \sin(nx) dx.\end{aligned}$$

故 原积分 = 0.

#### 四、反常积分的基本概念

##### 1. 无穷限的反常积分

1° 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a),$$

若上式极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称为发散;

$$2^\circ \int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$$

若上式极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称为发散;

$$3^\circ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx,$$

如果  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  和  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  都收敛, 则称反常积分收敛, 否则称为发散.

##### 2. 有奇点的反常积分(瑕积分)

设  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数

$$1^\circ \text{ 若 } f(x) \text{ 在点 } a \text{ 处无界, 则 } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x),$$

若上式极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称为发散;

$$2^\circ \text{ 若 } f(x) \text{ 在点 } b \text{ 处无界, 则 } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a),$$

若上式极限存在, 则称反常积分收敛, 否则称为发散;

$$3^\circ \text{ 若 } a < c < b, f(x) \text{ 在点 } c \text{ 无界, 则 } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

若  $\int_a^c f(x) dx, \int_c^b f(x) dx$  都收敛, 称反常积分收敛, 否则称为发散.

##### 3. 绝对收敛

若  $I$  为无穷区间, 且  $\int_I |f(x)| dx$  或有奇点的积分  $\int_a^b |f(x)| dx$  收敛, 称反常积分绝对收敛.

定理: 若反常积分绝对收敛, 则反常积分收敛.

##### 4. 对称区间上的反常积分

若反常积分收敛, 则

1° 若  $f(x)$  是偶函数, 则对称区间上的反常积分为半区间积分的二倍;

2° 若  $f(x)$  是奇函数, 则对称区间上的反常积分为零.

特别注意: 反常积分不收敛时以上性质不成立.

例如:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \neq 0.$

因为  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty}$  发散.

因为  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$  收敛, 所以  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0$ .

上述情形在概率论中计算数学期望、方差时经常遇到, 应特别注意.

## 5. 反常积分的判敛准则

(1) 无穷限反常积分的判敛准则.

准则 1: 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ , 若存在  $M > 0$ , 使得

①  $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^m}, m > 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

②  $\frac{M}{x^m} \leq f(x), m \leq 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

准则 2: 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ ,

① 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m f(x) = k, 0 \leq k < +\infty, m > 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

② 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m f(x) = k, 0 < k \leq +\infty, m \leq 1$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

积分区间为  $(-\infty, b)$  及  $(-\infty, +\infty)$  时有类似准则.

(2) 瑕积分的判敛准则.

准则 1: 设  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ , 若存在  $M > 0$ , 使得

①  $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^m}, 0 < m < 1$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

②  $\frac{M}{(b-x)^m} \leq f(x), m \geq 1$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

准则 2: 设  $f(x)$  在  $[a, b)$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ ,

① 若  $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^m f(x) = k, 0 \leq k < +\infty, 0 < m < 1$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

② 若  $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^m f(x) = k, 0 < k \leq +\infty, m \geq 1$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

在  $x = a, x = c (a < c < b)$  为瑕点时有类似准则.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 分段函数的定积分

**提示** (1) 要认清积分限是被积函数定义域的哪个区间段的端点, 然后分别按段积分再求和.

(2) 当被积函数是给定函数与某一简单函数复合而成的函数时, 要通过变量代换将其化为给定函数的形式, 切记: 与此同时积分限也要相应改变.

**【例 4.15】** 设  $f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ c, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$ , 求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

【解】当  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$  时,  $\Phi(x) = \int_0^x kt \, dt = \frac{1}{2}kx^2$ ,

当  $\frac{l}{2} < x \leq l$  时,

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^{\frac{l}{2}} kt \, dt + \int_{\frac{l}{2}}^x c \, dt = \frac{1}{8}kl^2 + c\left(x - \frac{l}{2}\right).$$

综上所述,可知

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{1}{8}kl^2 + c\left(x - \frac{l}{2}\right), & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}.$$

【例 4.16】求下列积分.

(1)  $\int_{-2}^2 \max(x, x^2) \, dx$ ;

(2)  $\int_{-3}^2 \min(2, x^2) \, dx$ .

【解】(1) 作出  $y = x$  及  $y = x^2$  在  $[-2, 2]$  上的图形,如图 4-1 所示.

由图可知  $f(x) = \max(x, x^2) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$

故

$$\text{原积分} = \int_{-2}^0 x^2 \, dx + \int_0^1 x \, dx + \int_1^2 x^2 \, dx = \frac{11}{2}.$$

(2) 作出  $y = 2$  及  $y = x^2$  在  $[-3, 2]$  上的图形,如图 4-2 所示.

由图可知  $f(x) = \min(2, x^2) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x \leq -\sqrt{2} \\ x^2, & -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{2} \\ 2, & \sqrt{2} < x \leq 2 \end{cases}.$

$$\text{故原积分} = \int_{-3}^{-\sqrt{2}} 2 \, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 2 \, dx = 10 - \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

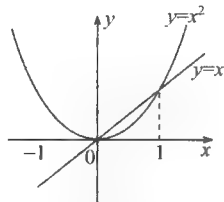


图 4-1

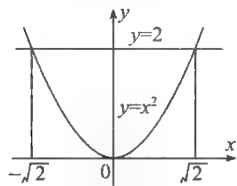


图 4-2

【例 4.17】求下列定积分.

(1)  $\int_0^2 f(x-1) \, dx$ , 其中,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}.$

(2)  $\int_0^x f(t)g(x-t) \, dt (x \geq 0)$ , 其中, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x$ , 而

$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

【解】(1) 设  $u = x-1$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x-1) \, dx = \int_{-1}^1 f(u) \, du = \int_{-1}^1 f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_{-1}^0 \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} + \ln(1+x) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x} \right) d(e^x) + \ln 2 \\
 &= [\ln e^x - \ln(1+e^x)] \Big|_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+e).
 \end{aligned}$$

(2) 设  $u = x - t$ , 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt = - \int_x^0 f(x-u)g(u)du \\
 &= \int_0^x f(x-t)g(t)dt.
 \end{aligned}$$

由于当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x$ , 所以, 当  $x \geq t$  时

$$f(x-t) = x-t,$$

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{故 } I = \begin{cases} \int_0^x (x-t) \sin t dt = x - \sin x, & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-t) \sin t dt = x - 1, & \text{当 } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

### 题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分

**提示** 在作积分运算之前设法去掉绝对值, 其方法是先令绝对值内的式子等于“0”, 求出在积分区间内的根, 再据此把积分区间分成若干个子区间, 各子区间上的被积函数的绝对值就可以去掉了. (注意符号!!)

**【例 4.18】** 求下列定积分.

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx; & (2) & \int_{-2}^5 |x^2 - 2x - 3| dx; \\
 (3) & \int_0^1 t |t - x| dt; & (4) & \int_a^b |x| dx \quad (a < b).
 \end{aligned}$$

**【解】** (1) 令  $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{原积分} &= \int_{\frac{1}{e}}^1 |\ln x| dx + \int_1^e |\ln x| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\
 &= - (x \ln x - x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^e \\
 &= 1 + \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e \ln e - e + 1 = 2 - \frac{2}{e}.
 \end{aligned}$$

(2) 令  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{原积分} &= \int_{-2}^{-1} |x^2 - 2x - 3| dx + \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx + \int_3^5 |x^2 - 2x - 3| dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx - \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx + \int_3^5 (x^2 - 2x - 3) dx \\
 &= \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 3x \right) \Big|_{-2}^{-1} - \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^3 + \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 - 3x \right) \Big|_3^5
 \end{aligned}$$

$$= \frac{71}{3}.$$

(3) 令  $t-x=0 \Rightarrow t=x$

当  $x < 0$  时,

$$\int_0^1 t |t-x| dt = \int_0^1 t(t-x) dt = \frac{1}{3} - \frac{x}{2},$$

当  $0 \leq x \leq 1$  时,

$$\int_0^1 t |t-x| dt = \int_0^x t(x-t) dt + \int_x^1 t(t-x) dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3},$$

当  $x > 1$  时,

$$\int_0^1 t |t-x| dt = \int_0^1 t(x-t) dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\text{综上所述, } \int_0^1 t |t-x| dt = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{x}{2}, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

(4) 令  $x=0$ , 可得如下结果

1° 当  $a < b < 0$  时,

$$\int_a^b |x| dx = -\int_a^b x dx = -\frac{1}{2}(b^2 - a^2);$$

2° 当  $a < 0 < b$  时,

$$\int_a^b |x| dx = \int_a^0 (-x) dx + \int_0^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 + a^2);$$

3° 当  $0 < a < b$  时,

$$\int_a^b |x| dx = \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

$$\text{综上所述, } \int_a^b |x| dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}(b^2 - a^2), & a < b < 0 \\ \frac{1}{2}(b^2 + a^2), & a < 0 < b. \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2), & 0 < a < b \end{cases}$$

### 题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分

**提示** 思路之一: 用分部积分法做, 将变上限积分取作  $u$ , 其余的部分取作  $dv$ .

思路之二: 将原积分化为二重积分, 再更换累次积分次序.

**【例 4.19】** 求下列定积分.

(1) 设  $f(x) = \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy$ , 求  $\int_0^a f(x) dx$ ;

(2) 设  $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$ , 求  $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} (1) \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a \left[ \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy \right] dx = x \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy \Big|_0^a - \int_0^a x e^{(a^2-x^2)} (-1) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^a e^{a^2-x^2} d(a^2-x^2) = -\frac{1}{2} e^{a^2-x^2} \Big|_0^a \\
 &= \frac{1}{2} e^{a^2-x^2} \Big|_a^0 = \frac{1}{2} (e^{a^2} - 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx &= \int_0^1 (x-1)^2 \left[ \int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right] dx \\
 &= \left[ \frac{1}{3} (x-1)^3 \int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} (x-1)^3 \cdot e^{-x^2+2x} dx \\
 &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d[(x-1)^2] \\
 &\quad \xrightarrow{\text{令 } (x-1)^2 = u} -\frac{e}{6} \int_1^0 u e^{-u} du = \frac{1}{6} (e-2).
 \end{aligned}$$

【另解】积分区域如图 4-3 所示.

$$\begin{aligned}
 (1) I &= \int_0^a \left[ \int_0^{a-x} e^{y(2a-y)} dy \right] dx = \int_0^a dy \int_0^{a-y} e^{y(2a-y)} dx = \int_0^a e^{y(2a-y)} (a-y) dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^a e^{-(a-y)^2+a^2} d[(a-y)^2] = -\frac{1}{2} e^{a^2} [-e^{-(a-y)^2}] \Big|_0^a = \frac{1}{2} (e^{a^2} - 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) I &= \int_0^1 dy \int_y^1 (x-1)^2 e^{-y^2+2y} dx \\
 &= \int_0^1 e^{-(y-1)^2+1} \cdot \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_y^1 dy \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^1 e^{-(y-1)^2+1} (y-1)^3 dy \\
 &= -\frac{e}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(y-1)^2} \cdot (y-1)^2 d[(y-1)^2] \\
 &\quad \xrightarrow{\text{令 } (y-1)^2 = u} -\frac{e}{6} \int_1^0 e^{-u} \cdot u du = \frac{1}{6} (e-2).
 \end{aligned}$$

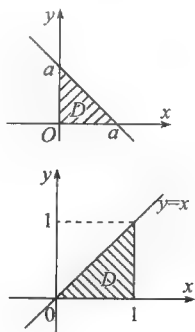


图 4-3

【例 4.20】求下列定积分.

$$(1) \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy;$$

$$(2) \text{ 设函数 } f(x) \text{ 在区间 } [0, 1] \text{ 上连续, 并设 } \int_0^1 f(x) dx = A, \text{ 求 } \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy.$$

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} (1) I &= \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 \left[ \int_x^2 e^{-y^2} dy \right] dx \\
 &= x \int_x^2 e^{-y^2} dy \Big|_0^2 - \int_0^2 x (-e^{-x^2}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) I &= \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy \\
 &= \left[ \int_0^x f(t) dt \int_x^1 f(y) dy \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \left[ \int_0^x f(t) dt \right] = f(x) \cdot (-f(x)) dx \\
 &= \int_0^1 f(x) dx \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 \left[ \int_0^x f(t) dt \right] d\left( \int_0^x f(t) dt \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_0^x f(t) dt \right]^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f(t) dt \right]^2 = \frac{1}{2} A^2.$$

●  $\int_0^x f(t) dt$  为  $f(x)$  的一个原函数.

【另解】积分区域见图 4-4.

$$\begin{aligned} (1) I &= \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 e^{-y^2} dy \int_0^y dx \\ &= \int_0^2 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-y^2} d(y^2) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) I &= \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \int_0^1 dy \cdot \int_0^y f(x) f(y) dx \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x) f(y) dy, \\ 2I &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x) f(y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x) f(y) dy = A^2, \\ I &= \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \frac{1}{2} A^2. \end{aligned}$$

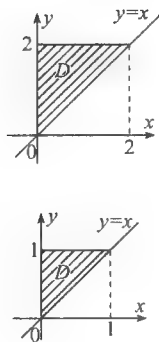


图 4-4

#### 题型四 对称区间上的定积分

**提示** 或者考察被积函数是否为奇偶函数,用奇偶函数积分的“特性”处理,或作负变换  $x = -u$  处理.

【例 4.21】计算下列积分.

- (1) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,且对任何  $x, y$  有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 计算  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx$ ;
- (2)  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx$ .

【解】(1) 对于这种被积函数含有抽象因子的积分,通常是利用奇偶性积分的“特性”处理,以下证明  $f(x)$  为奇函数.

令  $y = 0$ , 则由  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  可得:

$$f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$

又  $f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$ , 即  $f(x) + f(-x) = 0$ ,

可知  $f(x)$  为奇函数,于是

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) f(x) dx = 0.$$

(2) 令  $x = -u$ , 则  $I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 u}{1 + e^u} du = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx$ ,

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{1 + e^x} \right) \sin^2 x dx$$



$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{1}{4}(\pi - 2),$$

$$\text{故 } I = \frac{1}{8}(\pi - 2).$$

【例 4.22】设  $f(x), g(x)$  在区间  $[-a, a] (a > 0)$  上连续,  $g(x)$  为偶函数, 且  $f(x)$  满足条件  $f(x) + f(-x) = A (A \text{ 为常数})$ .

$$(1) \text{ 证明: } \int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx;$$

$$(2) \text{ 利用结论(1) 计算定积分 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx.$$

$$\text{【证】}(1) \int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx,$$

$$\text{因为 } \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx \stackrel{\text{令 } x=-u}{=} - \int_a^0 f(-u)g(-u)du = \int_0^a f(-x)g(x)dx,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_{-a}^a f(x)g(x)dx &= \int_0^a f(-x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx. \end{aligned}$$

(2) 取  $f(x) = \arctan e^x, g(x) = |\sin x|, a = \frac{\pi}{2}$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上连续,  $g(x)$  为偶函数.

因为  $(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = 0$ , 所以  $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = A$ .

令  $x = 0$ , 得  $2\arctan 1 = A$ . 于是,  $A = \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$ , 故

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 题型五 被积函数的分母为两项, 而分子为其中一项的定积分

**提示** 作变量代换, 所作代换满足以下两点要求: (1) 变换前后积分上下限或者不变, 或者交换位置; (2) 交换后, 分母中的另一项成为分子中的项.

【例 4.23】求下列定积分.

$$(1) \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a} \quad (a \text{ 为常数});$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx.$$

$$\text{【解】}(1) I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$$

$$\stackrel{\text{令 } 9-x=u+3}{\text{即 } x=6-u} \int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(u+3)}}{\sqrt{\ln(u+3)} + \sqrt{\ln(9-u)}} (-du)$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(u+3)}}{\sqrt{\ln(9-u)} + \sqrt{\ln(u+3)}} du = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx,$$

$$\Rightarrow 2I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = \int_2^4 dx = 2,$$

所以  $I = 1$ .

$$\begin{aligned} (2) \text{ 令 } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^a} \xrightarrow{\text{令 } u = \frac{\pi}{2} - x} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1 + (\cot u)^a} \cdot (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan u)^a}{1 + (\tan u)^a} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^a}{1 + (\tan x)^a} dx, \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1 + (\tan x)^a} + \frac{(\tan x)^a}{1 + (\tan x)^a} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 令 } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \frac{\pi}{2} - u} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{e^{\cos u}}{e^{\cos u} + e^{\sin u}} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx, \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} + e^{\cos x}}{e^{\sin x} + e^{\cos x}} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } I = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### 题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分

**提示** 通过变量代换把原积分分解成可抵消或易积分的若干个积分;一般来讲,变量代换是这样做的:积分区间为对称的,令  $x = -u$ ;积分区间为  $[0, \pi]$  的,令  $x = \pi - u$ ;积分区间为  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的,令  $x = \frac{\pi}{2} - u$ ;积分区间为  $[0, \frac{\pi}{4}]$  的,令  $x = \frac{\pi}{4} - u$ .

**【例 4.24】** 求下列定积分.

$$\begin{aligned} (1) & \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx; & (2) & \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx; \\ (3) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx. \end{aligned}$$

**【解】** (1)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left( 1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$

$$\text{又 } \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx = x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 x \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left( x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$$

代入原积分,得原积分  $= \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}.$

$$\begin{aligned} (2) \quad I &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \pi - u} \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - u) \sin^3 u}{1 + \cos^2 u} (-du) \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 u}{1 + \cos^2 u} du - \int_0^{\pi} \frac{u \sin^3 u}{1 + \cos^2 u} du \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

于是

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = -\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} d(\cos x) \\
&= -\pi \int_0^{\pi} \frac{2 - (1 + \cos^2 x)}{1 + \cos^2 x} d(\cos x) \\
&= -2\pi \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} + \pi \cos x \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 2\pi,
\end{aligned}$$

故 
$$I = \frac{1}{2}(\pi^2 - 2\pi).$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \frac{\pi}{2} - u} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\cos u)}{f(\cos u) + f(\sin u)} (-du) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx,
\end{aligned}$$

又 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx,$$

于是 
$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

故 
$$I = \frac{\pi}{4}.$$

### 题型七 已知一定积分, 求另一一定积分

**提示** 一般用变量代换.

**【例 4.25】** 已知  $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = A$ , 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$ .

**【解】** 
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x+1} dx \\
&\xrightarrow{\text{令 } u = 2x} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+2} du = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos u}{u+2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{(u+2)^2} du \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi+2} - A \right).
\end{aligned}$$

**【例 4.26】** 设  $F(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$ . 求  $F(-a), F(a^2)$ .

**【解】** 
$$\begin{aligned}
F(-a) &= \int_0^{\pi} \ln(1 + 2a \cos x + a^2) dx \xrightarrow{\text{令 } x = \pi - t} \int_{\pi}^0 \ln(1 - 2a \cos t + a^2) dt \\
&= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = F(a),
\end{aligned}$$

$$2F(a) = F(a) + F(-a) = \int_0^{\pi} \ln[(1 - 2a \cos x + a^2)(1 + 2a \cos x + a^2)] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos 2x + a^4) dx \xrightarrow{\text{令 } x = \frac{t}{2}} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt + \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt \right].
\end{aligned}$$

因为 
$$\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt \xrightarrow{\text{令 } t = 2\pi - u} \int_{\pi}^0 \ln(1 - 2a^2 \cos u + a^4) (-du)$$

$$= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt,$$

$$\text{所以 } 2F(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos t + a^4) dt = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a^2 \cos x + a^4) dx = F(a^2).$$

即

$$F(a^2) = 2F(a).$$

### 题型八 定积分等式的证明

证明定积分等式常用的方法有换元法、分部积分法、构造函数法、泰勒公式法等.

#### 1. 换元法(适用于被积函数或其部分仅给出连续条件的命题)

**提示** (1) 依据定积分与积分变量无关的性质, 改写等式一端的积分变量为  $u$ ;

(2) 作变量代换. (i) 若等式一端的被积函数或其部分为  $f(x)$ , 而另一端为  $f[\varphi(u)]$ , 则作代换  $x = \varphi(u)$ ; (ii) 若等式一端为  $f(x)$ , 另一端为  $f(u)$ , 则所作代换依据等式两端的积分限;

(3) 利用所作代换, 由等式一端推导出另一端.

**注** 若抽象函数以三角函数为中间变量, 则虽然等式一端为  $f(\sin x)$ , 另一端为  $f(\sin u)$ , 但由于  $f(\sin u) = f[\sin(\pi - u)]$ , 我们还是依据 (i) 而不是 (ii) 作代换, 显然此处应作代换  $x = \pi - u$ .

**【例 4.27】** 设  $f(x)$  连续, 证明:

$$(1) \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx;$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx;$$

$$(3) \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx;$$

$$(4) \int_0^1 \ln f(x+t) dt = \int_0^x \ln \frac{f(1+t)}{f(t)} dt + \int_0^1 \ln f(t) dt;$$

$$(5) \text{ 设 } n \text{ 为正整数, 证明 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x dx = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

**【分析】** (1)  $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} uf(u) du,$

比较  $f(x^2)$  与  $f(u)$ , 可知应令  $x^2 = u$ .

$$(2) \int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)u] du,$$

比较  $f(x)$  与  $f[a + (b-a)u]$ , 可知应令  $x = a + (b-a)u$ .

$$(3) \text{ 先证 } \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 2 \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx,$$

$$\text{即 } \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 2 \int_0^{\pi} f(|\cos u|) du,$$

比较  $f(|\cos x|) = f(|\cos u|) = f(|\cos(\pi + u)|)$ , 可知应令  $x = \pi + u$ ,

$$\text{再证 } \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx,$$

$$\text{即 } \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos(\pi - v)|) dv,$$

比较  $f(|\cos x|) = f(|\cos(\pi - v)|)$ , 可知应令  $x = \pi - v$ .

(4) 按一般的作法, 若抽象函数中, 中间变量含有参数, 则应令该中间变量为  $u$ , 因此,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln f(x+t) dt & \xrightarrow{\text{令 } x+t=u} \int_x^{x+1} \ln f(u) du \\ & = \int_x^0 \ln f(u) du + \int_0^1 \ln f(u) du + \int_1^{x+1} \ln f(u) du,\end{aligned}$$

比较要证的等式, 可知要证的是

$$\int_1^{x+1} \ln f(u) du = \int_0^x \ln f(1+t) dt,$$

显然, 应作变换  $u = 1+t$ .

$$(5) \text{ 先令 } t = 2x, \text{ 有 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x dx = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^n d(2x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\pi} \sin^n t dt,$$

$$\text{又 } \int_0^{\pi} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t dt, \text{ 再证 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt,$$

只需作换元  $t = \pi - u$ .

【证】(1)  $\int_0^a x^3 f(x^2) dx \xrightarrow{\text{令 } x^2=u} \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u f(u) du$ , 由于定积分与积分变量无关,

$$\text{故 } \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$$

(2) 略.

$$(3) \text{ 因为 } \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|) dx,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|) dx \xrightarrow{\text{令 } x=\pi+u} \int_0^{\pi} f(|\cos u|) du = \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx,$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx & = 2 \int_0^{\pi} f(|\cos x|) dx \\ & = 2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|) dx \right].\end{aligned}$$

$$\text{又因为 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|) dx \xrightarrow{\text{令 } x=\pi-v} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(|\cos v|) (-dv) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx,$$

$$\text{故 } \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx.$$

$$\begin{aligned}(4) \text{ 因为 } \int_0^1 \ln f(x+t) dt & \xrightarrow{\text{令 } x+t=u} \int_x^{x+1} \ln f(u) du \\ & = \int_x^0 \ln f(u) du + \int_0^1 \ln f(u) du + \int_1^{x+1} \ln f(u) du,\end{aligned}$$

$$\text{又因为 } \int_1^{x+1} \ln f(u) du \xrightarrow{u=t+1} \int_0^x \ln f(t+1) dt,$$

$$\text{所以 } \int_0^1 \ln f(x+t) dt = \int_0^x \ln \frac{f(t+1)}{f(t)} dt + \int_0^1 \ln f(t) dt.$$

(5) 令  $t = 2x$ , 有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x dx & = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^n d2x = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{\pi} \sin^n t dt \\ & = \frac{1}{2^{n+1}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t dt \right),\end{aligned}$$

$$\text{又 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t dt \stackrel{t=\pi-u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\pi-u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u du,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x dx &= \frac{1}{2^{n+1}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

$$\text{又 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$$

$$\text{因此, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^n x dx = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

【例 4.28】证明下列等式:

$$(1) \int_0^a x \{f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)]\} dx = a \int_0^a f[\varphi(a-x)] dx;$$

$$(2) \int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} \quad (x > 0).$$

【分析】(1) 原式等价于

$$\int_0^a x f[\varphi(x)] dx = \int_0^a (a-x) f[\varphi(a-x)] dx = \int_0^a (a-u) f[\varphi(a-u)] du,$$

可见应作代换  $x = a - u$ .

$$(2) \int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2},$$

比较  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  与  $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$ , 可知形式一致, 因此作变换只能从两端的积分限去考虑: 左端积分限为  $x, 1$ ; 右端积分限为  $1, \frac{1}{x}$ . 可见应作代换  $x = \frac{1}{u}$ .

$$\text{【证】}(1) \int_0^a x f[\varphi(x)] dx \stackrel{\text{令 } x=a-u}{=} \int_a^0 (a-u) f[\varphi(a-u)] (-du)$$

$$= a \int_0^a f[\varphi(a-u)] du - \int_0^a u f[\varphi(a-u)] du$$

$$= a \int_0^a f[\varphi(a-x)] dx - \int_0^a x f[\varphi(a-x)] dx,$$

把后一项移到等式左端, 便得

$$\int_0^a x \{f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)]\} dx = a \int_0^a f[\varphi(a-x)] dx.$$

$$(2) \int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{\text{令 } x=\frac{1}{u}}{=} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2} du\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^2+1} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

【例 4.29】设函数  $f(x)$  连续, 且关于  $x = T$  对称,  $a < T < b$ . 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx.$$

【分析】 $f(x)$  关于  $x = T$  对称, 是指  $f(x+T) = f(T-x)$ ,

$$\text{右边} = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{2T-b} f(x) dx$$

$$= \int_a^b f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx,$$

可知,要证命题成立,只需证

$$\int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx = 0,$$

即证

$$\int_T^{2T-b} f(x) dx = - \int_T^b f(u) du = \int_b^T f(u) du,$$

比较左右两端的积分限,可知应作代换  $x = 2T - u$ .

$$\begin{aligned} \text{【证】} \int_T^{2T-b} f(x) dx & \xrightarrow{\text{令 } x = 2T - u} \int_T^b f(2T - u) (-du) = - \int_T^b f[T - (u - T)] du \\ & \xrightarrow[\text{因为 } f(x) \text{ 关于 } x = T \text{ 对称}]{\text{因为 } f(x) \text{ 关于 } x = T \text{ 对称}} \int_T^b f[T + (u - T)] du = - \int_T^b f(u) du = - \int_T^b f(x) dx, \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx = 0,$$

等式两边同加上  $\int_a^b f(x) dx$ , 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^b f(x) dx + \int_T^{2T-b} f(x) dx \\ &= 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx, \end{aligned}$$

命题得证.

**【例 4.30】** 设  $f(x)$  是定义在全数轴上, 且以  $T$  为周期的连续函数,  $a$  为任意常数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

**【分析】** 原等式  $\Leftrightarrow \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ ,

可见要证命题成立, 只需  $\int_a^0 f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = 0$ ,

$$\text{即证} \quad \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(u) du,$$

比较两端的积分限, 可知应作变换  $x = u + T$ .

$$\begin{aligned} \text{【证】} \text{因为} \int_T^{a+T} f(x) dx & \xrightarrow{\text{令 } x = u + T} \int_0^a f(u + T) du \\ &= \int_0^a f(x + T) dx \xrightarrow[\text{因为 } f(x) \text{ 以 } T \text{ 为周期}]{f(x + T) = f(x)} \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \int_a^0 f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = 0,$$

等式两端各加上  $\int_0^T f(x) dx$ , 于是得

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx,$$

命题得证.

**【例 4.31】** 设  $f(x)$  连续, 且常数  $a > 0$ , 证明:

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

【分析】 $\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u},$

比较  $f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)$  与  $f\left(u + \frac{a^2}{u}\right)$  可知应令  $x^2 = u$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} &= \int_1^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \int_1^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^a f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_a^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u}, \end{aligned}$$

与欲证的等式右端比较, 可知须证

$$\int_a^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} = \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t},$$

比较上式两端的积分限, 可知应令  $u = \frac{a^2}{t}$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} &\stackrel{\text{令 } u = \frac{a^2}{t}}{=} \int_a^1 f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \cdot \frac{t}{a^2} \left(-\frac{a^2}{t^2} dt\right) \\ &= \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

【证】因为  $\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} \stackrel{\text{令 } x^2 = u}{=} \int_1^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \cdot \frac{du}{2u}$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_1^a f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} + \int_a^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} \right].$$

又因为  $\int_a^{a^2} f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} \stackrel{\text{令 } u = \frac{a^2}{t}}{=} \int_a^1 f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \cdot \frac{t}{a^2} \left(-\frac{a^2}{t^2} dt\right)$

$$= \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^a f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u},$$

所以  $\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x},$

命题得证.

## 2. 分部积分法 (适用于被积函数中含有 $f'(x)$ 或变限积分的命题)

【例 4.32】设  $f'(x)$  连续,  $F(x) = \int_0^x f(t) f'(2a-t) dt$ , 证明:

$$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a).$$

【证】 $F(2a) - 2F(a) = \int_0^{2a} f(t) f'(2a-t) dt - 2 \int_0^a f(t) f'(2a-t) dt$

$$= \int_a^{2a} f(t) f'(2a-t) dt - \int_0^a f(t) f'(2a-t) dt,$$

因为  $\int_a^{2a} f(t) f'(2a-t) dt = -f(t) f(2a-t) \Big|_a^{2a} + \int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt$

$$= f^2(a) - f(0)f(2a) + \int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt,$$

所以原式  $= f^2(a) - f(0)f(2a) + \int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt - \int_0^a f(t) f'(2a-t) dt,$



$$\begin{aligned}
 &\text{又因为} \quad \int_a^{2a} f(2a-t)f'(t)dt \xrightarrow{\text{令 } 2a-t=u} \int_a^0 f(u)f'(2a-u)(-du) \\
 &\quad = \int_0^a f(u)f'(2a-u)du = \int_0^a f(t)f'(2a-t)dt,
 \end{aligned}$$

故

$$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a).$$

【例 4.33】若  $f(x)$  是连续函数, 则

$$\int_0^x \left[ \int_0^u f(t)dt \right] du = \int_0^x (x-u)f(u)du.$$

$$\begin{aligned}
 \text{【证】} \quad \int_0^x \left[ \int_0^u f(t)dt \right] du &= u \int_0^u f(t)dt \Big|_0^x - \int_0^x uf(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x uf(u)du \\
 &= x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du = \int_0^x (x-u)f(u)du.
 \end{aligned}$$

【例 4.34】当  $x \geq 0$  时,  $f_0(x) > 0$ , 若令  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt \quad (n=1, 2, \dots)$ 

$$\text{则 } f_n(x) \text{ 可表示为 } f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f_0(t)dt.$$

【证】因为  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt$ ,

$$\text{所以 } f'_n(x) = f_{n-1}(x), \quad \text{且 } f_n(0) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\begin{aligned}
 \text{右式} &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f_0(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f'_1(t)dt \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} f_1(t) \Big|_0^x + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} f_1(t)dt \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} f'_2(t)dt \\
 &= \frac{1}{(n-2)!} (x-t)^{n-2} f_2(t) \Big|_0^x + \frac{1}{(n-3)!} \int_0^x (x-t)^{n-3} f_2(t)dt \\
 &= \frac{1}{(n-3)!} \int_0^x (x-t)^{n-3} f'_3(t)dt \\
 &= \dots = \int_0^x (x-t) f_{n-2}(t)dt \\
 &= \int_0^x (x-t) f'_{n-1}(t)dt = (x-t) f_{n-1}(t) \Big|_0^x + \int_0^x f_{n-1}(t)dt = f_n(x).
 \end{aligned}$$

3. 构造辅助函数法 (适用于证明在积分限中至少存在一点  $\xi$  或  $x_0$ , 使等式成立的命题)证题思路:

- (1) 将  $\xi$  或  $x_0$  改成  $x$ , 移项使等式一端为零, 则另一端即为所作的辅助函数  $F(x)$  或  $F'(x)$ ;
- (2) 验证  $F(x)$  满足介值定理或微分中值定理的条件;
- (3) 由介值或微分中值定理, 即可证得命题.

【例 4.35】设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x)dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

【分析】若令  $f(x) \int_x^b g(t)dt - g(x) \int_a^x f(t)dt = F(x)$ , 则再往下做就困难了,

$$\text{若令} \quad F'(x) = f(x) \int_x^b g(t)dt - g(x) \int_a^x f(t)dt,$$

则

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt,$$

不难验证该函数在  $[a, b]$  上满足罗尔定理的条件.

**【证】** 作辅助函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt$ , 由于  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 并有  $F(a) = F(b) = 0$ ,

由罗尔定理有  $F'(\xi) = 0, \xi \in (a, b)$ ,

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \left[ \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt \right]' \Big|_{x=\xi} &= \left[ f(x) \int_x^b g(t) dt - \int_a^x f(t) dt \cdot g(x) \right] \Big|_{x=\xi} \\ &= f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx - g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx = 0, \end{aligned}$$

亦即

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

**【例 4.36】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(x) > 0, f(a) > 0$ , 试证: 对于图 4-5 所示的两个面积函数  $A(x)$  和  $B(x)$ , 存在唯一的  $\xi \in (a, b)$ ,

$$\text{使得} \quad \frac{A(\xi)}{B(\xi)} = 1994.$$

**【分析】** 把上式中的  $\xi$  改为  $x$ , 则  $A(x) = 1994B(x)$ ,

$$\text{因为} \quad A(x) = f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt,$$

$$B(x) = \int_x^b f(t) dt - f(x)(b-x),$$

所以可令辅助函数  $F(x)$  为

$$\begin{aligned} F(x) &= A(x) - 1994B(x) \\ &= f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt - 1994 \left[ \int_x^b f(t) dt - f(x)(b-x) \right]. \end{aligned}$$

**【证】** 令  $F(x) = f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt - 1994 \left[ \int_x^b f(t) dt - f(x)(b-x) \right]$ ,

$$F'(x) = f'(x)(x-a) + 1994f'(x)(b-x) > 0 \quad (\text{因为 } f'(x) > 0),$$

可知  $F(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加, 故  $F(x)$  在  $(a, b)$  内至多有一个零点.

又因为

$$f'(x) > 0, f(x) \nearrow,$$

所以

$$\begin{aligned} F(a) &= -1994 \left[ \int_a^b f(t) dt - f(a)(b-a) \right] \\ &= -1994 \int_a^b [f(t) - f(a)] dt < 0, \end{aligned}$$

$$F(b) = f(b)(b-a) - \int_a^b f(t) dt = \int_a^b [f(b) - f(t)] dt > 0,$$

由闭区间上连续函数的零值定理, 可知  $F(x)$  在  $(a, b)$  内至少有一个零点.

综上所述, 可知  $F(x)$  在  $(a, b)$  内有唯一的零点  $\xi$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $\frac{A(\xi)}{B(\xi)} = 1994$ .

**【例 4.37】** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $g(x) \neq 0, x \in [a, b]$ , 试证: 至少存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx \Big/ \int_a^b g(x) dx = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

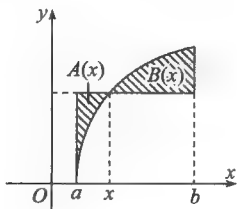


图 4-5

【分析】令

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

于是

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx, \quad G(b) = \int_a^b g(x) dx,$$

$$\text{结论} \Rightarrow \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}, \text{把 } \xi \text{ 换成 } x$$

$$\Rightarrow \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow F(b)g(x) = G(b)f(x)$$

$$\Rightarrow F(b) \int_a^x g(t) dt = G(b) \int_a^x f(t) dt,$$

$$\text{辅助函数 } W(x) = F(b) \int_a^x g(t) dt - G(b) \int_a^x f(t) dt.$$

【证】由题设条件, 显然  $W(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

由变上限积分定理知  $W(x)$  在  $(a, b)$  上可导,

$$\text{又 } W(a) = 0,$$

$$W(b) = F(b)G(b) - G(b)F(b) = 0,$$

由罗尔定理知在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $W'(\xi) = 0$ ,

$$\text{即 } F(b)g(\xi) - G(b)f(\xi) = 0, \quad \text{亦即 } \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

故

$$\int_a^b f(x) dx / \int_a^b g(x) dx = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

【另证】用柯西中值定理.

4. 泰勒公式法 (适用于被积函数  $f(x)$  具有二阶或二阶以上连续导数的命题)

证题思路:

$$(1) \text{ 作辅助函数 } F(x) = \int_a^x f(t) dt;$$

(2) 将  $F(x)$  在所需点处 (一般是根据右边表达式确定展开点) 进行泰勒展开;

(3) 对泰勒余项作适用处理 (一般是利用介值定理).

【例 4.38】设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 证明在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

【证】令  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则有

$$F(a) = 0, F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x), F'''(x) = f''(x),$$

$F(x)$  在  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  处的二阶泰勒公式为

$$\begin{aligned} F(x) &= F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!}F'''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \\ &= F\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3, \end{aligned}$$

其中,  $\xi$  在  $x$  与  $\frac{a+b}{2}$  之间.

分别将  $x = b, x = a$  代入上式, 并相减, 则得

$$F(b) - F(a) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2},$$

其中,  $\xi_1, \xi_2$  分别在  $\frac{a+b}{2}$  与  $b, a$  与  $\frac{a+b}{2}$  之间.

不妨设  $f''(\xi_1) \leq f''(\xi_2)$ , 则  $f''(\xi_1) \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq f''(\xi_2)$ ,

考虑到  $f''(x)$  的连续性及其介值定理, 可知在  $\xi_1, \xi_2$  之间至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2},$$

故  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$ .

### 题型九 定积分不等式的证明

**提示** 常用定理: 定积分的比较定理, 估值定理, 函数的单调增减性, 微分与积分中值定理, 泰勒公式.

常用不等式: (1)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ; (2)  $a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$ ;

(3) 柯西不等式  $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$ .

下面根据被积函数的连续性、可导性、二阶和二阶以上可导性, 分别给出证题的思路.

#### 1. 仅告知被积函数连续的命题的证法

一般来讲, 这类命题的证明要做辅助函数(或者说用辅助函数法简便).

辅助函数的作法: 将要证结论中的积分上限(或下限)换成  $x$ , 式中相同的字母也换成  $x$ , 移项使不等式一端为 0, 则另一端的表达式即为所作的辅助函数  $F(x)$ .

**这类命题的证题思路:**

(1) 作辅助函数  $F(x)$ ;

(2) 求  $F(x)$  的导数  $F'(x)$ , 并判别  $F(x)$  的单调性;

(3) 求  $F(x)$  的积分区间  $[a, b]$  的端点值  $F(a), F(b)$ , 其中必有一个为“0”, 由第(2)条思路可推出  $F(b) > F(a)$  [或  $F(b) < F(a)$ ], 从而得出命题的证明.

**【例 4.39】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx.$$

**【分析】** 把结论中的  $b$  换成  $x$ , 移项, 得

$$\left[\int_a^x f(t)dt\right]^2 - (x-a) \int_a^x f^2(t)dt \leq 0,$$

$$\text{令 } F(x) = \left[\int_a^x f(t)dt\right]^2 - (x-a) \int_a^x f^2(t)dt.$$

**【证】方法一:** 令  $F(x) = \left[\int_a^x f(t)dt\right]^2 - (x-a) \int_a^x f^2(t)dt$ ,

$$\begin{aligned}
\text{因为 } F'(x) &= 2 \int_a^x f(t) dt \cdot f(x) - \int_a^x f^2(t) dt - (x-a)f^2(x) \\
&= \int_a^x 2f(x)f(t) dt - \int_a^x f^2(t) dt - \int_a^x f^2(x) dt \\
&= - \int_a^x [f^2(t) - 2f(x)f(t) + f^2(x)] dt = - \int_a^x [f(t) - f(x)]^2 dt \leq 0,
\end{aligned}$$

所以  $F(x)$  单调递减,  $x \in [a, b]$ .

又因为  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \leq F(a) = 0$ ,

$$\text{故} \quad \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

方法二: 用柯西不等式

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b 1^2 dx = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

【例 4.40】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且严格单增, 证明:

$$(a+b) \int_a^b f(x) dx < 2 \int_a^b x f(x) dx.$$

【证】作辅助函数

$$F(x) = (a+x) \int_a^x f(t) dt - 2 \int_a^x t f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
\text{因为 } F'(x) &= \int_a^x f(t) dt + (a+x)f(x) - 2xf(x) \\
&= \int_a^x f(t) dt + (a-x)f(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f(x) dt \\
&= \int_a^x [f(t) - f(x)] dt < 0,
\end{aligned}$$

(因  $t \leq x$ , 且  $f(x)$  严格单调增, 即  $f(t) < f(x)$ )

所以  $F(x)$  单调递减, 又  $F(a) = 0$ ,

$$\text{故 } F(b) < F(a) = 0. \quad \text{即} \quad (a+b) \int_a^b f(x) dx < 2 \int_a^b x f(x) dx.$$

【例 4.41】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ . 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

【证】作辅助函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^x \frac{dt}{f(t)} - (x-a)^2$ ,

$$\begin{aligned}
\text{因为 } F'(x) &= f(x) \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt + \int_a^x f(t) dt \cdot \frac{1}{f(x)} - 2(x-a) \\
&= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)} dt + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)} dt - \int_a^x 2 dt \\
&= \int_a^x \left( \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2 \right) dt \geq 0 \quad \left( \text{因为 } f(x) > 0, \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geq 2 \right),
\end{aligned}$$

所以  $F(x)$  单调递增.

又因为  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \geq F(a) = 0$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

【例 4.42】设  $f(x), g(x)$  均为  $[a, b]$  上的连续增函数 ( $a, b > 0$ ), 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

【证】作辅助函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^x g(t) dt - (x-a) \int_a^x f(t) g(t) dt$ ,

$$\begin{aligned} \text{因为 } F'(x) &= f(x) \int_a^x g(t) dt + g(x) \int_a^x f(t) dt - \int_a^x f(t) g(t) dt - (x-a) f(x) g(x) \\ &= \int_a^x f(x) g(t) dt + \int_a^x g(x) f(t) dt - \int_a^x f(t) g(t) dt - \int_a^x f(x) g(x) dt \\ &= \int_a^x [f(x) g(t) + g(x) f(t) - f(t) g(t) - f(x) g(x)] dt \\ &= - \int_a^x [f(x) - f(t)][g(x) - g(t)] dt < 0 \quad (\text{因为 } f(x), g(x) \text{ 均为增函数}) \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  单调递减.

又因为  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) \leq F(a) = 0$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx - (b-a) \int_a^b f(x) g(x) dx \leq 0,$$

$$\text{所以 } \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \leq (b-a) \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

【例 4.43】设  $y = f(x)$  是在  $[0, +\infty)$  上严格单调增加的可导函数, 且  $f(0) = 0$ , 它的反函数为  $x = g(y)$ , 证明:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy \geq ab \quad (a, b > 0).$$

【证】由已知得,  $g[f(x)] = x, f[g(y)] = y, x = g(y)$  严格单调增加,

当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \geq f(0) = 0, g(y) \geq g(0) = g[f(0)] = 0$ .

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy = \int_0^a f(x) dx + \int_0^{g(b)} g[f(x)] df(x)$$

(代入  $y = f(x), x = g(y), y = b, x = g(b)$ )

$$= \int_0^a f(x) dx + \int_0^{g(b)} x df(x) = \int_0^a f(x) dx + x f(x) \Big|_0^{g(b)} - \int_0^{g(b)} f(x) dx$$

$$= bg(b) + \int_0^a f(x) dx - \int_0^{g(b)} f(x) dx.$$

$$(1) \text{ 如果 } g(b) = a, \text{ 有 } \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy = ab.$$

(2) 如果  $g(b) > a$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy &= bg(b) - \int_a^{g(b)} f(x) dx \\ &> bg(b) - f[g(b)][g(b) - a] = bg(b) - b[g(b) - a] \\ &= ab. \end{aligned}$$

( $x \leq g(b), f(x) \leq f[g(b)]$ )

(3) 如果  $g(b) < a$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy &= bg(b) + \int_{g(b)}^a f(x) dx \\ &> bg(b) + f[g(b)][a - g(b)] = ab. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy \geq ab \quad (a, b > 0).$$

2. 已知被积函数  $f(x)$  一阶可导, 又至少一个端点的函数值为 0 ( $f(a) = 0$  或  $f(b) = 0$ ) 的命题的证法

(I) 证题思路之一:

(1) 写出含这个端点的拉格朗日中值定理

$$f(x) = f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi) \quad (f(a) = 0),$$

$$\text{或} \quad f(x) = f(x) - f(b) = (x-b)f'(\xi) \quad (f(b) = 0);$$

(2) 再根据题意进行不等式的放缩;

(3) 用定积分的比较定理, 估值定理或函数的绝对值不等式等定积分性质作分析处理.

**【例 4.44】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'(x) \leq M, f(a) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

**【证】** 由题设可知, 对  $\forall x \in [a, b], f(x)$  在  $[a, b]$  上满足拉氏微分中值定理, 于是有

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \xi \in (a, x),$$

因为  $f'(x) \leq M$ , 所以  $f(x) \leq M(x-a)$ . 由定积分比较定理, 有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M(x-a) dx = \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

**【例 4.45】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不恒为零, 且其导数  $f'(x)$  连续, 并且有  $f(a) = f(b) = 0$ . 试证:

$$\text{存在一个 } \xi \in [a, b], \text{ 使 } |f'(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx.$$

**【证】** 因为  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $|f'(x)|$  在  $[a, b]$  上连续.

于是, 存在一个  $\xi$ , 使得  $|f'(\xi)| = M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ .

又由题设有

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a) \quad (a < \xi_1 < x)$$

$$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b) \quad (x < \xi_2 < b)$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq M(x-a), \quad |f(x)| \leq M(b-x),$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx$$

$$\leq M \left[ \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) dx \right] = \frac{(b-a)^2}{4} M,$$

$$\text{又 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx, \text{ 所以 } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M, \text{ 即}$$

$$M \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx.$$

故

$$|f'(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx.$$

(II) 证题思路之二:

(1) 写出等式

$$f(x) \stackrel{\text{当 } f(a)=0 \text{ 时}}{=} f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt,$$

或

$$f(x) - f(\xi) = \int_{\xi}^x f'(t) dt.$$

(2) 利用定积分比较定理、估值定理或绝对值不等式进行分析处理.

【例 4.46】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $f(a) = 0$ , 试证:

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

【证】 $f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$ , 于是由柯西不等式

$$f^2(x) = \left[ \int_a^x f'(t) dt \right]^2 \leq \int_a^x dt \int_a^x [f'(t)]^2 dt \leq (x-a) \int_a^b [f'(t)]^2 dt,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_a^b f^2(x) dx &\leq \int_a^b \left\{ (x-a) \int_a^b [f'(t)]^2 dt \right\} dx = \int_a^b (x-a) dx \int_a^b [f'(t)]^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

【例 4.47】设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导函数. 证明: 对于  $x \in [0, 1]$ , 有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 [|f(t)| + |f'(t)|] dt.$$

【证】因为  $f(t)$  连续,  $|f(t)|$  也连续, 所以由积分中值定理有

$$\int_0^1 |f(t)| dt = |f(\xi)|, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\text{又 } f(x) - f(\xi) = \int_{\xi}^x f'(t) dt, \quad \text{即 } f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^x f'(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |f(x)| &\leq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^x f'(t) dt \right| \leq |f(\xi)| + \int_{\xi}^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(\xi)| + \int_0^1 |f'(t)| dt, \end{aligned}$$

$$\text{故 } |f(x)| \leq \int_0^1 [|f(t)| + |f'(t)|] dt.$$

【例 4.48】设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶连续导数, 证明: 对任意的  $x_1 \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $x_2 \in (\frac{2}{3}, 1)$  有

$$|f'(x)| \leq 3 |f(x_2) - f(x_1)| + \int_0^1 |f''(x)| dx.$$

【证】对任意的  $x_1 \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $x_2 \in (\frac{2}{3}, 1)$ ,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

$$\text{又 } x_2 - x_1 \geq \frac{1}{3}, \text{ 所以, } |f'(\xi)| \leq 3 |f(x_2) - f(x_1)|.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |f'(x)| - |f'(\xi)| &\leq |f'(x) - f'(\xi)| = \left| \int_{\xi}^x f''(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\xi}^x |f''(t)| dt \quad (\text{或 } \int_x^{\xi} |f''(t)| dt) \\ &\leq \int_0^1 |f''(x)| dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } |f'(x)| &\leq |f'(\xi)| + \int_0^1 |f''(x)| dx \\ &\leq 3 |f(x_2) - f(x_1)| + \int_0^1 |f''(x)| dx. \end{aligned}$$

3. 已知被积函数  $f(x)$  二阶或二阶以上可导, 且又知最高阶导数的符号的命题的证法

证题思路: 直接写出  $f(x)$  的泰勒展开式(证明定积分等式是将辅助函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$



展成泰勒公式), 然后根据题意对展开式进行放缩.

【例 4.49】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加, 且  $f''(x) > 0$ , 证明:

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (1)$$

【证】先证左端不等式  $(b-a)f(a) < \int_a^b f(x) dx$  成立.

由题设, 对  $\forall x \in [a, b]$ , 当  $x > a$  时,  $f(x) > f(a)$ , 故

$$\int_a^b f(x) dx > (b-a)f(a). \quad (2)$$

再证右端不等式成立.

对  $\forall t \in [a, b]$ ,  $f(t)$  在点  $x$  处的泰勒展开式为

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(t-x)^2, \text{ 其中, } \xi \text{ 在 } t \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

因为  $f''(\xi) > 0$ ,

$$\text{所以 } f(t) > f(x) + f'(x)(t-x). \quad (3)$$

将  $t = b, t = a$  分别代入 (3) 式并相加, 得

$$f(b) + f(a) > 2f(x) + (a+b)f'(x) - 2xf'(x). \quad (4)$$

对 (4) 的两边在  $[a, b]$  上积分, 则

$$\begin{aligned} [f(b) + f(a)](b-a) &> 2 \int_a^b f(x) dx + (a+b) \int_a^b f'(x) dx - 2 \int_a^b xf'(x) dx \\ &\Rightarrow 2[f(b) + f(a)](b-a) > 4 \int_a^b f(x) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

故  $\int_a^b f(x) dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ , 由 (2), (5) 可知 (1) 成立.

### 题型十 计算反常积分

【提示】(1) 区别类型(无穷积分, 瑕积分), 对既有无穷积分又有瑕积分的混合型, 一定要先进行

分解, 使各单个积分为只有一个瑕点的瑕积分, 或只有一个积分限为无穷的无穷积分;

(2) 求出被积函数的原函数;

(3) 按定义求出各反常积分的值;

(4) 求出(3)所得各值的代数和.

【例 4.50】求下列反常积分:

$$\begin{aligned} (1) & \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)^2} dx; & (2) & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx; \\ (3) & \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx; & (4) & \int_1^e \frac{1}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)^2} \xrightarrow{\text{令 } 1+e^x=u} \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^2(u-1)} \\ &= \int_2^{+\infty} \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= \left( \ln |u-1| - \ln |u| + \frac{1}{u} \right) \Big|_2^{+\infty} \end{aligned}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{u-1}{u} + \frac{1}{u} \right) + \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} = 0$ , 所以  $x=0$  不是奇点.

由于  $F(x) = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2}$ , 则  $F(0)$  没有意义;

所以对于  $x=0$  按奇点处理.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \left[ -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1+x^2} \right] \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{x^2 \ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1+x^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

(4)  $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \infty$ ,  $x=e$  为奇点.

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_1^e \frac{1}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}} dx &= \int_1^e \frac{d \ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin(\ln x) \Big|_1^e \\ &= \lim_{x \rightarrow e^-} \arcsin(\ln x) - \arcsin(\ln 1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 题型十一 反常积分的敛散

**提示** 有两种方法:直接法,即由敛散性的定义判别;间接法,即由判别准则判别.绝大多数情况下用判别准则判别.

**【例 4.51】** 判别下列反常积分的敛散性:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{3x^4-x^2+1} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \quad (3) \int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx; \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

**【解】** (1) 因为  $f(x) \sim \frac{1}{3x^2}$  (当  $x \rightarrow +\infty$  时), 而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  收敛,

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{3x^4-x^2+1} dx$  收敛.

(2) 因为  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ , 而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  收敛,

所以  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  收敛.

(3) 因为  $f(x) = \frac{1}{\ln x} \rightarrow \infty$  (当  $x \rightarrow 1$  时), 所以  $x = 1$  为瑕点,

当  $0 < x < 1$  时,  $\ln x < 0$ , 为了能用前面所讲的判别准则,

不妨考虑  $\int_0^1 \frac{1}{-\ln x} dx$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \frac{1}{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1, m = 1$ ,

所以  $\int_0^1 \frac{1}{-\ln x} dx$  发散, 故  $\int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx$  发散.

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = +\infty$ , 所以  $x = 0$  为瑕点.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{5}{6}} \frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} = 0$ ,

所以  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$  收敛, 即  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$  收敛.

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势 1** 在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时, 要立刻想到先用积分中值定理对该积分式进行处理.

**【例 4.52】** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right), 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$ , 证明: 存在一个  $\xi \in (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**【证】**  $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta), \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$  (积分中值定理),

于是  $f(x)$  在  $[\eta, 2] \subset [0, 2]$  上满足罗尔定理, 即存在一个  $\xi_1 \in (\eta, 2)$ , 使

$$f'(\xi_1) = 0;$$

又  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上满足罗尔定理, 即存在一个  $\xi_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使

$$f'(\xi_2) = 0,$$

则  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ .

由于  $f'(x)$  在  $[\xi_2, \xi_1]$  上满足罗尔定理, 于是存在  $\xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**思维定势 2** 对定限或变限积分, 若被积分函数或其主要部分为复合函数, 要立刻想到先做变量替换使之成为简单形式  $f(u)$ .

**【例 4.53】** 求下列函数的导数 (设  $f(u)$  是  $u$  的连续函数):

$$(1) F(y) = \int_0^y f(x-y) dx;$$

$$(2) F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt.$$

【解】(1) 令  $u = x - y$ , 则

$$F(y) = \int_0^y f(x-y) dx = \int_{-y}^0 f(u) du,$$

则

$$F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y).$$

(2) 令  $u = x - t$ , 则

$$F(x) = \int_x^{x^2} (x-u)f(u)(-du) = -x \int_x^{x^2} f(u) du + \int_x^{x^2} u f(u) du,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= - \int_x^{x^2} f(u) du - x[f(x-x^2)(1-2x) - f(x)] + \\ &\quad (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

**思维定势 3** 对称区间上定积分的计算, 要想到利用被积函数的奇偶性简化计算.

【例 4.54】设  $f(x)$  在  $[-a, a]$ ,  $a \geq 0$  上连续, 计算

$$I = \int_{-a}^a [(x + e^{\cos x})f(x) + (x - e^{\cos x})f(-x)] dx.$$

$$\text{【解】} I = \int_{-a}^a \{x[f(x) + f(-x)] + e^{\cos x}[f(x) - f(-x)]\} dx$$

$$= \int_{-a}^a x[f(x) + f(-x)] dx + \int_{-a}^a e^{\cos x}[f(x) - f(-x)] dx$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

(因为  $x[f(x) + f(-x)]$  和  $e^{\cos x}[f(x) - f(-x)]$  在  $[-a, a]$  上为奇函数)

【例 4.55】计算定积分  $\int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx$ .

【解】显然  $f(x) = x \ln(1 + e^x)$  非奇非偶, 所以

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx &= \int_0^2 [f(x) + f(-x)] dx \\ &= \int_0^2 [x \ln(1 + e^x) - x \ln(1 + e^{-x})] dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

## 二、综合题解析

【例 4.56】设函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$ . 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} = \frac{1}{2n} f'(0).$$

$$\text{【证】} F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x^n - t^n} \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du,$$

于是

$$F'(x) = x^{n-1} f(x^n),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n}$$

$$= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) - f(0)}{x^n - 0} = \frac{1}{2n} f'(0).$$

【例 4.57】设  $\varphi(t)$  是正值连续函数,  $f(x) = \int_a^x |x-t| \varphi(t) dt$ ,  $-a \leq x \leq a$  ( $a > 0$ ),

证明: 曲线  $y = f(x)$  在  $[-a, a]$  上是凹的.

【证】
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_x^a (t-x)\varphi(t)dt \\ &= x \int_{-a}^x \varphi(t)dt - \int_{-a}^x t\varphi(t)dt + \int_x^a t\varphi(t)dt - x \int_x^a \varphi(t)dt, \\ f'(x) &= \int_{-a}^x \varphi(t)dt + x\varphi(x) - x\varphi(x) - x\varphi(x) - \int_x^a \varphi(t)dt + x\varphi(x) \\ &= \int_{-a}^x \varphi(t)dt + \int_x^a \varphi(t)dt, \\ f''(x) &= \varphi(x) + \varphi(x) = 2\varphi(x) > 0, \end{aligned}$$

故曲线  $y = f(x)$  在  $[-a, a]$  上是凹的.

【例 4.58】设函数  $f(x), g(x)$  满足  $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$ , 且  $f(0) = 0, g(0) = 2$ ,

$$\text{求 } \int_0^\pi \left[ \frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx.$$

【解】由  $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$ ,

$$\text{得 } f''(x) = 2e^x - f(x), \text{ 于是有 } \begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x, \\ f(0) = 0, f'(0) = 2. \end{cases}$$

解方程得  $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$ .

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_0^\pi \left[ \frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx &= \int_0^\pi \frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^\pi d \frac{f(x)}{1+x} = \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^\pi = \frac{1+e^\pi}{1+\pi}. \end{aligned}$$

#### 习 题 四

1. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明: 对于任意选定的连续函数  $\Phi(x)$ , 均有  $\int_a^b f(x)\Phi(x)dx = 0$ , 则在  $[a, b]$  上,  $f(x) = 0$ .

2. 设  $\lambda$  为任意实数, 证明:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot x)^\lambda} dx = \frac{\pi}{4}$ .

3. 已知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 对任意  $x, y$  都有  $|f(x) - f(y)| < M|x - y|$ , 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

4. 设  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ,  $n$  为大于 1 的正整数, 证明:  $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ .

5. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且单调减少,  $f(x) > 0$ , 证明: 对于满足  $0 < \alpha < \beta < 1$  的任何  $\alpha, \beta$ , 有

$$\beta \int_0^a f(x) dx > \alpha \int_a^\beta f(x) dx.$$

6. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f''(x) < 0$ , 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

7. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且单调不减, 证明: 任给  $\alpha \in (0, 1)$ , 有

$$\int_0^a f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续的二阶导数, 且  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 证明: 在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{6} (b-a)^3 f''(\xi).$$

9. 设  $f$  连续, 证明:  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f'(x)$  在  $[a, b]$  内存在且可积,  $f(a) = f(b) = 0$ , 试证:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx, (a < x < b).$$

11. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有二阶连续导数  $f''(x)$ , 且  $f(0) = f(1) = 0, f(x) \neq 0$ , 试证:

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4.$$

12. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 则

$$\ln \left[ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right] \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx.$$

13. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有一阶连续导数, 且  $f(1) - f(0) = 1$ , 试证:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1.$$

14. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 且  $\int_0^2 f(x) dx = 0, \int_0^2 x f(x) dx = a > 0$ ,

证明:  $\exists \xi \in [0, 2]$ , 使  $|f(\xi)| \geq a$ .

15. 计算下列反常积分.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^{\frac{1}{3}}} dx; & \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx; & \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ (4) \int_0^1 \sin(\ln x) dx; & \quad (5) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx; & \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx. \end{aligned}$$

16. 判别下列反常积分的敛散性.

$$\begin{aligned} (1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 + 4}} dx; & \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^3 + 4} dx; & \quad (3) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{3 + 2x^3} dx; \\ (4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx; & \quad (5) \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{(2-x)^2} dx; & \quad (6) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx. \end{aligned}$$

## 参 考 答 案

1. 令  $\Phi(x) = f(x)$ , 利用反证法.

2.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^\lambda}{(\sin x)^\lambda + (\cos x)^\lambda} dx$ , 令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , 两积分相加.

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left| x - \frac{k}{n} \right| dx = M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( \frac{k}{n} - x \right) dx = \frac{M}{2n}.
 \end{aligned}$$

4. 因为  $\tan^{n+2} x \leq \tan^n x \leq \tan^{n-2} x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ), 所以  $I_{n+2} < I_n < I_{n-2}$ .

$$\text{有 } 2I_n > I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d \tan x = \frac{1}{n+1},$$

$$2I_n < I_{n-2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \sec^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d \tan x = \frac{1}{n-1}.$$

5. 利用积分中值定理,  $\exists \xi \in (0, \alpha), \beta \int_0^\alpha f(x) dx = \alpha \beta f(\xi)$ ,

$\exists \eta \in (\alpha, \beta), \alpha \int_\alpha^\beta f(x) dx = \alpha(\beta - \alpha) f(\eta)$ , 由  $f(\xi) > f(\eta)$  即可证明.

注: 积分中值定理中的  $\xi$  可以在开区间内取到.

6. 略.

7. 原不等式等价于:  $(1 - \alpha) \int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx$ .

由积分中值定理,  $\exists \xi_1 \leq \alpha, (1 - \alpha) \int_0^\alpha f(x) dx = \alpha(1 - \alpha) f(\xi_1)$ ,

$\exists \xi_2 \geq \alpha, \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx = \alpha(1 - \alpha) f(\xi_2)$ ,

所以,  $\xi_2 \geq \xi_1, f(\xi_2) \leq f(\xi_1)$ , 即原不等式成立.

8. 略. 9. 略.

10. 因为  $f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$ ,  $f(x) = f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) dt$ ,

所以,  $|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt$ ,  $|f(x)| = \left| \int_b^x f'(t) dt \right| \leq \int_x^b |f'(t)| dt$  (因  $x < b$ ), 两式相加得,

$$2|f(x)| \leq \int_a^x |f'(t)| dt + \int_x^b |f'(t)| dt = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

11. 因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = f(1) = 0, f(x) \neq 0$ ,

所以,  $|f(x)|$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $|f(x)| \neq 0$ ,

因此,  $|f(x)|$  在  $(0, 1)$  内有最大值, 即  $\exists x_0 \in (0, 1)$ , 使  $|f(x_0)|$  为  $|f(x)|$  的最大值, 又

$$f(x_0) = f(x_0) - f(0) = f'(\xi_1)x_0, 0 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(x_0) = f(x_0) - f(1) = f'(\xi_2)(x_0 - 1), x_0 < \xi_2 < 1,$$

所以,  $f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)}{x_0}$ ,  $f'(\xi_2) = \frac{f(x_0)}{x_0 - 1}$ ,  $[\xi_1, \xi_2] \subset [0, 1]$ ,

$$\text{因此, } \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{1}{|f(x_0)|} \int_0^1 |f''(x)| dx > \frac{1}{|f'(x_0)|} \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)| dx$$

$$\geq \frac{1}{|f(x_0)|} \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx \right| = \frac{1}{|f(x_0)|} |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)| = \left| \frac{1}{x_0 - 1} - \frac{1}{x_0} \right|$$

$$= \frac{1}{x_0} + \frac{1}{1-x_0} = \frac{1}{x_0(1-x_0)} \geq \frac{4}{(x_0+1-x_0)^2} = 4.$$

12. 利用泰勒公式, 令  $x_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ,

$$\ln t = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(t-x_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\xi^2}(t-x_0)^2 \leq \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(t-x_0),$$

令  $t = f(x)$ , 两边对  $x$  积分即可.

13. 利用柯西不等式.

14. 由已知,  $|f(x)|$  在  $[0, 2]$  上连续, 故  $\exists \xi \in [0, 2]$ , 使  $|f(\xi)| \geq f(x), x \in [0, 2]$ .

$$\begin{aligned} a &= \left| \int_0^2 (x-1)f(x) dx \right| \leq \int_0^2 |x-1| |f(x)| dx \\ &= |f(\xi)| \int_0^2 |x-1| dx = |f(\xi)|. \end{aligned}$$

15. (1)  $\frac{3}{2}(e^2-1)^{\frac{2}{3}}$ ; (2)  $\frac{\pi}{12}$ ; (3) 2; (4)  $-\frac{1}{2}$ ; (5)  $\frac{\pi}{3}$ ; (6)  $\frac{\pi}{2}-1$ .

16. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 收敛.



## 第五章 微分中值定理

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

**定理1** (有界性) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 即存在  $M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, x \in [a, b]$ .

**定理2** (最值定理) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必能取得最大和最小值, 即存在  $\xi, \eta \in [a, b]$ , 使得  $M = f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, m = f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ , 即  $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ .

**定理3** (介值定理) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $\mu$  为介于  $f(a)$  与  $f(b)$  (或  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值  $M$  与最小值  $m$ ) 之间的任一实数, 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使  $\mu = f(\xi)$  (注意,  $\xi$  可取端点值).

**定理4** (零值定理) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a)$  与  $f(b)$  严格异号, 即  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$  (注意,  $\xi$  不可取端点值).

**定理5** (费尔马定理) 若函数  $f(x)$  满足以下条件:

- (1) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义, 并且在此邻域内恒有  $f(x) \leq f(x_0)$  或  $f(x) \geq f(x_0)$ ;
  - (2)  $f(x)$  在  $x_0$  处可导,
- 则有  $f'(x_0) = 0$ .

**定理6** (罗尔定理) 若函数  $f(x)$  满足以下条件:

- (1)  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续;
- (2)  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导;
- (3)  $f(a) = f(b)$ ,

则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**定理7** (拉格朗日中值定理) 若函数  $f(x)$  满足以下条件:

- (1)  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续;
- (2)  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导,

则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

或

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi),$$

或

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)], 0 < \theta < 1.$$

**推论:** 若  $f'(x) = 0, x \in [a, b]$ , 则  $f(x) = C, x \in [a, b]$  ( $C$  是常数).

**定理8** (柯西中值定理) 设函数  $f(x), g(x)$  满足以下条件:

(1)  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续;

(2)  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 且  $g'(x) \neq 0$ ,

则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, a < \xi < b$ .

**定理 9 (泰勒公式)** 设  $f(x)$  在  $x_0$  的邻域内具有  $n+1$  阶导数,  $x$  为该邻域内异于  $x_0$  的任一点, 则在  $(x, x_0)$  或  $(x_0, x)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad ①$$

其中  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  (拉氏型  $n$  阶泰勒余项),

或  $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$  (皮亚诺型  $n$  阶泰勒余项).

当  $x_0 = 0$  时, 式 ① 成为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad ②$$

其中  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$  或  $R_n(x) = o(x^n)$ .

式 ① 称为  $n$  阶泰勒公式, 式 ② 称为  $n$  阶麦克劳林公式.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 闭区间上连续函数命题的证明

**提示** 方法 1 (直接法) 先利用最值定理,  $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b], M, m$  分别是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值、最小值, 然后用介值定理证明.

适用于: 在闭区间  $[a, b]$  上存在  $\xi$ , 使得关于  $\xi$  的关系式成立.

方法 2 (间接法) 作辅助函数  $F(x)$ ; 若作  $F(x)$  的过程无积分运算, 则验证  $F(x)$  满足零值定理; 若作  $F(x)$  的过程有积分运算, 则验证  $F(x)$  满足罗尔定理.

适用于: 在开区间  $(a, b)$  上存在  $\xi$ , 使得关于  $\xi$  的关系式成立.

**辅助函数的作法:**

(1) 将欲证结论中的  $\xi$  或  $x_0$  改写成  $x$ , 移项, 使等式一端为零, 另一端记作  $F^*(x)$ ;

(2) 令  $F(x) = F^*(x)$ , 验证  $F(x)$  是否满足零值定理, 若满足, 则命题得证; 若不满足, 则改令

$$F'(x) = F^*(x) \Rightarrow F(x) = \int F^*(x) dx + C \quad (\text{令 } C = 0),$$

$$\text{或} \quad F'(x) = k(x)F^*(x) \Rightarrow F(x) = \int k(x)F^*(x) dx;$$

(其中,  $k(x)$  是某个已知函数)

(3) 验证  $F(x)$  是否满足罗尔定理, 若满足, 则定理得证; 若不满足, 则改令  $F''(x) = F^*(x) \Rightarrow F(x)$  (两次积分);

(4) 将  $F(x)$  在指定点展成一阶泰勒公式, 命题即可得证.

**【例 5.1】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, c_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ . 证明: 至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$ .

**【分析】** 因为涉及闭区间上的一个点, 所以用方法 1.

**【证】** 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以有  $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ , 其中  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ . 于是

$$\begin{aligned} m &\leq f(x_1) \leq M, c_1 > 0, \Rightarrow c_1 m \leq c_1 f(x_1) \leq c_1 M \\ m &\leq f(x_2) \leq M, c_2 > 0, \Rightarrow c_2 m \leq c_2 f(x_1) \leq c_2 M \\ &\vdots \\ m &\leq f(x_n) \leq M, c_n > 0, \Rightarrow c_n m \leq c_n f(x_n) \leq c_n M \\ \Rightarrow (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)m &\leq c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n) \leq (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)M \\ \Rightarrow m &\leq \frac{c_1 f(x_1) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \leq M, \end{aligned}$$

则由介值定理可得, 至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}.$$

**【例 5.2】** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上连续, 且  $f(x) > 0$ , 证明: 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

**【分析】** 题中是证明在开区间  $(a, b)$  上存在一点  $\xi$ , 使得关于  $\xi$  的关系式成立, 则用方法 2. 另外, 只证左边的“=”, 这是因为定积分对区间的可加性:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_\xi^b f(x) dx.$$

**【证】** 将欲证等式中的  $\xi$  改为  $x$ , 则  $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt = 0$ , 作辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt, \text{ 则 } F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 且}$$

$$F(a) = -\int_a^b f(t) dt < 0 \quad (\text{因为 } f(x) > 0), \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0,$$

即  $F(a) \cdot F(b) < 0$ , 所以由零值定理可知, 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 故下式成立, 即

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

**【例 5.3】** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 证明: 存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(\xi) \int_a^\xi g(x) dx = g(\xi) \int_\xi^b f(x) dx.$$

**【分析】** 题中是证明在开区间  $(a, b)$  上存在一点  $\xi$ , 使得关于  $\xi$  的关系式成立, 则用方法 2. 将欲证等式中的  $\xi$  改为  $x$ , 则

$$f(x) \int_a^x g(t) dt = g(x) \int_x^b f(t) dt \Rightarrow f(x) \int_a^x g(t) dt - g(x) \int_x^b f(t) dt = 0.$$

作辅助函数  $F(x) = f(x) \int_a^x g(t) dt - g(x) \int_x^b f(t) dt, F(a) = -g(a) \int_a^b f(t) dt, F(b) =$

$f(b)\int_a^b g(t)dt$ , 零值定理不易验证, 故改令

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)\int_a^x g(t)dt - g(x)\int_x^b f(t)dt \\ &= f(x)\int_a^x g(t)dt + g(x)\int_b^x f(t)dt \\ &= \left[ \int_a^x g(t)dt \cdot \int_b^x f(t)dt \right]'. \end{aligned}$$

【证】令  $F(x) = \int_a^x g(t)dt \cdot \int_b^x f(t)dt$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导. 又

$$F(a) = \int_a^a g(t)dt \cdot \int_b^a f(t)dt = 0, \quad F(b) = \int_a^b g(t)dt \cdot \int_b^b f(t)dt = 0,$$

所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理, 故至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$f(\xi)\int_a^\xi g(x)dx = g(\xi)\int_\xi^b f(x)dx.$$

【例 5.4】设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = \int_0^1 f(x)dx = 0$ . 证明: 存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使

$$\text{得 } \xi f(\xi) = \int_0^\xi f(x)dx.$$

【证】题中是证明在开区间  $(a, b)$  上存在一点  $\xi$ , 使得关于  $\xi$  的关系式成立, 则用方法 2.

记  $\varphi(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$ , 则  $\varphi(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 但  $\varphi(0)\varphi(1) < 0$  不成立. 由于

$$\frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2} = \left[ \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} \right]', \quad x \neq 0,$$

所以作辅助函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0) = 0 = F(0),$$

所以  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且

$$F(1) = \frac{\int_0^1 f(t)dt}{1} = 0 = F(0).$$

故由罗尔定理可知, 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即  $\xi f(\xi) = \int_0^\xi f(x)dx$ .

【例 5.5】设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x)dx < -\frac{1}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . 证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, +\infty)$ , 使得  $f(\xi) + \xi = 0$ .

【证】将欲证等式中的  $\xi$  改为  $x$ , 作辅助函数  $F(x) = f(x) + x$ , 于是有

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 [f(x) + x]dx = \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} < 0,$$

所以由积分中值定理, 存在  $a \in [0, 1]$ , 使  $\int_0^1 F(x)dx = (1-0)F(a) < 0$ , 即  $F(a) < 0$ .

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = 0 + 1 = 1$ , 所以由极限的保号性, 存在  $b > a$ , 使  $\frac{F(b)}{b} > 0$ , 即  $F(b) > 0$ .

因此, 由零值定理可知, 至少存在  $\xi \in (a, b) \subset (0, +\infty)$ , 使得

$$F(\xi) = 0, \quad \text{即 } f(\xi) + \xi = 0.$$

**【例 5.6】** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx$ . 证明: 存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^\xi f(x) dx = 0.$$

**【分析】** 将欲证等式中的  $\xi$  改为  $x$ , 则  $\int_0^\xi f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt = 0$ . 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

**【证】** 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = \int_0^1 f(t) dt$ , 可知零值定理不易验证.

改令  $F'(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则由

$$\begin{aligned} \int_0^x F'(u) du &= \int_0^x \left( \int_0^u f(t) dt \right) du \\ \Rightarrow F(u) \Big|_0^x &= u \int_0^u f(t) dt \Big|_0^x - \int_0^x u f(u) du \\ \Rightarrow F(x) - F(0) &= x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad F(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt.$$

显然  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 且

$$F(0) = 0, \quad F(1) = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt = 0,$$

即  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上满足罗尔定理, 所以, 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即  $\int_0^\xi f(x) dx = 0$ .

**【例 5.7】** 证明方程  $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

**【分析】** 由原方程可推出  $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0$ . 令

$$\begin{aligned} f(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c), \\ f(0) &= -(a + b + c), \quad f(1) = 3a + 2b + c. \end{aligned}$$

显然零值定理不易验证.

改令  $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c)$ , 则

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x.$$

**【证】** 作辅助函数  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x$ , 显然  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上满足罗尔定理, 所以至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 即方程  $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

### 题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理

**提示** 验证定理的正确性, 主要有两点:

(1)  $f(x)$  满足某中值定理的条件;

(2) 若条件满足, 找出定理结论中的  $\xi$  值.

**【例 5.8】** 验证  $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$  在  $[0, 2]$  上满足拉格朗日中值定理, 并求满足拉格朗日

中值定理的  $\xi$  值.

**【证】** (1) 显然  $\frac{3-x^2}{2}, \frac{1}{x}$  分别在  $[0, 1]$  和  $(1, 2]$  上连续, 又

$$f_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = f_+(1) = f(1),$$

所以  $f(x)$  在  $x=1$  处连续, 因此  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续.

(2) 当  $x < 1$  时,  $f'(x) = \left(\frac{3-x^2}{2}\right)' = -x$ ; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .

$$\text{又} \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{2(x - 1)} = -1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = -1,$$

所以  $f'(1) = -1$ , 即  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 因此  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内可导, 且

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

由(1), (2)可知,  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上满足拉格朗日中值定理的条件, 因而存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(\xi), \text{ 即 } f'(\xi) = -\frac{1}{2}.$$

当  $0 < \xi \leq 1$  时

$$f'(\xi) = -\xi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2},$$

当  $1 < \xi < 2$  时

$$f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \xi = \sqrt{2}.$$

故满足拉格朗日中值定理的  $\xi$  为  $\frac{1}{2}$  或  $\sqrt{2}$ .

### 题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题

**提示** 利用拉格朗日中值定理的推论, 即若  $f'(x) = 0, x \in [a, b]$ , 则  $f(x) = C, x \in [a, b]$  ( $C$  是常数).

**【例 5.9】** 证明:  $3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$  (当  $|x| < \frac{1}{2}$  时).

**【证】** 令  $f(x) = 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3)$ , 则

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}. \quad ①$$

因为  $|x| < \frac{1}{2}$ , 所以  $0 < 1 - 4x^2 \leq 1$ , 则由式 ① 可推得

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

所以  $f(x) = C$ , 令  $x = 0 \Rightarrow C = \pi$ , 故

$$3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

**【例 5.10】** 设  $f(x)$  可导,  $f(0) = 0, f(a) = b, g(x)$  是  $f(x)$  的反函数. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx = ab.$$

**【分析】** 因为  $b = f(a)$ , 则结论等价于

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} g(x) dx = af(a).$$

**【证】** 将上式中的  $a$  改为  $x$ , 则令

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt - xf(x),$$

$$F'(x) = f(x) + g(f(x))f'(x) - f(x) - xf'(x) = xf'(x) - xf'(x) = 0.$$

则  $F(x) = C$ . 令  $x = 0 \Rightarrow C = 0$  (因为  $f(0) = 0$ ), 则  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt - xf(x) = 0$ .

将  $x = a$  代入上式得

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx = ab.$$

#### 题型四 命题 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的证明

**提示** 方法 1 验证  $\xi$  为  $f^{(n-1)}(x)$  的最值或极值点, 利用极值存在的必要条件或费尔马定理可得证.

方法 2 验证  $f^{(n-1)}(x)$  在包含  $x = \xi$  于其内的区间上满足罗尔定理条件.

方法 3 利用泰勒公式.

**【例 5.11】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$ . 证明: 存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**【证】** 不妨设  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) < 0$ , 于是

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

由极限保号性可知, 存在一个  $\delta_1 > 0$ . 当  $x \in (a, a + \delta_1)$  时, 恒有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a). \quad (2)$$

同理, 有

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0,$$

由极限保号性可知, 存在一个  $\delta_2 > 0$ , 当  $x \in (b - \delta_2, b)$  时, 恒有

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow f(x) > f(b). \quad (3)$$

由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导可知,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必存在最大值.

由式 (2)、式 (3) 可知, 最大值只能在  $(a, b)$  内取得.

令  $\xi \in (a, b), f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ , 又  $f(x)$  在  $x = \xi$  处可导, 故由费尔马定理可知,  $f'(\xi) = 0$ .

**【例 5.12】** 设  $f(x)$  在  $[0,3]$  上连续, 在  $(0,3)$  内可导, 又  $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$ . 证明: 存在一点  $\xi \in (0,3)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**【证】** 由题设可知,  $f(x)$  在  $[0,2]$  上连续, 所以  $m \leq f(x) \leq M, m, M$  分别是  $f(x)$  在  $[0,2]$  上的最小值和最大值, 于是

$$m \leq f(0) \leq M, \quad m \leq f(1) \leq M, \quad m \leq f(2) \leq M.$$

$$\text{则} \quad 3m \leq f(0) + f(1) + f(2) \leq 3M \Rightarrow m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M.$$

由介值定理可知, 存在一点  $\eta \in [0,2]$ , 使得  $f(\eta) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1$ ; 又  $f(3) = 1$ , 可知,  $f(x)$  在  $[\eta,3]$  上满足罗尔定理, 故存在一点  $\xi \in (\eta,3) \subset (0,3)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**【例 5.13】** 设  $f(x)$  在  $[0,2]$  上连续, 在  $(0,2)$  内二阶可导,  $f(0) = f(1), f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ .

证明: 存在一点  $\xi \in (0,2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**【证】** 因为  $f(0) = f(1)$ , 可知  $f(x)$  在  $[0,1]$  上满足罗尔定理, 于是存在一点  $\xi_1 \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi_1) = 0$ .

$$\text{又} \quad f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx = 2 \left( \frac{3}{2} - 1 \right) f(\eta) = f(\eta) \quad (\text{积分中值定理}) \left( \eta \in \left( 1, \frac{3}{2} \right) \right).$$

由上式可知,  $f(x)$  在  $[\eta,2]$  上满足罗尔定理, 于是存在一点  $\xi_2 \in (1,2)$ , 使得  $f'(\xi_2) = 0$ . 由  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0, f'(x)$  在  $(0,2)$  内可导, 可知  $f'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足罗尔定理, 故存在一点  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**【例 5.14】** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 在  $(a,b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值,  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ . 证明: 存在  $\xi \in (a,b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

**【证】** 令  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 在  $(a,b)$  内具有二阶导数且  $F(a) = F(b) = 0$ .

(1) 若  $f(x), g(x)$  在  $(a,b)$  内同一点  $c$  取得最大值, 则  $f(c) = g(c) \Rightarrow F(c) = 0$ , 于是由罗尔定理可知, 存在  $\xi_1 \in (a,c), \xi_2 \in (c,b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0,$$

再利用罗尔定理可知, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ , 即  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

(2) 若  $f(x), g(x)$  在  $(a,b)$  内不同点  $c_1, c_2$  取得最大值, 则  $f(c_1) = g(c_2) = M$ , 于是  $F(c_1) = f(c_1) - g(c_1) > 0, F(c_2) = f(c_2) - g(c_2) < 0$ .

于是由零值定理可知, 存在  $c_3 \in (c_1, c_2)$ , 使得  $F(c_3) = 0$ .

由罗尔定理可知, 存在  $\xi_1 \in (a, c_3), \xi_2 \in (c_3, b)$ , 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0,$$

再利用罗尔定理可知, 存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ , 即  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

**题型五** 欲证结论: 至少存在一点  $\xi \in (a,b)$ , 使得  $f^{(n)}(\xi) = k (k \neq 0)$  或由  $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$  所构成的代数式成立

**提示** (1) 作辅助函数  $F(x)$ ;

(2) 验证  $F(x)$  满足罗尔定理.

辅助函数  $F(x)$  的作法如下.



## 1. 原函数法(也称微分方程法)

具体步骤如下.

- (1) 将欲证结论中的  $\xi$  改成  $x$ ;
- (2) 将式子写成容易去掉一次导数符号的形式(即容易积分的形式);
- (3) 去掉一次导数符号(即作一次积分), 移项, 使等式一端为“0”, 另一端即为新作辅助函数  $F(x)$ (为简便, 积分常数取“0”).

对于拉格朗日中值定理:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

两边积分得  $f(x) + C = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ , 令  $C = 0$ , 并移项得

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x = 0,$$

则辅助函数为  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ .

对于柯西中值定理:

$$\begin{aligned} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} &= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \xrightarrow{\text{令 } \xi = x} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x). \end{aligned}$$

两边积分得  $f(x) + C = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$ , 令  $C = 0$ , 并移项得

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x) = 0,$$

则辅助函数为  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$ .

2. 常数  $k$  值法

此法适用于常数部分可被分离出的命题. 构造辅助函数的步骤如下.

- (1) 令常数部分为  $k$ ;
- (2) 作恒等变形, 使上述等式一端为  $a$  及  $f(a)$  构成的代数式, 另一端为  $b$  及  $f(b)$  构成的代数式;
- (3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式. 若是, 只要把  $a$ (或  $b$ ) 改成  $x$ , 相应的函数值  $f(a)$ (或  $f(b)$ ) 改成  $f(x)$ , 则代换变量后的端点表达式就是所求的辅助函数  $F(x)$ .

如: 对于拉格朗日中值定理  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , 令

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k &\Rightarrow f(b) - f(a) - k(b - a) = 0 \\ &\Rightarrow f(b) - kb = f(a) - ka, \end{aligned}$$

则令  $F(x) = f(x) - kx = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$  (令一端常数值为  $x$ ).

**【例 5.15】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = 0, a > 0$ . 证明: 存在一点  $\xi \in (a, b)$ ,

$$\text{使得 } f(\xi) = \frac{b - \xi}{a} f'(\xi).$$

【分析】将欲证等式中的  $\xi$  改为  $x$ , 则

$$f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi) \Rightarrow f(x) = \frac{b-x}{a} f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{b-x}.$$

上式两边积分  $\Rightarrow \ln f(x) = -a \ln(b-x) + C \Rightarrow (b-x)^a f(x) = C$ .

【证】作辅助函数  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ , 则  $F(a) = 0, F(b) = 0$ , 于是  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理, 所以存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ .

【例 5.16】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导. 证明: 存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

【分析】令  $\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = k \Rightarrow bf(b) - kb = af(a) - ka$  为轮换对称式.

【证】令  $F(x) = xf(x) - kx = xf(x) - \frac{bf(b) - af(a)}{b-a}x$ , 则

$$F(b) - F(a) = bf(b) - \frac{bf(b) - af(a)}{b-a}b - af(a) + \frac{bf(b) - af(a)}{b-a}a = 0,$$

所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理的条件, 即存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

【例 5.17】设函数  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上二阶可导, 且  $f(0) = f'(0), f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . 试证: 至少存在一点

$$\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \text{使得 } f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}.$$

【分析】欲证结论可写为

$$f''(\xi)(1-2\xi) - 2f'(\xi) = f'(\xi),$$

令  $\xi = x$ , 则上式为

$$f''(x)(1-2x) - 2f'(x) = f'(x),$$

即

$$[f'(x)(1-2x)]' = f'(x).$$

两边积分得

$$f'(x)(1-2x) = f(x) + C,$$

令  $C = 0$ , 并移项得

$$f'(x)(1-2x) - f(x) = 0,$$

则令辅助函数为  $F(x) = f'(x)(1-2x) - f(x)$ .

【证】作辅助函数  $F(x) = f'(x)(1-2x) - f(x)$ . 显然,  $F(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上连续, 在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  内可导, 且

$$F(0) = f'(0)(1-0) - f(0) = 0,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-2 \cdot \frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

所以,  $F(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上满足罗尔定理的条件, 则至少存在一点  $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 使得  $F'(\xi) =$

$$0, \text{即 } f''(\xi)(1-2\xi) - 3f'(\xi) = 0, \text{亦即 } f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-2\xi}.$$

【例 5.18】设  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上可导, 且  $0 < x_1 < x_2$ , 试证: 在  $(x_1, x_2)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

【分析】令  $\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = k \Rightarrow \frac{f(x_2) - k}{x_2} = \frac{f(x_1) - k}{x_1}$  (对称式).

故所作辅助函数  $F(x)$  为

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| \frac{1}{x}.$$

【证】略.

### 题型六 欲证结论:在 $(a, b)$ 内至少存在两点 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式

**提示** 证明方法 用两次拉格朗日中值定理;或者用一次拉格朗日中值定理,用一次柯西中值定理;或者用两次柯西中值定理.

证明中的辅助函数的作法不同于题型五,而是利用分离变量法,使等式一端只含有  $\xi$  的代数式,另一端只含有  $\eta$  的代数式,结合原函数法稍加分析  $\xi, \eta$  的代数式,即可看出该作什么样的辅助函数.

【例 5.19】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = f(b) = 1$ . 证明:存在  $\xi, \eta \in (a, b)$ , 使得  $e^{\eta\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ .

【分析】  $e^{\eta\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1 \Rightarrow e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi} \Rightarrow [e^x f(x)]'_{x=\eta} = e^{\xi}$ .

【证】(1)  $F(x) = e^x f(x)$ , 则由拉格朗日中值定理,存在一个  $\eta \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\eta) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}, \quad (4)$$

$$\text{即 } e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \quad (\text{因为 } f(b) = f(a) = 1).$$

(2) 又令  $\varphi(x) = e^x$ , 则由拉格朗日中值定理,存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a}, \quad \text{即 } e^{\xi} = \frac{e^b - e^a}{b - a}. \quad (5)$$

由式 (4)、式 (5) 可得  $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi}$ , 即  $e^{\eta\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ .

【例 5.20】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内可导,且  $f'(x) \neq 0, b > a > 0$ . 证明:存在

$$\xi, \eta \in (a, b), \text{ 使得 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

【分析】  $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} f'(\eta) = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \frac{f'(\eta)}{\frac{1}{2\sqrt{\eta}}}.$

【证】令  $\varphi(x) = \sqrt{x}$ , 由题设  $f(x), \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内可导,且  $\varphi'(x) \neq 0 (x \in [a, b])$  满足柯西中值定理的条件,则存在一点  $\eta \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\eta)}{\varphi'(\eta)},$$

$$\text{即 } \frac{f(b) - f(a)}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{f'(\eta)}{\frac{1}{2\sqrt{\eta}}} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = 2\sqrt{\eta} f'(\eta)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2\sqrt{\eta} f'(\eta)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad (6)$$

又由拉格朗日中值定理可知,存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (7)$$

所以由式⑥、式⑦得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{2\sqrt{\eta}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (\xi, \eta \in (a, b)).$$

**【例 5.21】** 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明:

(1) 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ;

(2) 存在两个不同的点  $\eta, \zeta \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\eta) \cdot f'(\zeta) = 1$ .

**【证】** (1) 令  $F(x) = f(x) + x - 1$ , 即要证明  $F(x) = 0$  在  $(0, 1)$  内有实根.

由于  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $F(0) \cdot F(1) = [f(0) - 1]f(1) = -1 < 0$ , 所以由零值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = 1 - \xi$ .

(2) 利用(1)的结果, 对  $f(x)$  在  $[0, \xi]$  上应用拉格朗日中值定理可知, 存在  $\eta \in (0, \xi)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad (8)$$

对  $f(x)$  在  $[\xi, 1]$  上应用拉格朗日中值定理可知, 存在  $\zeta \in (\xi, 1)$ , 使得

$$f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad (9)$$

于是, 由式⑧、式⑨得  $f'(\eta) \cdot f'(\zeta) = 1$ .

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势 1** 在题设条件中函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = 0$  或  $f(b) = 0$  或  $f(a) = f(b) = 0$ , 要立刻想到先用拉格朗日中值定理处理.

**【例 5.22】** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) =$

$\frac{1}{3}$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使得  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$ .

**【分析】**  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2 \Rightarrow [f'(\xi) - \xi^2] + [f'(\eta) - \eta^2] = 0$

$$\Rightarrow \left[ f(x) - \frac{1}{3}x^3 \right]'_{x=\xi} + \left[ f(x) - \frac{1}{3}x^3 \right]'_{x=\eta} = 0.$$

**【证】** 设  $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$ , 则  $F(0) = 0, F(1) = 0$ , 且  $F(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间

$(0, 1)$  内可导. 对  $F(x)$  在  $[0, \frac{1}{2}]$  和  $[\frac{1}{2}, 1]$  上运用拉格朗日中值定理得

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = F'(\xi)\left(\frac{1}{2} - 0\right), \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (1)$$

$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F'(\eta)\left(1 - \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \quad (2)$$

① + ② 得

$$F'(\xi) + F'(\eta) = 0, \text{ 即 } f'(\xi) - \xi^2 + f'(\eta) - \eta^2 = 0,$$

亦即

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2.$$

**思维定势 2** 题设条件中出现  $0 \leq \theta(x) \leq 1$  时, 要立刻想到或者用拉格朗日中值定理  $[f(x)$  一阶可导] 或者用泰勒公式  $[f(x)$  二阶或二阶以上可导] 来处理.

**【例 5.23】** 设  $y = f(x)$  在  $(-1, 1)$  内具有二阶连续导数, 且  $f''(x) \neq 0$ , 证明:

(1) 对于  $(-1, 1)$  内的任一  $x \neq 0$ , 存在唯一的  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \text{ 成立};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

**【证】** (1) 由拉格朗日中值定理, 对于  $(-1, 1)$  内的任一  $x \neq 0$ , 存在  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使得  $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$ .

又因为  $f''(x)$  连续且  $f''(x) \neq 0$ , 所以, 在  $(-1, 1)$  内  $f''(x) > 0$  (或  $< 0$ ), 即  $f'(x)$  在  $(-1, 1)$  内单调增加 (或单调减少), 于是,  $\theta(x)$  是唯一的.

(2) 再由拉格朗日中值定理, 在 0 与  $\theta(x)x$  之间存在  $\xi$ , 使得

$$f'(\theta(x)x) = f'(0) + f''(\xi) \cdot \theta(x)x,$$

代入  $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$  得

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + f''(\xi) \cdot \theta(x) \cdot x^2,$$

于是

$$\theta(x) = \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} \cdot \frac{1}{f''(\xi)},$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} \cdot \frac{1}{f''(\xi)} \right] \\ &= \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2} \\ &= \frac{1}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \frac{1}{f''(0)} \cdot \frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**思维定势 3** 题设条件中函数  $f(x)$  二阶或二阶以上可导, 要立刻想到先把  $f(x)$  在指定点展成泰勒公式再说.

**【例 5.24】** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内二阶可导, 且  $f(x)$  和  $f''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界, 证明:  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界.

**【证】** 由题设可知, 存在正常数  $M_0, M_2$ , 对于任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$|f(x)| \leq M_0, |f''(x)| \leq M_2.$$

由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!} f''(\xi), x < \xi < x+1,$$

于是有

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2} f''(\xi),$$

$$|f'(x)| \leq |f(x+1)| + |f(x)| + \frac{1}{2} |f''(\xi)| \leq 2M_0 + \frac{1}{2} M_2.$$

所以函数  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有界.

【例 5.25】设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶导数连续,  $f(0) = f(1) = 0$ , 并且当  $x \in (0, 1)$  时,  $|f''(x)| \leq A$ , 求证:  $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1]$ .

【证】由于  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶导数连续, 则  $f(x)$  可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

取  $x = 0, x_0 = x$ , 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(0 - x)^2, 0 < \xi_1 < x \leq 1, \quad (3)$$

取  $x = 1, x_0 = x$ , 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1 - x)^2, 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (4)$$

④ - ③ 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1 - x)^2] \\ &= \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1 - x)^2]. \end{aligned}$$

又当  $x \in (0, 1)$  时,  $|f''(x)| \leq A$ , 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}[x^2 + (1 - x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1),$$

当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $2x^2 - 2x + 1 = 2x(x - 1) + 1 \leq 1$ ,

因此,  $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1]$ .

## 二、综合题解析

【例 5.26】设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0, 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$ .

证明: 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

【分析】先由  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0$  推得  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ , 以及由  $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$  推得存在  $\eta \in [\frac{1}{2}, 2]$ ,

使得  $f'(\eta) = 0$ . 然后由罗尔定理即可得证存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

【解】由题设得

$$0 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} \stackrel{\text{令 } t = x - \frac{1}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t + \frac{1}{2})}{-\sin \pi t}.$$

由此可得  $f(\frac{1}{2}) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t + \frac{1}{2}) = 0$ , 并且

$$f'(\frac{1}{2}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t + \frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(t + \frac{1}{2})}{-\sin \pi t} \cdot \frac{-\sin \pi t}{t} \right] = 0 \cdot (-\pi) = 0. \quad (5)$$

另一方面, 由题设  $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$  及积分中值定理知, 存在  $\eta \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 使  $f(\eta) =$

$f(2)$ . 于是对  $f(x)$  在  $[\eta_1, 2]$  上应用罗尔定理得, 存在  $\eta_2 \in (\eta_1, 2)$ , 使

$$f'(\eta_2) = 0 \quad \left( \text{显然 } \eta_2 > \frac{1}{2} \right). \quad (6)$$

由式 ⑤ 式 ⑥, 对  $f'(x)$  在  $\left[\frac{1}{2}, \eta_2\right]$  上应用罗尔定理知, 存在  $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \eta_2\right) \subset (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

欲证存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ , 通常是先在  $(0, 2)$  上寻找两个不同的点  $x_1, x_2$  (如本题题解中的  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \eta_2$ ), 使  $f'(x_1) = f'(x_2)$ , 然后应用罗尔定理. 这是解这类问题的常用方法.

**【例 5.27】** 设  $y = f(x)$  是  $[0, 1]$  上的非负连续函数.

(1) 证明至少存在一点  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得在  $[0, x_0]$  上, 以  $f(x_0)$  为高的矩形面积等于  $[x_0, 1]$  上以曲线  $y = f(x)$  为曲边的曲边梯形面积;

(2) 又设  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$ , 证明(1)中的  $x_0$  是唯一的.

**【分析】** (1) 根据题设知, 要证存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得

$$x_0 f(x_0) - \int_{x_0}^1 f(x) dx = 0.$$

为此引入辅助函数  $F(x) = xf(x) - \int_x^1 f(t) dt$ , 并应用微分中值定理.

(2) 由题设  $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$  推得  $F'(x) > 0$ , 由此证明(1)中的  $x_0$  是唯一的.

**【解】** (1) 由题意知, 本题即证至少存在一点  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得

$$x_0 f(x_0) - \int_{x_0}^1 f(x) dx = 0. \quad (7)$$

据此记  $F(x) = xf(x) - \int_x^1 f(t) dt = \left(-x \int_x^1 f(t) dt\right)'$ . 由于  $\varphi(t) = -x \int_x^1 f(t) dt$

在  $[0, 1]$  上满足罗尔定理条件, 所以至少存在一点  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得

$$\varphi'(x_0) = 0, \text{ 即 } F(x_0) = 0.$$

从而至少存在一点  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得 ⑦ 式成立.

(2) 由于对于  $x \in (0, 1)$  有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(xf(x) - \int_x^1 f(t) dt\right)' = 2f(x) + xf'(x) \\ &= x\left(\frac{2f(x)}{x} + f'(x)\right) > 0 \quad \left(\text{利用条件 } f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}\right), \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  在  $(0, 1)$  内单调增加. 从而(1)中求得的  $x_0$  是方程  $F(x) = 0$  在  $(0, 1)$  内的唯一的根, 即存在唯一的  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得

$$x_0 f(x_0) - \int_{x_0}^1 f(x) dx = 0.$$

### 习 题 五

1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, C_i (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$  为任意正数,

则在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < a, f(b) > b$ , 试证在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \xi$ .
3. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $0 \leq f(x) \leq 1$ , 证明: 在  $[0, 1]$  上, 至少存在一个  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .
4. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 而且  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ , 则在  $(a, b)$  内存在一个  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = g(\xi)$ .
5. 证明方程  $x^5 - 3x - 2 = 0$  在  $(1, 2)$  内至少有一个实根.
6. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上可微, 对于  $[0, 1]$  上每一个  $x$ , 函数  $f(x)$  的值都在开区间  $(0, 1)$  内, 且  $f'(x) \neq 1$ , 证明: 在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .
7. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $(0, 1)$  内可导, 且  $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$ , 证明: 在  $(0, 1)$  内存在一个  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .
8. 设函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上有二阶导数, 且  $f(1) = f(2) = 0$ , 又  $F(x) = (x-1)^2 f(x)$ , 证明: 在  $(1, 2)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $F''(\xi) = 0$ .
9. 设  $f(x)$  在  $[0, x] (x > 0)$  上连续, 在  $(0, x)$  内可导, 且  $f(0) = 0$ , 试证: 在  $(0, x)$  内存在一个  $\xi$ , 使  $f(x) = (1+\xi) \ln(1+x) f'(\xi)$ .
10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $ab > 0$ , 试证: 存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使 
$$\frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = [nf(\xi) + \xi f'(\xi)] \xi^{n-1} \quad (n \geq 1).$$
11. 设  $f(x), g(x), h(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明: 存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使 
$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$
12. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $f(0) = f(1)$ , 试证: 至少存在一个  $\xi \in (0, 1)$ , 使 
$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$
13. 设  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上可导, 且  $0 < x_1 < x_2$ , 证明: 在  $(x_1, x_2)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使 
$$\frac{1}{e^{x_1} - e^{x_2}} \begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - f'(\xi).$$
14. 若  $x_1 x_2 > 0$ , 证明: 存在一个  $\xi \in (x_1, x_2)$  或  $(x_2, x_1)$ , 使 
$$x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1-\xi) e^{\xi} (x_1 - x_2).$$
15. 函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 0, g(x) \neq 0$ , 试证: 至少存在一个  $\xi \in (a, b)$  使  $f'(\xi)g(\xi) = g'(\xi)f(\xi)$ .
16. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 试证: 至少存在一个  $\xi \in (a, b)$  使 
$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$
17. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内有二阶连续导数, 试证: 至少存在一个  $\xi \in (a, b)$  使 
$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$
18. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续 ( $0 < a < b$ ), 在  $(a, b)$  内可导, 证明: 在  $(a, b)$  内,  $\exists \xi, \eta$ , 使 
$$f'(\xi) = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}.$$
19. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 1$ , 试证:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得



$$e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1.$$

20. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x) \neq 0$ . 试证:  $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} \cdot e^{-\eta}.$$

### 参 考 答 案

1. 提示: 利用最值定理和介值定理证明.

2. 提示: 作辅助函数  $F(x) = f(x) - x$ , 然后用零值定理证明.

3. 提示: 作辅助函数  $F(x) = f(x) - x$ , 然后用零值定理证明.

4. 证明: 假设  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $F(a) = f(a) - g(a) < 0$ ,  $F(b) = f(b) - g(b) > 0$ , 于是由介值定理在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \xi$ .

5. 提示: 作辅助函数  $f(x) = x^5 - 3x - 2$ , 然后用零值定理证明.

6. 提示: 作辅助函数  $F(x) = f(x) - x$ , 然后用零值定理证明存在性. 唯一性利用函数的单调性证. 因为  $F'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$ , 所以函数  $F(x)$  要么单增要么单减.

7. 提示: 利用积分中值定理和罗尔定理.

8. 提示: 利用两次罗尔定理.

9. 提示: 作辅助函数  $g(x) = \ln(1+x)$ , 对  $f(x), g(x)$  使用柯西中值定理.

10. 提示: 作辅助函数  $F(x) = x^n f(x)$ , 对  $F(x)$  使用拉格朗日中值定理.

11. 提示: 作辅助函数  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$ , 对  $F(x)$  使用罗尔定理.

12. 提示: 作辅助函数  $F(x) = (1-x)^2 f'(x)$ , 利用罗尔定理证明.

13. 提示: 作辅助函数  $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ , 对  $F(x), e^x$  使用柯西中值定理.

14. 提示: 作辅助函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}, g(x) = \frac{1}{x}$ , 对  $f(x), g(x)$  使用柯西中值定理.

15. 提示: 作辅助函数  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , 利用罗尔定理证明.

16. 提示: 作辅助函数  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$ , 利用拉格朗日中值定理证明.

17. 提示: 利用泰勒定理、最值定理和介值定理证明.

18. 提示: 对  $f(x)$  使用一次拉格朗日中值定理, 对  $f(x), \frac{1}{x}$  使用一次柯西中值定理.

19. 提示: 作辅助函数  $F(x) = e^x f(x)$ , 对  $F(x)$  使用一次拉格朗日中值定理; 对  $e^x$  使用一次拉格朗日中值定理.

20. 提示: 对  $f(x)$  用一次拉格朗日中值定理, 对  $f(x), e^x$  使用一次柯西中值定理.

## 第六章 常微分方程

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、基本概念

##### 1. 微分方程

微分方程  $\triangleq$  含有自变量, 未知函数及未知函数导数或微分的方程.

常微分方程  $\triangleq$  未知函数是一元函数的微分方程.

其一般形式为  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , ①

标准形式为  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . ②

##### 2. 微分方程的阶

方程的阶  $\triangleq$  微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数.

##### 3. 微分方程的解

如果函数  $y = \varphi(x)$  代入方程 ① 或方程 ② 后, 使之成为恒等式, 即

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0,$$

或者  $\varphi^{(n)}(x) \equiv f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)]$ ,

则称函数  $y = \varphi(x)$  为方程 ① 或方程 ② 的显式解.

如果由方程  $G(x, y) = 0$  所确定的隐函数  $y = \varphi(x)$  为方程 ① 或方程 ② 的解, 则称  $G(x, y) = 0$  为方程 ① 或方程 ② 的隐式解.

方程 ① 或 ② 的通解  $\triangleq$  含有  $n$  个独立的任意常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  的解  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ .

方程 ① 或方程 ② 的特解  $\triangleq$  不含任意常数或者通解中任意常数已被定解条件确定出来的解.

初始条件  $\triangleq$  确定方程 ① 或方程 ② 通解中  $n$  个任意常数的条件:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

#### 二、二阶线性微分方程解的结构

二阶线性方程的一般形式:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad ③$$

当  $f(x) = 0$  时, 方程 ③  $\Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , ④

方程 ④ 称为方程 ③ 对应的齐次方程.

**定理 1** 设  $y_1(x), y_2(x)$  是齐次方程 ④ 的两个线性无关的解 (即  $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq k$ ), 则

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是齐次方程 ④ 的通解. 其中,  $C_1, C_2$  是任意常数.

**定理 2** 设  $y_1^*(x)$  是方程 ③ 的一个特解,  $y_1(x), y_2(x)$  是方程 ③ 对应的齐次方程 ④ 的两个线性无关的解, 则方程 ③ 的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x). \text{ 其中, } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

**定理 3** 设  $y_1(x), y_2(x)$  为非齐次方程 ③ 的两个相异的特解, 则  $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$  为方程 ③ 对应的齐次方程 ④ 的解.

**定理 4** 设  $y_1(x), y_2(x)$  分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的两个特解, 则  $y = y_1(x) + y_2(x)$  为方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \text{ 的解.}$$

$$n \text{ 阶方程: } y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (3)'$$

$$\text{对应的齐次方程: } y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + q(x)y = 0. \quad (4)'$$

其解的结构与二阶方程类似.

**【例 6.1】** 设线性无关的函数  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  均是二阶非齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的解,  $C_1, C_2$  是任意常数, 则该非齐次方程的通解是

(A)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$ .

(B)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$ .

(C)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$ .

(D)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$ .

【 】

**【解】** (A) 因为  $C_1 y_1 + C_2 y_2$  不是对应齐次方程的通解,

所以  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$  不是该非齐次方程的通解.

(B)  $C_1 y_1 - C_2 y_2 - C_1 y_3 - C_2 y_3 = C_1 (y_1 - y_3) + C_2 (y_2 - y_3)$

是对应的齐次方程的通解, 但没有特解, 故给出的函数也不是所求的通解.

(C)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3 = C_1 (y_1 + y_3) + C_2 (y_2 + y_3) - y_3$

也不是所求的通解.

(D)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3 = C_1 (y_1 - y_3) + C_2 (y_2 - y_3) + y_3$

由定理 2, 3 可知就是所求的通解.

**【例 6.2】** 设  $y_1(x), y_2(x)$  为二阶常系数线性齐次方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的两个特解, 则由  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  能构成该方程的通解的充分条件为

(A)  $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$ .

(B)  $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$ .

(C)  $y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) = 0$ .

(D)  $y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) \neq 0$ .

【 】

**【解】** 由 (B) 可知  $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \neq \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}$ ,

$$\text{即 } \ln y_2(x) \neq \ln y_1(x) + \ln C, (C \text{ 为常数}) \Rightarrow \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq C,$$

可知  $y_1(x), y_2(x)$  线性无关, 由定理 1 可知, (B) 入选.

### 三、二阶常系数线性微分方程

二阶常系数线性微分方程的方程类型及通解(特解)的形式及其求法见表 6-1.

表 6-1

方程类型	通解(特解)的形式及其求法
二阶常系数线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ (1) 其中, $p, q$ 均为常数	特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ , (i) 当 $\lambda_1, \lambda_2$ 为相异的特征根时, 方程(1)的通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ (ii) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$ (iii) 当 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (复根) 时, 通解为 $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
二阶常系数线性非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ (2) 其中, $p, q$ 均为常数	通解的求解程序: ① 求对应齐次方程的通解 $Y(x)$ ② 求出(2)的特解 $y^*(x)$ ③ 方程(2)的通解 $y = Y(x) + y^*(x)$ 方程(2)特解 $y^*(x)$ 的求法有三种: 1° 微分算子法 2° 常数变易法 3° 待定系数法, 见表 6-2

二阶常系数非齐次线性方程的非齐次项  $f(x)$  与特解  $y^*$  的关系见表 6-2.

表 6-2

$y'' + py' + qy = f(x)$	特解 $y^*$ 的形式
$f(x) = p_n(x)$ 其中, $p_n$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式	$0$ 不是特征根, $y^*(x) = n$ 次多项式 $R_n(x)$ $0$ 是特征方程的单根, $y^*(x) = xR_n(x)$ $0$ 是特征方程的重根, $y^*(x) = x^2 R_n(x)$
$f(x) = Ae^{\alpha x}$ 其中, $A$ 为常数	$\alpha$ 不是特征根, $y^*(x) = Be^{\alpha x}$ , $B$ 为常数 $\alpha$ 是特征方程的单根, $y^*(x) = Bxe^{\alpha x}$ $\alpha$ 是特征方程的重根, $y^*(x) = Bx^2 e^{\alpha x}$
$f(x) = p_n(x)e^{\alpha x}$ 其中, $p_n$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式	$\alpha$ 不是特征根, $y^*(x) = R_n(x)e^{\alpha x}$ , $R_n(x)$ 为 $n$ 次多项式 $\alpha$ 是特征方程的单根, $y^*(x) = xR_n(x)e^{\alpha x}$ $\alpha$ 是特征方程的重根, $y^*(x) = x^2 R_n(x)e^{\alpha x}$
$f(x) = A \sin \omega x$ 或 $A \cos \omega x$ 其中, $A, \omega$ 均为常数	$i\omega$ 不是特征根, $y^* = M \cos \omega x + N \sin \omega x$ , $M, N$ 为常数 $i\omega$ 是特征根, $y^* = x(M \cos \omega x + N \sin \omega x)$
$f(x) = Ae^{\alpha x} \sin \beta x$ 或 $Ae^{\alpha x} \cos \beta x$ 其中 $A, \alpha, \beta$ 均为常数	$\alpha \pm i\beta$ 不是特征根, $y^* = e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$ $\alpha \pm i\beta$ 是特征根, $y^* = xe^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$ , $M, N$ 为常数

### 四、 $n$ 阶常系数线性微分方程

#### 1. 齐次方程的一般形式

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

⑤

其中,  $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为常数, 其特征方程

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0 \quad (6)$$

的特征根与通解的关系见表 6-3.

表 6-3

特征根	方程(1) 中通解的形式或所含的项
$\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 ⑥ 的 $n$ 个相异的实根	通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$
$\lambda = k$ 为 ⑥ 的 $m (m \leq n)$ 重实根	通解中含有的项为 $(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{kx}$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$ 为 ⑥ 的 $m (m < n)$ 重复复数根	通解中含有的项为 $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_m x^{m-1}) \sin \beta x],$ 其中, $C_i, D_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 均为常数

## 2. 非齐次方程的一般形式

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \quad (7)$$

其中  $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  均为常数.

求非齐次方程 ⑦ 的特解  $y^*(x)$  也有三种方法: 待定系数法, 常数变易法, 微分算子法. 这里着重介绍最简便的微分算子法. 为此引进记号:

$$\frac{d}{dx} = D, \quad \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \dots, \frac{d^n}{dx^n} = D^n,$$

$$\text{于是 } y' = \frac{dy}{dx} = Dy, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n y,$$

$$\text{方程 ⑦} \Rightarrow (D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \dots + p_{n-1} D + p_n) y = f(x).$$

$$\text{令 } F(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n,$$

$$\text{于是上式} \Rightarrow F(D) y = f(x) \Rightarrow y^* = \frac{1}{F(D)} f(x). \quad (8)$$

非齐次方程 ⑦ 即 ⑧ 中非齐次项  $f(x)$  与特解  $y^*(x)$  的关系见表 6-4.

表 6-4

$f(x)$ 形式	$y^*(x)$ 表达式	附注
$f(x) = e^{kx}$	$y^*(x) = \frac{1}{F(D)} e^{kx} = \frac{1}{F(k)} e^{kx}$ , 其中 $F(k) \neq 0$ , $F(k)$ 为 $F(D)$ 中的 $D$ 用 $k$ 代替所得值	若 $F(k) = 0$ , 不妨设 $k$ 为 $F(k)$ 的 $m$ 重根, 则 $\frac{1}{F(D)} e^{kx} = x^m \frac{1}{F^{(m)}(D)} e^{kx} = x^m \frac{1}{F^{(m)}(k)} e^{kx}$ , 其中 $F^{(m)}(D)$ 表示 $F(D)$ 对 $D$ 的 $m$ 阶导数
$f(x) = \sin ax$ 或 $\cos ax$	$y^*(x) = \frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{\sin ax}{F(-a^2)}$ , 或 $y^*(x) = \frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$ , 其中 $F(-a^2) \neq 0$	若 $F(-a^2) = 0$ , 不妨设 $(-a^2)$ 为 $F(-a^2)$ 的 $m$ 重根, 则 $\frac{1}{F(D^2)} \sin ax = x^m \cdot \frac{1}{F^{(m)}(D^2)} \sin ax,$ $\frac{1}{F(D^2)} \cos ax = x^m \cdot \frac{1}{F^{(m)}(D^2)} \cos ax$

续表

$f(x)$ 形式	$y^*(x)$ 表达式	附注
$f(x) = e^{kx}v(x)$	$y^*(x) = \frac{1}{F(D)}e^{kx}v(x) = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)}v(x)$	
$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$	<p>(i) 若 <math>p_n \neq 0</math>, 则 <math>y^*(x) = \frac{1}{F(D)}(a_0x^m + \dots + a_m) = Q(D)(a_0x^m + \dots + a_m)</math>, 其中, <math>Q(D)</math> 为 1 除以按升幂排列的 <math>F(D)</math> 的商式, 其最高次数取到 <math>f(x)</math> 的次数 <math>m</math></p> <p>(ii) 若 <math>p_n = 0</math>, 则 <math>y^*(x) = \frac{1}{F(D)}(a_0x^m + \dots + a_m)' = \frac{1}{DF_1(D)}(a_0x^m + \dots + a_m) = \frac{1}{DQ_1(D)}(a_0x^m + \dots + a_m)</math>, 其中, <math>Q_1(D)</math> 为 <math>\frac{1}{F_1(D)}</math> 的商式, 次数为 <math>m</math> 次</p>	<p>(i) <math>\frac{1}{p_n} - \frac{p_{n-1}}{p_n^2}D + \dots</math>  <math>p_n + p_{n-1}D + \dots + D^n \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{p_{n-1}D + p_{n-2}D^2}{p_n} + \dots - \frac{p_{n-1}}{p_n}D - \frac{p_{n-2}}{p_n}D^2 - \dots}}</math>                      当商式中出现 <math>D</math> 的最高次数为 <math>m</math> 时除法停止  <math>Q(D) = \frac{1}{p_n} - \frac{p_{n-1}}{p_n}D + \dots</math> 为 <math>D</math> 的 <math>m</math> 次多项式</p> <p>(ii) <math>\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}^2}D</math>  <math>p_{n-1} + p_{n-2}D + \dots + D^{n-1} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}D + \dots - \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}D - \dots}}</math>  <math>Q_1(D) = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}^2}D + \dots</math> 为 <math>D</math> 的 <math>m</math> 次多项式</p>

①  $D$  表示微分, 则  $\frac{1}{D}\cos x = \int \cos x dx = \sin x + C$ , 积分常数  $C$  不写!

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{1}{D^{2n+1}}\sin x &= \frac{1}{D^{2n}D}\sin x = \frac{1}{(-a^2)^n} \frac{1}{D}\sin x = (-1)^{n+1} \frac{\cos ax}{a^{2n+1}}, \\ \frac{1}{D^{2n+1}}\cos x &= \frac{1}{D^{2n}D}\cos x = \frac{1}{(-a^2)^n} \frac{1}{D}\cos x = (-1)^n \frac{\sin ax}{a^{2n+1}}, \\ \frac{1}{kD+b}\sin x &= \frac{(kD-b)}{k^2D^2-b^2}\sin x = \frac{(kD-b)}{k^2(-a^2)-b^2}\sin x = -\frac{1}{k^2a^2+b^2}(ka\cos x - b\sin x), \\ \frac{1}{kD+b}\cos x &= \frac{(kD-b)}{(kD+b)(kD-b)}\cos x = \frac{1}{k^2a^2+b^2}(ka\sin x + b\cos x). \end{aligned}$$

【例 6.3】已知  $y_1 = xe^x + e^{2x}$ ,  $y_2 = xe^x + e^{-x}$ ,  $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$  是某二阶线性非齐次常系数微分方程的三个解, 求此微分方程及其通解.

【解】由线性微分方程的解的结构定理可得

$$y_1 - y_3 = e^{-x}, y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}, (y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = e^{2x}$$

是该方程对应的齐次方程的解, 由解  $e^{-x}$  与  $e^{2x}$  的形式, 可得齐次方程的特征方程的特征根为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ , 则特征方程为  $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ , 即齐次方程为  $y'' - y' - 2y = 0$ .

设该方程为  $y'' - y' - 2y = f(x)$ , 代入  $y_1 = xe^x + e^{2x}$ , 得  $f(x) = (1-2x)e^x$ . 所以该方程为

$$y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x,$$

其通解为

$$C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + xe^x + e^{2x}.$$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

## 题型一 一阶微分方程的计算

**提示** 一阶微分方程的解题程序:

- (1) 审视方程,判断方程类型;
- (2) 根据不同类型,确定解题方案;
- (3) 若方程的求解最终化为分离变量型的,则作适当变换;若最终化为全微分型的,则找出适当的积分因子;
- (4) 做变量替换后得出的解,最后一定要还原为原变量.

方程类型与其通解结构见表 6-5.

表 6-5

方程类型	通解(或求通解的方法)
(1) 可分离变量方程: $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$	两边同除 $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ , 得 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$ , $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C$
(2) 齐次方程: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	令 $u = \frac{y}{x}$ , 则 $y = ux, y' = u + x \frac{du}{dx}$ , 于是, 原方程 $\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = f(u)$ $\Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + C$
(3) 可以化为齐次型的方程: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$	1° 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时, $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ , 属于(2) 2° $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ , 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ , 则 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y)$ 令 $a_2x + b_2y = u$ , 则 $\frac{du}{dx} = a_2 + b_2g(u)$ , 属于(1) 3° $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, c_1, c_2$ 不全为 0, 解方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ , 求交点 $(\alpha, \beta)$ , 令 $x = X + \alpha, y = Y + \beta$ , 则原方程 $\Rightarrow$ $\frac{dY}{dX} = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$ , 属于(2)

方程类型	通解(或求通解的方法)
(4) 一阶线性方程: $y' + p(x)y = q(x)$	用常数变易法求 1° 求对应齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 的通解 $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ 2° 令原方程的解为 $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ 3° 代入原方程整理得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ $\Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$ 4° 原方程通解 $y = \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] e^{-\int p(x)dx}$
(5) 伯努利方程*: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ , 其中 $n \neq 0, 1$	令 $z = y^{1-n}$ , 则方程 $\Rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$ , $\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ , 属于(4)
(6) 全微分方程*: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 为全微分方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	通解为 $\int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = C$

【例 6.4】求解下列微分方程:

(1)  $f(xy)ydx + g(xy)xdy = 0$ ;

(2)  $xy' - y[\ln(xy) - 1] = 0$ ;

(3)  $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$ .

**提示** 方程中出现  $f(xy)$ ,  $f(x \pm y)$ ,  $f(x^2 \pm y^2)$ ,  $f\left(\frac{y}{x}\right)$  等形式的项时, 通常要做相应的变量替

换  $u = xy, x \pm y, x^2 \pm y^2, \frac{y}{x}, \dots$ .

【解】(1) 令  $u = xy$ , 求微分得  $du = xdy + ydx$ , 代入方程

$$\Rightarrow [f(u) - g(u)] \frac{u}{x} dx + g(u) du = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{g(u)}{u[f(u) - g(u)]} du = 0$$

$$\Rightarrow \ln x + \int \frac{g(u) du}{u[f(u) - g(u)]} = C.$$

①  $\int \frac{dx}{x}$  可写成  $\ln|x| + C$ , 也可等成  $\ln x + C$ , 当初始条件为  $y(x)|_{x=k(k < 0)} = l$  时, 必须写成  $\ln|x| + C$ .

(2) 令  $u = xy, u' = y + xy'$ , 代入原方程得

$$u' - y - y[\ln u - 1] = 0$$

$$\Rightarrow u' = y \ln u \Rightarrow u' = \frac{u}{x} \ln u$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \ln u = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln u = Cx \Rightarrow \ln(xy) = Cx.$$



(3) 令  $x^2 + y^2 = u$ , 则  $2x + 2yy' = u'$ ,

$$\text{原方程} \Rightarrow 2x + e^{\frac{u}{x}} + \frac{u}{x} - 2x = u' \Rightarrow u' = \frac{u}{x} + e^{\frac{u}{x}},$$

①

再令  $v = \frac{u}{x}$ , 而  $u = xv, u' = v + xv'$ ,

$$\text{代入 ①} \Rightarrow v + xv' = v + e^v \Rightarrow e^{-v} dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow -e^{-v} = \ln x + C \Rightarrow -e^{-\frac{x^2+y^2}{x}} = \ln x + C.$$

**【例 6.5】** 求解下列微分方程:

$$(1) \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0; \quad (2) \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy};$$

$$(3) y \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) dx = x \left(y \sin \frac{y}{x} - x \cos \frac{y}{x}\right) dy.$$

**【解】** (1) 令  $\frac{y}{x} = u, y = ux, dy = udx + xdu$ , 代入原方程, 经整理, 得

$$\cos u du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \sin u = -\ln x + C \Rightarrow \sin \frac{y}{x} = -\ln x + C.$$

$$(2) \text{原方程} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - xy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

令  $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux, y' = u + xu'$ , 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} u + xu' &= \frac{2u^2 - u}{1 - u + u^2} \\ \Rightarrow \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u} \right) - \frac{2}{u-2} + \frac{1}{u-1} \right] du &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln(u-1) - \frac{3}{2} \ln(u-2) - \frac{1}{2} \ln u &= \ln x + \ln C \\ \Rightarrow \frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}} &= Cx \Rightarrow (y-x)^2 = Cy(y-2x)^3. \end{aligned}$$

$$(3) \text{原方程} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x}},$$

令  $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + xu'$ , 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} u + xu' &= u \frac{\cos u + u \sin u}{u \sin u - \cos u} \\ \Rightarrow \frac{u \sin u - \cos u}{2u \cos u} du &= \frac{dx}{x} \Rightarrow u \cos u = \frac{C}{x^2} \\ \Rightarrow \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} &= \frac{C}{x^2} \Rightarrow xy \cos \frac{y}{x} = C. \end{aligned}$$

【例 6.6】求解下列微分方程:

$$(1) y' = \frac{y-x+1}{y+x+5};$$

$$(2) y' = \frac{2x^3 + 3xy^2 - 7x}{3x^2y + 2y^3 - 8y};$$

$$(3) (x - 2\sin y + 3)dx - (2x - 4\sin y - 3)\cos y dy = 0.$$

【解】(1) 解方程组  $\begin{cases} y-x+1=0 \\ y+x+5=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, -3),$

令  $X = x+2, Y = y+3$  代入原方程

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y-X}{Y+X} = \frac{\frac{Y}{X}-1}{\frac{Y}{X}+1},$$

再令  $Y = uX, \frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX},$

$$\text{得 } u + X \frac{du}{dX} = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow \frac{u+1}{u^2+1} du = -\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \arctan u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = -\ln X + C.$$

变量还原,得

$$\arctan\left(\frac{y+3}{x+2}\right) + \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{y+3}{x+2}\right)^2\right] = -\ln(x+2) + C.$$

$$(2) \text{原方程} \Rightarrow \frac{ydy}{x dx} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8} \Rightarrow \frac{d(y^2)}{d(x^2)} = \frac{2x^2 + 3y^2 - 7}{3x^2 + 2y^2 - 8},$$

$$\text{令 } y^2 = \eta, x^2 = \xi, \text{则方程变为} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\xi + 3\eta - 7}{3\xi + 2\eta - 8}, \quad (2)$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} 2\xi + 3\eta - 7 = 0 \\ 3\xi + 2\eta - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\xi, \eta) = (2, 1),$$

$$\text{令 } X = \xi - 2, Y = \eta - 1,$$

$$\text{代入 (2) 得} \frac{dY}{dX} = \frac{2X + 3Y}{3X + 2Y} = \frac{2 + 3\frac{Y}{X}}{3 + 2\frac{Y}{X}}, \quad (3)$$

$$\text{再令 } u = \frac{Y}{X}, \text{代入 (3)} \Rightarrow \frac{3 + 2u}{2(1 - u^2)} du = \frac{dX}{X}. \quad (4)$$

$$\text{对 (4) 式两边积分} \Rightarrow \frac{1+u}{(1-u)^5} = CX^4,$$

变量还原,得

$$x^2 + y^2 - 3 = C(x^2 - y^2 - 1)^5.$$

$$(3) \text{原方程} \Rightarrow (x - 2\sin y + 3)dx - (2x - 4\sin y - 3)d(\sin y) = 0,$$

$$\text{令 } \sin y = z, \text{则方程} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{x - 2z + 3}{2x - 4z - 3}, \quad (5)$$

$$\text{再令 } x - 2z = u, 1 - 2 \frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx},$$

$$\text{方程 (5)} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{du}{dx} = \frac{u+3}{2u-3}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{9}{3-2u}$$

$$\Rightarrow (3-2u)du = 9dx,$$

两边积分  $\Rightarrow 3u - u^2 = 9x + C$ ,

变量还原得  $3(x - 2\sin y) - (x - 2\sin y)^2 = 9x + C$ .

**【例 6.7】** 求解下列微分方程:

$$(1) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y(-1) = 0;$$

$$(2) (x^2 + 2xy - y^2)dx - (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0, y(1) = 1;$$

$$(3) (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0, y(1) = 0.$$

**【解】** (1) 令  $u = \frac{y}{x}, y = ux, y' = u + xu'$ , 原方程

$$\Rightarrow u + xu' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow udu = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C,$$

$$\text{变量还原} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x| + C,$$

将初始条件  $y(-1) = 0$  代入上式, 得  $C = 0$ ,

$$\text{故方程的解为 } \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln|x|.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{y^2 + 2xy - x^2} = \frac{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1},$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x} \text{ 则上式 } \Rightarrow u + xu' = \frac{1 + 2u - u^2}{u^2 + 2u - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2 + 2u - 1}{-1 - 3u + 3u^2 + u^3} du = -\frac{dx}{x} \quad (\text{初始条件变为 } u(1) = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \ln(u^3 + 3u^2 - 3u - 1) = -\ln x + \frac{1}{3} \ln C$$

$$\Rightarrow u^3 + 3u^2 - 3u - 1 = \frac{C}{x^3}, \text{ 代入初始条件 } u(1) = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 3xy^2 - 3x^2y - x^3 = 0.$$

$$(3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u, y = ux, y' = u + xu',$$

$$\text{代入原方程} \Rightarrow u + xu' = u + \sqrt{1 + u^2} \quad (\text{初始值为 } u(1) = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow u + \sqrt{1 + u^2} = Cx, \text{ 代入初始值 } u(1) = 0 \Rightarrow C = 1,$$

$$\text{故原方程的解为 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

**【例 6.8】** 求解下列微分方程:

$$(1) (x+1)y' - ny = (1+x)^{n+1}e^x \sin x; \quad (2) y' + \sin y + x \cos y + x = 0;$$

$$(3) y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}.$$

【解】(1) 化为标准方程

$$y' - \frac{n}{x+1}y = (1+x)^n e^x \sin x, \quad (6)$$

$$\textcircled{1} y' = \frac{n}{x+1}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{n}{x+1}dx \Rightarrow \ln y = n \ln(x+1) + \ln C$$

$$\Rightarrow y = C(x+1)^n.$$

② 令  $y = C(x)(x+1)^n$  为方程 ⑥ 的解, 代入并整理得

$$C'(x)(x+1)^n = (x+1)^n e^x \sin x \Rightarrow C'(x) = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \tilde{C}.$$

$$\textcircled{3} \text{ 原方程的通解 } y = \left[ \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \tilde{C} \right] (x+1)^n.$$

$$(2) \text{ 原方程 } \Rightarrow y' + 2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + 2\cos^2 \frac{y}{2} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\cos^2 \frac{y}{2}} y' + \tan \frac{y}{2} + x = 0 \Rightarrow \left( \tan \frac{y}{2} \right)' + \tan \frac{y}{2} + x = 0,$$

$$\text{令 } \tan \frac{y}{2} = u, \text{ 则上式 } \Rightarrow u' + u + x = 0. \quad (7)$$

$$\textcircled{1} u' + u = 0 \Rightarrow u = Ce^{-x}.$$

② 设  $u = C(x)e^{-x}$  为 ⑦ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(x)e^{-x} = -x \Rightarrow C(x) = -xe^x + e^x + \tilde{C}.$$

$$\textcircled{3} \text{ 方程 ⑦ 的解 } u = (-xe^x + e^x + \tilde{C})e^{-x},$$

$$\text{原方程的解 } \tan \frac{y}{2} = \tilde{C}e^{-x} + (1-x).$$

(3) 将  $x$  看做因变量,  $y$  看做自变量, 则原方程

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = x \cos y + \sin 2y. \quad (8)$$

$$\textcircled{1} \frac{dx}{dy} = x \cos y \Rightarrow \frac{dx}{x} = \cos y dy \Rightarrow \ln x = \sin y + \ln C \Rightarrow x = Ce^{\sin y}.$$

② 令  $x = C(y)e^{\sin y}$  为方程 ⑧ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(y)e^{\sin y} = \sin 2y \Rightarrow C'(y) = 2 \sin y \cos y e^{-\sin y}$$

$$\Rightarrow C(y) = -2(\sin y + 1)e^{-\sin y} + \tilde{C}.$$

③ 方程 ⑧ 也即原方程的通解为

$$x = \tilde{C}e^{\sin y} - 2(\sin y + 1).$$

【例 6.9】设  $a, b$  为正整数,  $\lambda$  为非负数, 微分方程  $\frac{dy}{dx} + ay = be^{-\lambda x}$ .

(1) 求该方程的通解;

(2) 证明: 当  $\lambda = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{b}{a}$ ;

当  $\lambda > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

【解】(1) 通解为  $y = e^{-\int a dx} \left( \int b e^{-\lambda x} e^{\int a dx} dx + c \right) = e^{-ax} \left( b \int e^{(a-\lambda)x} dx + c \right)$

$$= \begin{cases} ce^{-ax} + \frac{b}{a-\lambda} e^{-\lambda x}, & \lambda \neq a, \\ (bx+c)e^{-ax}, & \lambda = a. \end{cases}$$

(2) 当  $\lambda = 0$  时,  $y = ce^{-ax} + \frac{b}{a}$ , 所以,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( ce^{-ax} + \frac{b}{a} \right) = \frac{b}{a}$ .

当  $\lambda > 0$  且  $\lambda \neq a$  时,  $y(x) = ce^{-ax} + \frac{b}{a-\lambda} e^{-\lambda x}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( ce^{-ax} + \frac{b}{a-\lambda} e^{-\lambda x} \right) = 0,$$

当  $\lambda > 0$  且  $\lambda = a$  时,  $y(x) = (bx+c)e^{-ax}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (bx+c)e^{-ax} = 0.$$

【例 6.10】当  $0 \leq x \leq b$  时, 函数  $f(x)$  满足  $f'(x) = p(x)f(x)$ ,  $f(0) = a$ ; 函数  $g(x)$  满足  $g'(x) \geq p(x)g(x)$ ,  $g(0) = a$ .

证明:  $g(x) \geq f(x)$ ,  $0 \leq x \leq b$ .

【证】令  $F(x) = g(x) - f(x)$ ,  $F(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= g'(x) - f'(x) \geq p(x)g(x) - p(x)f(x) \\ &= p(x)[g(x) - f(x)] = p(x)F(x), \end{aligned}$$

即  $F'(x) - p(x)F(x) \geq 0$ , 有

$$[F'(x) - p(x)F(x)]e^{-\int_0^x p(t) dt} \geq 0,$$

即  $[F(x)e^{\int_0^x p(t) dt}]' \geq 0$ . 所以  $G(x) = F(x)e^{\int_0^x p(t) dt}$  单调增加.

当  $0 \leq x \leq b$  时,  $G(x) \geq G(0) = 0$ , 所以,  $F(x) \geq 0$ , 即  $g(x) \geq f(x)$ ,  $0 \leq x \leq b$ .

【例 6.11】解下列微分方程:

$$(1) y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}; \quad (2) xy' + 2y = 3x^3y^{\frac{4}{3}};$$

$$(3) xy dx = (2x^2 - y^4) dy.$$

【解】(1) 原方程  $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}y' - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$ ,

$$\text{令 } \sqrt{y} = z, \text{ 于是方程 } \Rightarrow 2 \frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = x \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}x. \quad (9)$$

$$\textcircled{1} \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2 \frac{dx}{x} = \ln x = 2 \ln x + \ln C \Rightarrow z = Cx^2,$$

② 令  $z = C(x)x^2$  为方程 ⑨ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(x)x^2 = \frac{1}{2}x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \ln x + \tilde{C},$$

③ 原方程的通解为  $\sqrt{y} = \left( \frac{1}{2} \ln x + \tilde{C} \right) x^2$ .

$$(2) \text{ 原方程 } \Rightarrow y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{3}}y' + \frac{2}{x}y^{-\frac{1}{3}} = 3x^2,$$

$$\text{令 } z = y^{-\frac{1}{3}}, \text{ 则方程 } \Rightarrow -3z' + \frac{2}{x}z = 3x^2 \Rightarrow z' - \frac{2}{3x}z = -x^2. \quad (10)$$

$$\textcircled{1} z' = \frac{2}{3x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2}{3x}dx \Rightarrow z = Cx^{\frac{2}{3}}.$$

② 设  $z = C(x)x^{\frac{2}{3}}$  为 ⑩ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(x)x^{\frac{2}{3}} = -x^2 \Rightarrow C(x) = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + \tilde{C}.$$

③ 原方程的通解为  $y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}x^3 + \tilde{C}x^{\frac{2}{3}}$ .

$$(3) \text{ 原方程 } \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -y^3x^{-1} \Rightarrow x \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^2 = -y^3, \quad \textcircled{11}$$

$$\text{令 } z = x^2, \text{ 则方程 } \textcircled{11} \Rightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{4}{y}z = -2y^3. \quad \textcircled{12}$$

$$\textcircled{1} \frac{dz}{dy} = \frac{4}{y}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4 \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln z = 4 \ln y + \ln C \Rightarrow z = Cy^4,$$

令  $z = C(y)y^4$  为方程 ⑫ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(y)y^4 = -2y^3 \Rightarrow C(y) = -2 \ln y + \tilde{C},$$

方程 ⑫ 的解为  $z = (-2 \ln y + \tilde{C})y^4$ ,

原方程的通解为  $x^2 = (-2 \ln y + \tilde{C})y^4$ .

**【例 6.12】** 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且  $f(0) > 0$ , 已知它在  $[0, x]$  上的平均值等于  $f(0)$  与  $f(x)$  的几何平均值, 求  $f(x)$ .

**【解】** 由题意得

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \sqrt{f(0)f(x)}, \text{ 令 } a = \sqrt{f(0)},$$

有  $\int_0^x f(t) dt = ax \sqrt{f(x)}$ , 两边求导, 得

$$f(x) = a \sqrt{f(x)} + ax \cdot \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}},$$

即  $f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = \frac{2}{ax}[f(x)]^{\frac{3}{2}}$ . 令  $z = [f(x)]^{-\frac{1}{2}}$ , 得

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{ax},$$

可求得  $z = Cx + \frac{1}{a}$ , 即  $f(x) = \left(Cx + \frac{1}{a}\right)^{-2} = \frac{f(0)}{(1 + C\sqrt{f(0)}x)^2} \quad (C \geq 0).$

**【例 6.13】\*** 解下列微分方程:

$$(1) (3x^2 + 2xe^{-y})dx + (3y^2 - x^2e^{-y})dy = 0;$$

$$(2) \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0;$$

$$(3) 2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0.$$

**【解】** (1) 因为  $\frac{\partial M}{\partial y} = -2xe^{-y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

所以方程为全微分方程, 于是有

$$\int_0^x (3x^2 + 2x)dx + \int_0^y (3y^2 - x^2e^{-y})dy = C,$$

即  $x^3 + x^2 + y^3 + x^2 e^{-y} - x^2 = C$ , 亦即

原方程的通解为  $x^3 + y^3 + x^2 e^{-y} = C$ .

(2) 因为  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2x}{y^3} \right) = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}$  (当  $y \neq 0$  时),

所以方程为全微分方程, 于是有

$$\int_0^x \frac{2x}{1^3} dx + \int_1^y \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = C \Rightarrow x^2 - \frac{1}{y} \Big|_1^y + \frac{x^2}{y^3} \Big|_1^y = C,$$

故原方程的解为

$$-\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} = C.$$

(3) 因为  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3) = 6xy^2$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^2 - 1) = 2xy^2$ ,

所以方程不是全微分方程.

方程可改写成  $(2xy^3 dx + x^2 y^2 dy) - dy = 0$ ,

用简单的观察法看出积分因子为  $u = \frac{1}{y^2}$ ,

于是, 原方程  $\Rightarrow \frac{2xy^3 dx + x^2 y^2 dy}{y^2} - \frac{dy}{y^2} = 0$

$$\Rightarrow d(x^2 y) + d\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y + \frac{1}{y} = C \text{ 为原方程的通解.}$$

【例 6.14】\* 设函数  $f(x)$  具有一阶连续导数, 且  $f(\pi) = 1$ , 又

$$\frac{1}{x} y [\sin x - f(x)] dx + f(x) dy = 0, x > 0,$$

是全微分方程, 求  $f(x)$ , 并求此全微分方程的通解.

【解】根据已知, 有  $\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{x} y [\sin x - f(x)] \right\} = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$ , 即

$$f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{\sin x}{x}, x > 0,$$

可求得通解为  $f(x) = \frac{1}{x} (-\cos x + C), x > 0$ .

又  $f(\pi) = 1$ , 得  $C = \pi - 1$ , 所以,  $f(x) = \frac{1}{x} (-\cos x + \pi - 1), x > 0$ .

将  $f(x)$  代入原方程, 得

$$\frac{y}{x} \left( \sin x + \frac{\cos x + 1 - \pi}{x} \right) dx - \frac{\cos x + 1 - \pi}{x} dy = 0,$$

对它进行分项组合得

$$\frac{1}{x^2} [(xy \sin x + y \cos x) dx - x \cos x dy] + \frac{1}{x^2} (1 - \pi) (y dx - x dy)$$

$$= d\left(-\frac{y \cos x}{x}\right) + d\left[(\pi - 1) \frac{y}{x}\right] = 0,$$

所以, 原方程的通解为  $-\frac{y \cos x}{x} + (\pi - 1) \frac{y}{x} = C$ , 即

$$y = \frac{Cx}{\pi - 1 - \cos x}.$$

### 题型二 可降阶的高阶方程的求解

**提示** 可降阶的高阶方程的求解方法见表 6-6.

表 6-6

方程类型	解法及解的表达式
$y^{(n)} = f(x)$	通解为 $y = \underbrace{\int \cdots \int f(x) (dx)^n}_{n \text{ 次}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_{n-1} x + C_n$
不显含 $y$ 的二阶方程 $y'' = f(x, y')$	令 $y' = p$ , 则 $y'' = p'$ , 原方程 $\Rightarrow p' = f(x, p)$ —— 一阶方程, 设其解为 $p = \varphi(x, C_1)$ , 即 $y' = \varphi(x, C_1)$ , 则原方程的通解为 $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$
不显含 $x$ 的二阶方程 $y'' = f(y, y')$	令 $y' = p$ , 把 $p$ 看做 $y$ 的函数, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ , 把 $y', y''$ 的表达式代入原方程, 得 $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} f(y, p)$ —— 一阶方程, 设其解为 $p = \varphi(y, C_1)$ , 即 $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$ , 则原方程的通解为 $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$

**【例 6.15】** 求解下列方程.

$$(1) y'' = \frac{1}{x} y' + x e^x \sin x;$$

$$(2) y'' = \frac{1 + y'^2}{2y};$$

$$(3) y'' = \frac{3x^2 y'}{1 + x^3}, \text{ 满足 } y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 4; \quad (4) yy'' - y'^2 = y^2 \ln y.$$

**【解】** (1) 这是不显含  $y$  的二阶方程,

令  $y' = p$ , 则  $y'' = p'$  代入原方程, 得

$$p' = \frac{1}{x} p + x e^x \sin x, \quad (13)$$

$$\textcircled{1} p' = \frac{1}{x} p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow p = Cx,$$

② 令  $p = C(x)x$  为 ⑬ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(x)x = x e^x \sin x \Rightarrow C'(x) = e^x \sin x$$

$$\Rightarrow C(x) = \int e^x \sin x dx + \tilde{C}_1 = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \tilde{C}_1,$$

③ 方程 ⑬ 的解为  $p = \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) + \tilde{C}_1 x$ , 即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) + \tilde{C}_1 x,$$

$$\text{原方程的解为 } y = \int \left[ \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x) + \tilde{C}_1 x \right] dx + \tilde{C}_2$$



$$= \frac{1}{2} \left[ -xe^x \cos x + \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \right] + \frac{1}{2} \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2.$$

(2) 这是不显含  $x$  的方程, 令  $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 代入方程, 得

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{1+p^2}{2y} \Rightarrow \frac{2p dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(1+p^2) = \ln y + \ln C_1$$

$$\Rightarrow 1+p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm \sqrt{C_1 y - 1},$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx \Rightarrow \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2.$$

(3) 这是不显含  $y$  的方程, 令  $y' = p, y'' = p'$ , 代入原方程, 得

$$p' = \frac{3x^2 p}{1+x^3} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{3x^2}{1+x^3} dx$$

$$\Rightarrow \ln p = \ln(1+x^3) + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1(1+x^3),$$

将  $p|_{x=0} = 4$  代入上式, 得  $C_1 = 4$ , 于是

$$\frac{dy}{dx} = 4(1+x^3) \Rightarrow dy = 4(1+x^3)dx \Rightarrow y = x^4 + 4x + C_2,$$

将  $y|_{x=0} = 1$  代入上式, 得  $C_2 = 1$ , 故所求解为

$$y = x^4 + 4x + 1.$$

(4) 这是不显含  $x$  的方程, 且  $y \neq 0$ ,

$$\text{原方程} \Rightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)' = \ln y, \text{即 } (\ln y)'' = \ln y, \quad (14)$$

令  $\ln y = z$ , 则  $(14) \Rightarrow z'' = z$ , 这是二阶常系数线性齐次方程.

特征方程为  $\lambda^2 = 1$ , 解得  $\lambda = \pm 1$ , 则其通解为  $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ , 即

$$\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

### 题型三 计算二阶线性微分方程

【例 6.16】解下列微分方程:

(1)  $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ , 其中,  $a$  为实数;

(2)  $y'' + a^2 y = \sin x$ , 其中,  $a > 0$ , 为常数;

(3)  $y'' - 4y' + 4y = (1+x+\cdots+x^{23})e^{2x}$ .

【解】(1) ① 对应的特征方程为  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ , 特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ , 对应的齐次方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

② 非齐次方程的一个特解  $y^*$  为

$$y^* = \frac{1}{D^2 + 4D + 4} e^{ax} = \begin{cases} \frac{1}{(a+2)^2} e^{ax}, & a \neq -2 \text{ 时} \\ \frac{1}{2} x^2 e^{ax}, & a = -2 \text{ 时} \end{cases}.$$

故非齐次方程的通解为

$$y = \begin{cases} (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2} e^{ax}, & a \neq -2 \text{ 时} \\ (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}, & a = -2 \text{ 时} \end{cases}.$$

(2)① 特征方程为  $\lambda^2 + a^2 = 0$ , 特征值  $\lambda = \pm ai$ , 对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

② 非齐次方程的一个特解为

$$y^* = \frac{1}{D^2 + a^2} \sin x = \begin{cases} \frac{1}{a^2 - 1} \sin x, & a \neq 1 \\ -\frac{1}{2} x \cos x, & a = 1 \end{cases}.$$

故非齐次方程的通解为

$$y = \begin{cases} C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2 - 1} \sin x, & a \neq 1 \\ C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x, & a = 1 \end{cases}.$$

(3) 特征方程为  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$  (重根),

对应齐次方程通解为  $y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$ .

$$\begin{aligned} \text{非齐次方程特解 } y^*(x) &= \frac{1}{D^2 - 4D + 4} e^{2x}(1 + x + \cdots + x^{23}) \\ &= e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 4} (1 + x + \cdots + x^{23}) \\ &= e^{2x} \frac{1}{D^2} (1 + x + \cdots + x^{23}) \\ &= e^{2x} \left( \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^{25}}{24 \cdot 25} \right), \end{aligned}$$

$$\text{故原方程的通解为 } y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x} \left( \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^{25}}{24 \cdot 25} \right)$$

【例 6.17】解下列微分方程:

- (1)  $y''' - y = \sin x$ ; (2)  $y''' + y'' + y' + y = \cos 3x$ ;  
 (3)  $y''' - 2y'' - 3y' = x^2 + 2x - 1$ ; (4)  $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ ;  
 (5)  $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$ .

【解】(1) 特征方程  $\lambda^3 - 1 = 0$ , 即  $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},$$

对应齐次方程的通解为  $y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$ .

$$\begin{aligned} \text{非齐次方程特解为 } y^*(x) &= \frac{1}{D^3 - 1} \sin x = \frac{1}{D^2 \cdot D - 1} \sin x \\ &= -\frac{1}{D+1} \sin x = -\frac{D-1}{D^2-1} \sin x \\ &= \frac{1}{2} (\cos x - \sin x), \end{aligned}$$

故原方程通解为  $y(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{1}{2} (\cos x - \sin x)$ .

(2) 特征方程为  $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm i,$$

对应齐次方程的通解为  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ .

$$\begin{aligned}\text{非齐次方程的特解为 } y^*(x) &= \frac{1}{D^3 - D^2 + D + 1} \cos 3x \\ &= \frac{1}{-9D - 9 + D + 1} \cos 3x = -\frac{1}{8} \frac{1}{D + 1} \cos 3x \\ &= -\frac{1}{8} \frac{D - 1}{D^2 - 1} \cos 3x = \frac{1}{80} (-3 \sin 3x - \cos 3x),\end{aligned}$$

故原方程的通解为  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{80} (3 \sin 3x + \cos 3x)$ .

$$\begin{aligned}\text{(3) 特征方程为 } \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda &= 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3,\end{aligned}$$

对应齐次方程通解为  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$ .

$$\begin{aligned}\text{非齐次方程特解为 } y^*(x) &= \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 3D} (x^2 + 2x - 1) \\ &= \frac{1}{D} \frac{1}{D^2 - 2D - 3} (x^2 + 2x - 1) \\ &= \frac{1}{D} \left( -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}D - \frac{7}{27}D^2 \right) (x^2 + 2x - 1) \\ &= \left( -\frac{1}{3D} + \frac{2}{9} - \frac{7}{27}D \right) (x^2 + 2x - 1) \\ &= -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{27}x - \frac{20}{27}.\end{aligned}$$

故原方程的通解为  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{27}x - \frac{20}{27}$ .

$$\text{(4) 特征方程为 } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ (重根)},$$

对应齐次方程的通解为  $y(x) = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$ .

$$\begin{aligned}\text{非齐次方程特解为 } y^*(x) &= \frac{1}{D^2 - 6D + 9} (x + 1)e^{3x} \\ &= e^{3x} \frac{1}{(D + 3)^2 - 6(D + 3) + 9} (x + 1) \\ &= e^{3x} \frac{1}{D^2} (x + 1) = \left( \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{3x},\end{aligned}$$

故原方程的通解为  $y(x) = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \left( \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{3x}$ .

$$\text{(5) 特征方程为 } \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i.$$

对应齐次方程的通解为  $y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ .

$$\begin{aligned}\text{非齐次方程的特解为 } y^*(x) &= \frac{1}{D^2 - 2D + 2} e^x x \cos x \\ &= e^x \frac{1}{(D + 1)^2 - 2(D + 1) + 2} x \cos x \\ &= e^x \frac{1}{D^2 + 1} x \cos x,\end{aligned}$$

因为  $\cos x$  是  $e^{ix}$  的实部, 所以先求  $\frac{1}{D^2 + 1} x e^{ix}$  再取实部, 即得  $\frac{1}{D^2 + 1} x \cos x$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{D^2+1}e^{ix} &= e^{ix} \frac{1}{(D+i)^2+1}x = e^{ix} \frac{1}{D^2+2Di}x \\
 &= e^{ix} \frac{1}{D(D+2i)}x = e^{ix} \frac{1}{D} \left( \frac{1}{2i} + \frac{D}{4} \right) x \\
 &= e^{ix} \left( \frac{1}{2i} \frac{1}{D} + \frac{1}{4} \right) x = e^{ix} \left( \frac{1}{2i} \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x \right) \\
 &= e^{ix} \left( -\frac{i}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \right), \\
 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{D^2+1} e^{ix} \right) &= \operatorname{Re} \left[ e^{ix} \left( -\frac{i}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \right) \right] = \frac{x}{4} (x \sin x + \cos x), \\
 y^*(x) &= \frac{1}{4} x (x \sin x + \cos x) e^x,
 \end{aligned}$$

故原方程的通解为  $y(x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{4} x e^x (x \sin x + \cos x)$ .

**【例 6.18】** 求初值问题  $y'' + y = 3 |\sin 2x|$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

**【解】** 易求得齐次方程的通解为  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . 当  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时, 方程为  $y'' + y = 3 \sin 3x$ ,

可求得其特解为  $y_1^* = -\sin 2x$ , 于是它的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin 2x,$$

代入  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ , 得  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \sqrt{2}$ , 所以, 当  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时, 特解为

$$y = \sqrt{2} \sin x - \sin 2x.$$

由该特解可得  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \sqrt{2} - 2$ , 可将它作为当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$  时, 方程  $y'' + y =$

$-3 \sin 2x$  的初始条件, 易求得当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$  时, 该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin 2x.$$

代入  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = \sqrt{2} - 2$ , 得  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \sqrt{2} - 4$ , 所以当  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$  时, 该方程的特解为

$$y = (\sqrt{2} - 4) \sin x + \sin 2x.$$

于是原方程在初始条件下的特解为

$$y = \begin{cases} (\sqrt{2} - 4) \sin x + \sin 2x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \sqrt{2} \sin x - \sin 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**注** 当方程的任意项为分段函数时, 注意非齐次方程初值问题的初始条件的确定.

#### 题型四 欧拉方程的计算

**提示** 欧拉方程具有这种特点: 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同的方程, 即形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

的方程,称为欧拉方程.其中, $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数.

解法:作自变量  $x$  的变量替换,化为常系数方程.

令  $x = e^t$ ,即  $t = \ln x$ ,把  $y$  看做  $t$  的函数,则

$$xy' = \frac{dy}{dt} = Dy;$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = D(D-1)y;$$

...

$$x^n y^{(n)} = D(D-1) \cdot \cdots \cdot (D-n+1)y,$$

于是,欧拉方程化为  $P_n(D)y = f(e^t)$ .

解出  $y = y(t)$ ,则  $y = y(\ln x)$  就是欧拉方程的解.

**【例 6.19】**解下列微分方程:

$$(1) x^2 y'' + 3xy' - 3y = x^3;$$

$$(2) x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x \sin(\ln x);$$

$$(3) x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x \ln x.$$

**【解】**(1) 令  $x = e^t$ ,则  $t = \ln x$ ,用算子法,

$$\text{原方程} \Rightarrow [D(D-1) + 3D - 3]y = e^{3t}$$

$$\Rightarrow (D^2 + 2D - 3)y = e^{3t},$$

⑮

$$\text{特征方程为 } \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1,$$

$$\text{对应的关于 } t \text{ 的齐次方程通解为 } y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t,$$

$$\text{非齐次方程 ⑮ 的特解为 } y^*(t) = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} e^{3t} = \frac{1}{12} e^{3t},$$

$$\text{故方程 ⑮ 的通解为 } y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t + \frac{1}{12} e^{3t},$$

$$\text{于是原方程的通解为 } y(x) = C_1 \frac{1}{x^3} + C_2 x + \frac{1}{12} x^3.$$

(2) 令  $x = e^t$ ,则  $t = \ln x$ ,原方程  $\Rightarrow$

$$[D(D-1)(D-2) - D(D-1) + 2D - 2]y = e^t \sin t$$

$$\Rightarrow (D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = e^t \sin t.$$

⑯

$$\text{⑯ 的特征方程为 } \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2,$$

$$\text{⑯ 对应的齐次方程通解为 } y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t},$$

$$\text{⑯ 的一个特解为 } y^*(t) = \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} e^t \sin t$$

$$= e^t \frac{1}{D^3 - D^2} \sin t,$$

$$= e^t \left( \frac{1}{1-D} \sin t \right) = \frac{1}{2} e^t [\sin t + \cos t],$$

$$\text{⑯ 的通解为 } y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + \frac{1}{2} e^t [\sin t + \cos t],$$

$$\text{原方程的通解为 } y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2 + \frac{1}{2} x [\sin \ln x + \cos \ln x].$$

(3) 令  $x = e^t$ ,则  $t = \ln x$ ,原方程  $\Rightarrow$

$$[D(D-1)(D-2)+3D(D-1)+D-1]y = te^t,$$

即

$$(D^3-1)y = te^t,$$

⑰

其特征方程为  $\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,

⑰ 对应的齐次方程的通解为  $y(t) = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$ ,

⑰ 的特解为  $y^*(t) = \frac{1}{D^3-1}te^t = e^t \frac{1}{(D+1)^3-1}t = e^t \frac{1}{D(D^2+3D+3)}t$   
 $= e^t \frac{1}{D} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3}D \right) t = e^t \left( \frac{1}{3} \frac{1}{D} - \frac{1}{3} \right) t = \frac{1}{6}t(t-2)e^t,$

⑰ 的通解为  $y(t) = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{1}{6}t(t-2)e^t,$

原方程的通解为  $y(x) = C_1 x + \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ C_2 \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] + \left[ C_3 \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] + \frac{x}{6} \ln x (\ln x - 2).$

### 题型五 微分方程的应用

微分方程的应用很广泛,我们只讲在几何和力学中的应用.

#### (一) 在几何中的应用

##### 解题程序

(1) 根据所给的某几何特性画一草图;

(2) 利用  $y'$  表示曲线  $y = f(x)$  上  $(x, y)$  点处的切线斜率,或  $-\frac{dx}{dy}$  表示曲线  $y = f(x)$  上

$(x, y)$  点的法线斜率,以及  $\int_a^x f(t)dt$  表示由曲线  $y = f(x)$ ,  $f(x) \geq 0$ , 直线  $x = x, x = a, x$  轴所围图形的面积等方面的意义,列方程;

(3) 解方程.

**【例 6.20】** 在上半平面求一条凹的曲线,其任一点  $P(x, y)$  处的曲率等于此曲线在该点的法线段  $PQ$  长度的倒数( $Q$  是法线与  $x$  轴的交点),且曲线在点  $(1, 1)$  处的切线与  $x$  轴平行.

**【解】** 草图见图 6-1,所求曲线为  $y = f(x)$ . 于是其在  $P(x, y)$  点处的曲率

为  $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$  (因为曲线为凹的,所以  $y'' > 0$ ),

曲线  $y = f(x)$  在  $P(x, y)$  点处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) (y' \neq 0),$$

它与  $x$  轴的交点  $Q$  的坐标为  $Q(x + yy', 0)$ , 于是

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

由题设  $K = \frac{1}{|PQ|}$ , 即  $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow yy'' = 1 + y'^2$  —— 这是不显含  $x$  的方程,

初始条件为  $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$ .

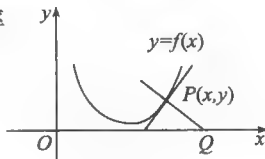


图 6-1

令  $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 于是方程变为

$$yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \Rightarrow \frac{p}{1+p^2} dp = \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1+p^2) = \ln y + C_1, \text{ 代入 } y'|_{x=1} = 0, \text{ 得 } C_1 = 0.$$

$$\Rightarrow p^2 = y^2 - 1 \Rightarrow p = \pm \sqrt{y^2 - 1}. \text{ 积分得}$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pm (x-1) - C_2, \text{ 代入 } y|_{x=1} = 1, \text{ 得 } C_2 = 0,$$

$$\text{故所求曲线为 } y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm(x-1)}, \text{ 即 } y = \frac{1}{2}(e^{x-1} + e^{-(x-1)}).$$

**【例 6.21】** 已知曲线过  $(1,1)$  点, 如果把曲线上任一点  $P$  处的切线与  $y$  轴的交点记作  $Q$ , 则以  $PQ$  为直径所做的圆都经过点  $F(1,0)$ , 求此曲线方程.

**【解】** 作草图(见图 6-2), 所求曲线设为  $y = f(x)$ , 于是切线方程为  $Y - y = y'(X - x)$ , 切线  $PQ$  与  $y$  轴的交点  $Q$  的坐标为  $Q(0, y - xy')$ ,

设  $M$  点为切线段  $PQ$  的中点, 坐标为  $(\frac{x}{2}, y - \frac{xy'}{2})$ ,

因为圆经过点  $F(1,0)$ , 所以  $|MQ| = |MF|$ , 于是得方程

$$\begin{cases} yy' = \frac{1}{x}y^2 - 1 + \frac{1}{x} \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

$$\text{上式中令 } y^2 = Z, \text{ 则上式 } \Rightarrow \frac{1}{2}(y^2)' = \frac{1}{x}y^2 - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow Z' = \frac{2}{x}Z - 2 + \frac{2}{x},$$

⑬

$$\textcircled{1} Z' = \frac{2}{x}Z \Rightarrow \frac{dZ}{Z} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln Z = 2\ln x + \ln C, Z = Cx^2.$$

② 令  $Z = C(x)x^2$  为 ⑬ 的解, 代入并整理, 得

$$C'(x)x^2 = -2 + \frac{2}{x} \Rightarrow C'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \Rightarrow C(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \tilde{C},$$

$$\text{故 ⑬ 的通解为 } Z = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \tilde{C}\right)x^2 = 2x - 1 + \tilde{C}x^2,$$

即方程的通解为  $y^2 = 2x - 1 + \tilde{C}x^2$ , 代入初值  $y|_{x=1} = 1$ , 得  $\tilde{C} = 0$ .

于是所求曲线为  $y^2 = 2x - 1$ .

## (二) 在力学中的应用

### 解题程序:

- 1° 建立坐标系, 对所研究物体进行受力分析;
- 2° 根据牛顿第二定律  $F = ma$ , 列方程;
- 3° 解方程.

**【例 6.22】** 一质量为  $m$  的船以速度  $v_0$  行驶, 在  $t = 0$  时, 动力关闭, 假设水的阻力正比于  $v^n$ , 其中  $n$  为一常数,  $v$  为瞬时速度, 求速度与滑行距离的函数关系.

**【解】** 船所受的净力 = 水向前的推力 - 水的阻力 =  $0 - kv^n$ .

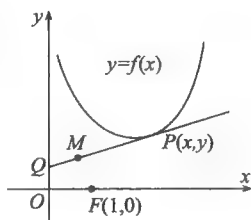


图 6-2

加速度 = 速度对时间的导数, 即  $a = \frac{dv}{dt}$ ,

于是, 由题设有

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = kv^n \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

现在要求的不是速度与时间的关系, 而是速度与距离的关系.

设距离为  $x$ , 于是, 上述方程可化为

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \cdot \frac{dv}{dx} = -kv^n \\ &\Rightarrow mv^{1-n} dv = -k dx, \end{aligned}$$

⑩

当  $n \neq 2$  时, 两边积分, 得  $\frac{mv^{2-n}}{2-n} = -kx + C$ ,

把  $v|_{t=0} = v_0, x|_{t=0} = 0$  代入上式, 得  $C = \frac{mv_0^{2-n}}{2-n}$ ,

故  $v^{2-n} = -\frac{k(2-n)}{m}x + v_0^{2-n}$ .

当  $n = 2$  时, ⑩  $\Rightarrow mv^{-1} dv = -k dx$ , 积分得  $v = Ce^{-\frac{k}{m}x}$ , 将初值代入, 得  $C = v_0$ ,

故  $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}x}$ .

**【例 6.23】**两个质量相同的重物挂于弹簧的下端, 其中一个坠落, 求另一个重物的运动规律, 已知弹簧挂一个重物时伸长为  $a$ .

**【解】**如图 6-3 所示, 建立坐标系, 设弹簧自由状态时长度为  $l$ , 取  $l+a$  处 (即挂一重物时弹簧的长度) 为坐标原点, 取  $x$  轴铅直向下, 设在  $t$  时刻, 重物在  $x$  处, 由胡克定律知, 此时弹性恢复为  $-kx$ ,  $k$  为弹性系数, 负号“ $-$ ”是因为弹性恢复力与位移反向, 由牛顿第二定律有

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \\ x(0) = a, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

因为挂两重物时, 弹簧伸长  $2a$ , 由胡克定律有

$$2mg = k \cdot 2a \Rightarrow k = \frac{mg}{a},$$

所以方程  $\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x$ ,

其特征方程:  $\lambda^2 = -\frac{g}{a} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{a}}i$ ,

于是方程的通解为  $x = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t$ .

$$\Rightarrow x' = -C_1 \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t - C_2 \sqrt{\frac{g}{a}} \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t,$$

把初始条件  $x(0) = a, x'(0) = 0$  代入以上两式, 得  $C_1 = a, C_2 = 0$ .

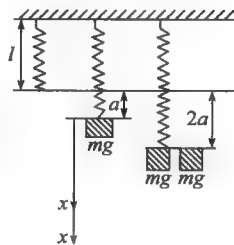


图 6-3



所以,所求的重物的运动规律为  $x = a \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t$ .

### 第3节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 已知常系数齐次或非齐次微分方程的解,反求微分方程时,要想到齐次微分方程的解与其特征根的关系.

**【例 6.24】** 在下列微分方程中,以  $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$  ( $C_1, C_2, C_3$  是任意常数) 为通解的是

(A)  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ .

(B)  $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$ .

(C)  $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ .

(D)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ . **【 】**

**【分析】** 本题已知微分方程的通解,反求微分方程的形式,一般根据通解的形式分析出特征值,然后从特征方程入手.

**【解】** 因为  $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$  ( $C_1, C_2, C_3$  是任意常数) 为通解,

所以微分方程的特征值为  $1, \pm 2i$ . 于是特征方程为  $(\lambda - 1)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$ , 即

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

于是所求的微分方程为  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ . 故选(D).

**【例 6.25】** 函数  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$  满足的一个微分方程是

(A)  $y'' - y' - 2y = 3x e^x$ .

(B)  $y'' - y' - 2y = 3e^x$ .

(C)  $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ .

(D)  $y'' + y' - 2y = 3e^x$ . **【 】**

**【分析】** 先根据所给解分析出对应齐次微分方程的特征方程的根,然后由特解形式判定非齐次项形式.

**【解】** 由所给解的形式,可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0, \text{ 即 } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

故对应的齐次微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

又  $y^* = x e^x$  为原微分方程的一个特解,而  $\lambda = 1$  为特征单根,故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式  $f(x) = C e^x$  ( $C$  为常数). 所以综合比较四个选项,应选(D).

#### 二、综合题解析

**【例 6.26】** 设函数  $f(x)$  可导,且对任何实数  $x, h$  满足  $f(x) \neq 0$ ,

$$f(x+h) = \int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt + f(x),$$

此外,  $f(1) = \sqrt{2}$ , 求  $f(x)$  的表达式.

**【分析】** 先将所给等式转化为

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt,$$

然后令  $h \rightarrow 0$ , 对上式两边取极限得到微分方程, 解此微分方程求得  $f(x)$ .

【解】由所给等式得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt, \quad (1)$$

由于

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt \\ & \xrightarrow{\text{积分中值定理}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)} \cdot h \quad (\xi \text{ 为介于 } x \text{ 与 } x+h \text{ 之间的实数}) \\ & = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\xi(\xi^2+1)}{f(\xi)} = \frac{x(x^2+1)}{f(x)}, \end{aligned} \quad (3)$$

所以令  $h \rightarrow 0$ , 对 (1) 式的两边取极限, 且将 (2)(3) 代入得微分方程

$$f'(x) = \frac{x(x^2+1)}{f(x)}, \text{ 即 } f(x)df(x) = x(x^2+1)dx.$$

$$\text{两边积分得} \quad \frac{1}{2}f^2(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 + C. \quad (4)$$

将  $f(1) = \sqrt{2}$  代入 (4) 得

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4}(1+1)^2 + C, \text{ 即 } C = 0.$$

代入 (4) 得

$$f(x) = \pm \frac{x^2+1}{\sqrt{2}}.$$

由于  $f(1) = \sqrt{2}$ , 所以上式的根号前应取“+”号, 从而所求的  $f(x)$  表达式为

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{2}}.$$

● 极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt$  也可用洛必达法则计算:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} \frac{t(t^2+1)}{f(t)} dt}{h} \\ &\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)[(x+h)^2+1]}{f(x+h)} = \frac{x(x^2+1)}{f(x)}. \end{aligned}$$

【例 6.27】设函数  $y = f(x)$  由  $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$  所确定, 其中  $\psi(t)$  具有二阶导数, 且

$$\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \text{ 求函数 } \psi(t).$$

【解】由  $\begin{cases} x' = 2 + 2t \\ y' = \psi'(t) \end{cases}$ , 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2+2t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)(2+2t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

$$\text{又 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \text{ 所以}$$

$$\frac{3}{4(1+t)} = \frac{\psi''(t)(2+2t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

即  $\frac{\psi''(t)(1+t) - \psi'(t)}{(1+t)^2} = 3$ , 即  $\left[\frac{\psi'(t)}{1+t}\right]' = 3$ , 两边积分得

$$\frac{\psi'(t)}{1+t} = 3t + C_1 \Rightarrow \psi'(t) = 3t(1+t) + C_1(1+t),$$

两边再次积分得  $\psi(t) = t^3 + \frac{1}{2}(3+C_1)t^2 + C_1t + C_2$ .

将  $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$  代入上两式得  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , 于是

$$\psi(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

### 习 题 六

1. 求解下列微分方程:

$$(1) y' - e^{-y} + e^x = 0; \quad (2) \frac{dy}{dx} = (1-y^2)\tan x, y(0) = 2.$$

2. 求解下列微分方程:

$$(1) (1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0;$$

$$(2) y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1.$$

3. 求解下列微分方程:

$$(1) \sqrt{1+x^2}y' \sin 2y = 2x \sin^2 y + e^{2\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) (x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0;$$

$$(3) xy' \sin y \ln x + \cos y(1 - x \cos y) = 0.$$

4. 求解下列微分方程:

$$(1) e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0;$$

$$(2) \left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0;$$

$$(3) (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$

5. 求解下列微分方程:

$$(1) y' = \frac{y^2 - x}{2y(x-1)}; \quad (2) xy' + y = x^3 y^6.$$

6. 设函数  $\varphi(x)$  在实轴上连续,  $\varphi'(0)$  存在, 且具有性质  $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ , 试求出  $\varphi(x)$ .

7. 证明:  $y = e^{\int_{x_0}^x -p(s)ds} (y_0 + \int_{x_0}^x Q(s)e^{\int_{x_0}^s p(s)ds} ds)$  是一阶线性方程  $y' + p(x)y = Q(x)$  满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的特解.

8. 求解下列方程:

$$(1) ydx + (y-x)dy = 0, y(0) = 1;$$

$$(2) x(y' + 1) + \sin(x+y) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

9. 求解下列方程:

$$(1)(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0;$$

$$(2)xy'' + x(y')^2 - y' = 0, y(2) = 2, y'(2) = 1;$$

$$(3)2y'' + (y')^2 = y, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

10. 求解下列微分方程:

$$(1)y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0;$$

$$(2)y^{(4)} - 5y'' + 10y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 6, y'''(0) = -14.$$

11. 求解下列微分方程:

$$(1)y'' + y = x + 3\sin 2x + 2\cos x;$$

$$(2)y'' + y = 2xe^x + 4\sin x, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$(3)y'' + 4y' + 4y = e^{ax}.$$

12. 求解下列微分方程:

$$(1)x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x);$$

$$(2)(x+1)^2y'' - (x+1)y' + y = 6(x+1)\ln(x+1).$$

13. 求  $xOy$  平面上一曲线, 使其过每点的切线同该点的向径及  $Oy$  轴构成一个等腰三角形.

14. 一质量为  $m$  的物体, 在黏性液体中静止自由下落, 假如液体阻力与运动速度成正比, 试求物体运动的规律.

15. 有一盛满了水的圆锥形漏斗, 高 10 cm, 顶角  $\alpha = 60^\circ$ , 漏斗尖处有面积为  $0.5 \text{ cm}^2$  的小孔, 求水流出时漏斗内水深变化规律, 并求出水全部流出所需的时间 (提示: 水从深处为  $h$  的孔流出的速度  $v = 0.6\sqrt{2gh} \text{ cm/s}$ ).

16. 设经过原点的曲线簇上任一点  $P$  处的切线交  $x$  轴于点  $T$ , 从点  $P$  向  $x$  轴作垂线, 其垂足为  $Q$ , 已知  $PT, PQ$  与  $x$  轴所围成的三角形的面积与曲边三角形  $OPQ$  的面积之比等于常数  $k, k > \frac{1}{2}$ , 试求该曲线簇.

17. 有一房间容积为  $100 \text{ m}^3$ , 开始时房间空气中含有二氧化碳  $0.12\%$ , 为了改善房间的空气品质, 用一台风量为  $10 \text{ m}^3/\text{min}$  的排风扇通入含  $0.04\%$  的二氧化碳的新鲜空气, 同时以相同的风量将混合均匀的空气排出, 求排出 10 min 后, 房间中二氧化碳的含量的百分比.

## 参 考 答 案

$$1. (1)y = \ln[1 + c\exp(-e^x)]; \quad (2)y = \frac{3 + \cos^2 x}{3 - \cos^2 x}.$$

$$2. (1)x + ye^{\frac{x}{y}} = C; \quad (2)y = -x.$$

$$3. (1)\sin^2 y = e^{2\sqrt{1+x^2}}(C + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|);$$

$$(2)x = y^2 + Cy^2e^{\frac{1}{y}}; \quad (3)(x+C)\cos y = \ln x.$$

$$4. (1)xe^y - y^2 = C; \quad (2)\frac{1}{2}x^2 + y + \arcsin \frac{x}{y} = C; \quad (3)x + \ln(x^2 + y^2) = C.$$

$$5. (1)y^2 = C(x-1) - (x-1)\ln(x-1) + x; \quad (2)y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + Cx^5.$$

$$6. \varphi(x) = e^{\varphi'(0)x}.$$

7. 略.

$$8. (1)x = -y\ln y; \quad (2)\frac{1 - \cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\pi}{2x}.$$

9. (1)  $y = \frac{1+C_1^2}{C_1^2} \ln |1+C_1x| - \frac{x}{C_1} + C_2$ ; (2)  $y = 2 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)^2$ ;

(3)  $\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}x + 1$ .

10. (1)  $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \sin x + (C_4 + C_5 x) \cos x$ ;

(2)  $y = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t} + e^t(\cos t + \sin t)$ .

11. (1)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x - \sin 2x + x \sin x$ ;

(2)  $y = xe^x - e^x + \cos x + 2\sin x - 2x \cos x$ ;

(3)  $y = \begin{cases} (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a \neq 2, \\ (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^{-2x}, & a = 2. \end{cases}$

12. (1)  $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \ln x \cos(\ln x)$ ;

(2)  $y = C_1(x+1) + C_2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)\ln^3(x+1)$ , 提示: 令  $x+1 = e^t$ .

13. 可分三种情况, 其解分别为

①  $xy = C$ . ②  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$  或  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$ . ③  $x^2 + y^2 = Cx$ .

14.  $x = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1)$ .

15. 方程为  $\begin{cases} -\frac{\pi h^2}{3}dh = 0.3\sqrt{2gh}dt, & \text{时间} \approx 10(\text{s}). \\ h(0) = 10, \end{cases}$

16.  $y^{2k-1} = Cx$ .

17. 0.07%. 提示: 设在  $t$  时刻时, 二氧化碳的含量为  $x\%$ ,

则  $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{10}(x - 0.04)$ ,  $x(0) = 0.12$ .

## 第七章 一元微积分的应用

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、函数的单调增减性定理

**定理** 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  区间内可导, 如果对  $\forall x \in (a, b)$ , 都有  $f'(x) > 0$  (或  $f'(x) < 0$ ), 则函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是单调增加的 (或单调减少).

**注** 在  $(a, b)$  内有有限个数  $x$  使  $f'(x) = 0$ , 不影响单调性.

**【例 7.1】** 设在  $[0, 1]$  上  $f''(x) > 0$ , 则  $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$  或  $f(0) - f(1)$  的大小顺序是

- (A)  $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ . (B)  $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$ .  
(C)  $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ . (D)  $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$ .

【 】

**【解】** 因为  $f''(x) > 0$ , 所以在  $[0, 1]$  上,  $f'(x)$  单调递增.

又因为  $f(1) - f(0) = f'(\xi)$ ,  $(0 < \xi < 1)$ , 所以  $f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$ .

考查 (A) - (D) 后可知 (B) 入选.

**【例 7.2】** 设在  $(-\infty, +\infty)$  内  $f''(x) > 0, f(0) \leq 0$ , 则函数  $\frac{f(x)}{x}$  为

- (A) 在  $(-\infty, 0)$  内单调减少“ $\searrow$ ”, 在  $(0, +\infty)$  内单调增加“ $\nearrow$ ”.  
(B) 在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  内单调递减.  
(C) 在  $(-\infty, 0)$  内单调递增, 在  $(0, +\infty)$  内单调递减.  
(D) 在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  内单调增加“ $\nearrow$ ”.

【 】

**【解】**  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ,

令  $F(x) = xf'(x) - f(x)$ , 则  $F'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x)$ ,

因为在  $(-\infty, +\infty)$  内  $f''(x) > 0$ , 所以当  $x > 0$  时,  $F'(x) > 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $F'(x) < 0$ .

又  $F(0) = 0 \cdot f'(0) - f(0) \geq 0$ , [因为  $f(0) \leq 0$ ].

故可知在  $(-\infty, 0)$  及  $(0, +\infty)$  内均有  $F(x) > 0$ .

于是  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' > 0$ . 因此选择 (D).

**【例 7.3】** 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 在  $(0, a)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f'(x)$  单调增加, 试证:  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, a)$  内也单调增加.

**提示** 知道  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 又知  $f(a) = 0$  (或  $f(b) = 0$ ) 的命题, 通常要利用拉格朗日中值定理将  $f(x)$  写成  $f(x) = f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi)$  [或  $f(x) = f(x) - f(b) = (x - b)f'(\xi)$ ],  $\xi$  在  $x$  与  $a$  (或  $x$  与  $b$ ) 之间.

【证】因为  $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ ,  $0 < \xi < x$  (当  $x > 0$  时),

又由于  $f'(x)$  单调增加, 有  $f'(x) > f'(\xi)$  (当  $x > \xi$  时),

$$\begin{aligned}\text{所以 } \left[ \frac{f(x)}{x} \right]' &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - xf'(\xi)}{x^2} \\ &= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0 \text{ (当 } x \in (0, a) \text{ 时)},\end{aligned}$$

故  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, a)$  内单调增加.

## 二、函数的极值与最值

**定义 1** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内有定义,  $x$  为该邻域内异于  $x_0$  的任一点, 若恒有  $f(x) > f(x_0)$  (或  $f(x) < f(x_0)$ ),

则称  $f(x_0)$  为  $y = f(x)$  的极小值 (或极大值). 极大值与极小值统称为极值, 使函数取极值的点  $x_0$  称为极值点.

**定义 2** 方程  $f'(x) = 0$  的解 (或者使一阶导数  $f'(x)$  等于“0”的点), 称为函数  $f(x)$  的驻点.

**定理 1** (取极值的必要条件) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且在  $x_0$  处取极值, 则

$$f'(x_0) = 0.$$

**定理 2** (取极值的第一充分条件) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  邻域内可微, 且  $f'(x_0) = 0$  (或  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 但  $f'(x_0)$  不存在).

(1) 若当  $x$  经过  $x_0$  时,  $f'(x)$  由“+”变“-”, 则  $f(x_0)$  为极大值;

(2) 若当  $x$  经过  $x_0$  时,  $f'(x)$  由“-”变“+”, 则  $f(x_0)$  为极小值;

(3) 若当  $f'(x)$  经过  $x = x_0$  的两侧不变号, 则  $f(x_0)$  不是极值.

**定理 3** (取极值的第二充分条件) 设  $f(x)$  在点  $x_0$  处有  $f''(x_0) \neq 0$ , 且  $f'(x_0) = 0$ , 则

(1) 当  $f''(x_0) < 0$  时,  $f(x_0)$  为极大值;

(2) 当  $f''(x_0) > 0$  时,  $f(x_0)$  为极小值.

【例 7.4】已知  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$ , 则在  $x = a$  处

(A)  $f(x)$  导数存在且  $f'(a) \neq 0$ .

(B)  $f(x)$  取极大值.

(C)  $f(x)$  取极小值.

(D)  $f(x)$  导数不存在.

【 】

【解】因为没有告知  $f(x)$  可导, 所以要判别其极值只好用定义. 由  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$ , 根据

极值定理, 存在一个  $a$  的  $\sigma$  邻域, 使得  $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$ ,

于是  $f(x) < f(a)$ , 故  $f(a)$  为  $f(x)$  的极大值, 即 (B) 入选.

【例 7.5】设三次函数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$  有极值点  $x = \alpha$  和  $x = \beta$ , 若用  $a, b, c$  表示  $f(\alpha) + f(\beta)$ , 则  $f(\alpha) + f(\beta)$  为

(A)  $2(10a^3 + 3ab + c)$ .

(B)  $2(2a^3 - 3ab + c)$ .

(C)  $-2(54a^3 - 9ab + c)$ .

(D) 以上都不对.

【 】

【解】 $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$ .

因为  $x = \alpha$  和  $x = \beta$  为三次函数的极值点, 又因为它们一定是  $f(x)$  的驻点, 即  $\alpha$  和  $\beta$  是  $f'(x)$  的解, 由韦达定理知  $\alpha + \beta = -2a$ ,  $\alpha\beta = b$ .

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + \beta^3 + 3a(\alpha^2 + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) + 2c \\
 &= (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta] + 3a[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + 3b(\alpha + \beta) + 2c \\
 &= (-2a)(4a^2 - 3b) + 3a(4a^2 - 2b) + 3b(-2a) + 2c \\
 &= 2(2a^3 - 3ab + c),
 \end{aligned}$$

故可知(B)入选.

【例 7.6】设  $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$  在区间  $[-1, 2]$  上的最大值为 3, 最小值为 -29, 又知  $a > 0$ , 则

(A)  $a = 2, b = -29$ .

(B)  $a = 3, b = 2$ .

(C)  $a = 2, b = 3$ .

(D) 以上都不对.

【 】

【解】 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x - 4)$ ,

令  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$  (舍去),

$f(0) = b, f(-1) = -7a + b, f(2) = -16a + b$ ,

因为  $a > 0$ , 所以  $\max_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = f(0) = b = 3$ ,

$\min_{-1 \leq x \leq 2} f(x) = f(2) = -16a + b = -29$ ,

$\Rightarrow a = 2$ , 可知(C)入选.

【例 7.7】函数  $y = f(x)$  在点  $x = x_0$  处, 取得极大值, 则

(A)  $f'(x_0) = 0$ .

(B)  $f''(x_0) < 0$ .

(C)  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) < 0$ .

(D)  $f'(x_0) = 0$  或不存在.

【 】

【解】因为没有言明  $f(x)$  可导, 又极值也可以在导数不存在处取得, 因此(A), (B), (C) 皆不一定成立, 故(D)入选.

### 三、函数凹凸性的判别与函数的拐点

#### 1. 图形凹凸性的判别

定义 1 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 若对于  $I$  中任意两点  $x_1, x_2$ , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \left( \text{或} \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right),$$

则称  $f(x)$  在  $I$  上是凸的(或凹的).

定理 1 (凹凸性的判别定理) 若在  $I$  上  $f''(x) < 0$  (或  $f''(x) > 0$ ), 则  $f(x)$  在  $I$  上是凸的(或凹的).

#### 2. 曲线 $y = f(x)$ 的拐点求法

定义 2 函数  $y = f(x)$  的图形的凹凸分界点称为图形的拐点.

定理 2 (拐点的判别定理 1) 若在  $x_0$  处  $f''(x_0) = 0$  (或  $f''(x_0)$  不存在), 当  $x$  变动经过  $x_0$  时,  $f''(x)$  变号, 则  $(x_0, f(x_0))$  为拐点.

定理 3 (拐点的判别定理 2) 设  $f(x)$  在  $x_0$  点的某邻域内有三阶导数, 且  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ , 则  $[x_0, f(x_0)]$  为拐点.

【例 7.8】设三次曲线  $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$  在  $x = -1$  处取极大值, 点  $(0, 3)$  是拐点, 则\_\_\_\_\_.

(A)  $a = -1, b = 0, c = 3$ .

(B)  $a = 0, b = -1, c = 3$ .

(C)  $a = 3, b = -1, c = 0$ .

(D) 以上均错.

【 】



【解】 $y' = 3x^2 + 6ax + 3b, y'' = 6x + 6a$ ,

$y = y(x)$  在  $x = -1$  处取极大值, 由可微函数取极值的必要条件, 有

$$\begin{aligned} y'(-1) &= (3x^2 + 6ax + 3b) \Big|_{x=-1} \\ &= 3 - 6a + 3b = 0, \end{aligned} \quad ①$$

又由于  $(0, 3)$  为  $y = y(x)$  的拐点可知

$$y''(0) = (6x + 6a) \Big|_{x=0} = 6a = 0, \quad ②$$

$$y(0) = 3 = (x^3 + 3ax^2 + 3bx + c) \Big|_{x=0} = c, \quad ③$$

由 ①, ②, ③ 可得:  $a = 0, b = -1, c = 3$ . 可知该题选 (B).

【例 7.9】证明曲线  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  有三个拐点位于同一直线上.

【证】 $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$ ,

令  $y'' = 0$ , 得  $x_1 = 1, x_2 = -2 - \sqrt{3}, x_3 = -2 + \sqrt{3}$ , 列表见表 7-1

表 7-1

$x$	$(-\infty, -2-\sqrt{3})$	$-2-\sqrt{3}$	$(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$	$-2+\sqrt{3}$	$(-2+\sqrt{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$y''$	-		+		-		+
$y$	$\cap$	$A(-2-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4})$ 拐点	$\cup$	$B(-2+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{4})$ 拐点	$\cap$	$C(1, 1)$ 拐点	$\cup$

因为  $k_{AC} = k_{BC} = \frac{1}{4}$ , ( $k$  为直线的斜率)

所以  $A, B, C$  三点在同一直线上.

【例 7.10】函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  上称为凹的(凸的), 如果对此区间中任意两点  $x_1, x_2$  以及任意数  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , 且  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ) 有不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad [\text{或 } f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)],$$

试证: (1) 若  $a < x < b$  时,  $f''(x) > 0$ , 则函数于  $(a, b)$  内为凹的;

(2) 若  $a < x < b$  时,  $f''(x) < 0$ , 则函数于  $(a, b)$  内为凸的.

【证】设  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , 且  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ; 又  $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ ,

因为  $x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_2 + \lambda_1(x_1 - x_2)$ ,

所以  $x_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < x_2$ .

由拉格朗日中值定理可知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) = \lambda_2(x_2 - x_1)f'(\xi_1) \quad (x_1 < \xi_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \quad ④$$

$$f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(x_2 - x_1)f'(\xi_2) \quad (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_2 < x_2), \quad ⑤$$

④  $\times \lambda_1$  - ⑤  $\times \lambda_2$  得

$$(\lambda_1 + \lambda_2)f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 \lambda_2(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]$$

$$\Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

又因为  $f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = (\xi_2 - \xi_1)f''(\xi_3)$ ,  $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$  及  $f''(\xi_3) > 0$  (因为  $f''(x) > 0$ ), 所以  $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) > f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ ,

故  $f(x)$  在  $(a, b)$  内为凹的.

同理可证明, 当  $f''(x) < 0$  时,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内为凸的.

#### 四、微元法及其应用

若所求量  $M$  满足条件:

- (1) 其值与变量  $u$  和其变化区间  $[a, b]$  以及定义在该区间上的某一函数  $f(u)$  有关;
- (2) 其值在  $[a, b]$  上具有可加性, 则  $M$  的值可通过定积分的计算来完成.

在  $[a, b]$  的任一子区间  $[u, u+du]$  上建立所求量的微分  $dM$  与某一函数  $f(u)$  及自变量  $u$  的微分  $du$  之间的关系式为

$$dM = f(u)du, \quad (6)$$

其中,  $dM$  表示  $M$  的微元;  $f(u)du$  是所求量的局部表达式. 通常称这种通过微元使问题解决的方法为微元法.

**注** 前面的表达式 (6) 实际上是由  $\Delta M \approx f(u)\Delta u$  演变来的, 后者能表示成前者的条件是:

$\Delta M - dM = o(\Delta u)$ , 即  $\Delta M$  与  $dM$  之差是  $\Delta u$  的高阶无穷小, 忽视此情况, 可能造成失误.

**用微元法解题的程序:**

(1) 选择坐标系, 确定积分变量, 选积分变量的原则: 所求量  $M$  与积分变量能够建立起联系; 尽量使得在  $[a, b]$  上构造的关系式 (6) 简单, 个数少;

(2) 依据微元世界在一定条件下, 可以“去弯取直, 以不变代变”的思想获得微元关系式 (6);

(3) 写出积分式并解之.

**【例 7.11】** 证明: 由平面图形  $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$  绕  $y$  轴旋转所成的旋转体体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

其中,  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数.

**【解】** 如图 7-1 所示, 选择  $x$  为积分变量, 且  $a \leq x \leq b$ , 图中阴影部分的面积  $ds = f(x)dx$ . 它绕  $y$  轴旋转所成的形体, 是以  $f(x)$  为高, 半径为  $x$ , 壁厚为  $dx$  的圆柱筒, 其体积为  $dV = 2\pi x f(x) dx$ ,

在  $[a, b]$  上, 积分之, 得

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

**【例 7.12】** 求由曲线  $y = 4 - x^2$  及  $y = 0$  所围成的图形绕直线  $x = 3$  旋转一周所得旋转体的体积.

**【解】** 如图 7-2 所示, 选择  $y$  为积分变量, 且  $0 \leq y \leq 4$ , 图中阴影部分绕直线  $x = 3$  旋转所成图形的体积为

$$dV = [\pi PM^2 - \pi QM^2] dy,$$

注意到  $x_1 = -\sqrt{4-y}, x_2 = \sqrt{4-y}$ , 则

$$dV = \pi[(3 + \sqrt{4-y})^2 - (3 - \sqrt{4-y})^2] dy = 12\pi \sqrt{4-y} dy,$$

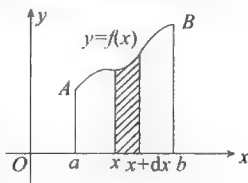


图 7-1

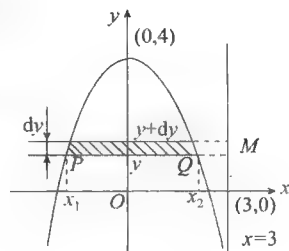


图 7-2

故

$$V = 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} dy = 64\pi.$$

【例 7.13】设半径为  $R$  的球体体密度  $\mu = r^2$ , 求球体的质量.

- (1)  $r$  是球内任一点到球心的距离;  
 (2)  $r$  是球内任一点到直径的距离;  
 (3)  $r$  是球内任一点到过球心的平面的距离.

【解】(1) 如图 7-3(a) 所示, 选极坐标系, 积分变量选择  $r$ , 以极点  $O$  为中心,  $r$  为内径, 厚度为  $dr$  的球壳体积为

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

由于  $dr$  很小, 球壳密度可看做均匀的, 为  $\mu = r^2$ , 于是其质量

$$dM = 4\pi r^2 dr \cdot r^2 = 4\pi r^4 dr,$$

故

$$M = \int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{4}{5}\pi r^5 \Big|_0^R = \frac{4}{5}\pi R^5.$$

(2) 如图 7-3(b) 所示, 设  $x$  为积分变量,  $y$  为中心轴, 以  $x$  为内径厚为  $dx$  的圆柱筒可看做图中阴影部分绕  $y$  轴旋转所得的形体, 其体积为

$$dV = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\pi x \sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

故质量为

$$dM = 4\pi x^3 \sqrt{R^2 - x^2} dx,$$

$$M = 4\pi \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2} dx \stackrel{\text{令 } x = R \sin t}{=} 4\pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t dt$$

$$= -4\pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^2 t d(\cos t) = -4\pi R^5 \left[ \frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{1}{5} \cos^5 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15} \pi R^5.$$

(3) 如图 7-3(c) 所示, 选直角坐标系, 以  $z$  为积分变量, 图中所示为所论问题在  $yOz$  平面上的投影, 球中从  $z$  到  $z+dz$  这部分球台的体积为  $dV = \pi(R^2 - z^2)dz$ , 由于  $dz$  很小, 故该部分的密度可看做均匀的, 为  $\mu = z^2$ . 于是其质量为  $dM = \pi z^2(R^2 - z^2)dz$ , 故质量

$$M = 2\pi \int_0^R z^2(R^2 - z^2) dz = 2\pi \left[ \frac{1}{3} R^2 z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right]_0^R = \frac{4}{15} \pi R^5.$$

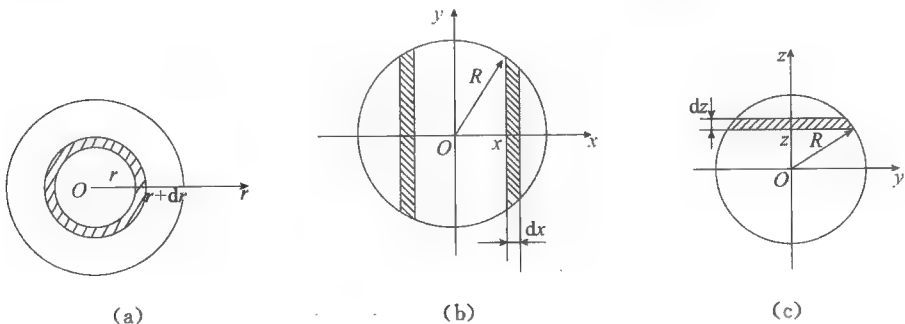


图 7-3

## 第2节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求函数的极值

**提示** 求极值的程序:

- (1) 求出  $f'(x)$ , 求出在  $(a, b)$  内使  $f'(x) = 0$  和使  $f'(x)$  不存在的点, 设为  $x_i (i = 1, 2, \dots, k)$ ;
- (2) 用定理 2 或 3 验证所求点  $x_i$  是否为极值点;
- (3) 若  $x_m$  为极值点, 则  $f(x_m)$  为极值.

**【例 7.14】** 已知  $f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内有定义, 且有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = k,$$

其中,  $n$  为正整数;  $k \neq 0$ , 讨论  $f(x)$  在  $x_0$  处是否有极值.

**【解】** 由  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = k$ , 依据极限与无穷小的关系定理有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = k + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0,$$

于是  $f(x) - f(x_0) = (k + \alpha(x))(x - x_0)^n$ .

可知当  $x$  在  $x_0$  的充分小邻域内时,  $(k + \alpha(x))$  与  $k$  同符号,

因此

① 当  $x$  在  $x_0$  的充分小邻域内时, 若  $n$  为偶数, 则  $f(x) - f(x_0)$  与  $k$  同号;

当  $k > 0$  时,  $f(x) - f(x_0) > 0$ , 可知  $f(x_0)$  为极小值;

当  $k < 0$  时,  $f(x) - f(x_0) < 0$ , 可知  $f(x_0)$  为极大值.

② 当  $x$  在  $x_0$  的充分小邻域内时, 若  $n$  为奇数, 则

$$f(x) - f(x_0) = (k + \alpha(x))(x - x_0)^n.$$

在  $x = x_0$  的两侧异号, 即不恒正(或恒负), 可知  $f(x_0)$  不是  $f(x)$  的极值.

**【例 7.15】** 设  $\varphi(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 且  $\varphi(x_0) \neq 0$ , 试研究  $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$  在  $x = x_0$  处的极值, 其中  $n$  为正整数.

**【解】** 设  $\delta$  为任意小的正数, 因  $\varphi(x)$  在  $x = x_0$  处连续, 且  $\varphi(x_0) \neq 0$ , 故  $\varphi(x_0 - \delta), \varphi(x_0 + \delta)$  与  $\varphi(x_0)$  同号.

$$f(x) - f(x_0) = \begin{cases} (-\delta)^n \varphi(x_0 - \delta), & \text{当 } x = x_0 - \delta \text{ 时} \\ (\delta)^n \varphi(x_0 + \delta), & \text{当 } x = x_0 + \delta \text{ 时} \end{cases}$$

①  $\varphi(x_0) > 0$ ,

① 当  $n$  为偶数时,  $f(x) - f(x_0) > 0$ ,  $f(x_0)$  为极小值;

② 当  $n$  为奇数时,  $f(x) - f(x_0) \begin{cases} < 0, & x = x_0 - \delta \\ > 0, & x = x_0 + \delta \end{cases}$ .

故可知  $f(x_0)$  不是极值.

②  $\varphi(x_0) < 0$ ,

① 当  $n$  为偶数时, 则  $f(x) - f(x_0) < 0$ ,  $f(x_0)$  为极大值;

⑥ 当  $n$  为奇数时,  $f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0, x = x_0 - \delta \\ < 0, x = x_0 + \delta \end{cases}$

故可知  $f(x_0)$  不是极值.

## 题型二 求函数的最值

### 提示 最大值与最小值的求法

若  $f(x)$  为定义在  $[a, b]$  上的连续函数, 则最值的求法程序为:

- (1) 求  $f'(x)$ , 求出驻点和使  $f'(x)$  不存在的点;
- (2) 计算出(1)中所得到的各点的函数值及  $f(a), f(b)$ ;
- (3) 比较以上各函数值的大小, 最大者为最大值, 最小者为最小值.

若  $y = f(x)$  为依据实际问题的大小, 最大者为最大值, 最小者为最小值.

在  $(a, b)$  内只有一个驻点, 则  $f(x_0)$  即为所求的最大(或最小)值.

**【例 7.16】** 由直线  $y = 0, x = 8$  及抛物线  $y = x^2$  围成一个曲边三角形, 在曲边  $y = x^2$  上求一点, 使曲线在该点处的切线与直线  $y = 0$  及  $x = 8$  所围成的三角形面积最大.

**【解】** 如图 7-4 所示, 设所求切点为  $P(x_0, y_0)$ , 切线  $PT$  交  $x$  轴于  $A$ , 交直线  $x = 8$  于  $B$ , 切线  $PT$  的方程为

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0),$$

又  $P$  点在  $y = x^2$  上, 因此,  $y_0 = x_0^2$ ,

令  $y = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2}x_0$ ,  $A$  点的坐标为  $A(\frac{1}{2}x_0, 0)$ ,

令  $x = 8$ , 得  $y = 16x_0 - x_0^2$ ,  $B$  点的坐标为  $B(8, 16x_0 - x_0^2)$ ,

于是  $\triangle ABC$  的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left( 8 - \frac{1}{2}x_0 \right) (16x_0 - x_0^2), 0 \leq x_0 \leq 8.$$

令  $S' = \frac{1}{4}(3x_0^2 - 64x_0 + 16 \times 16) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{16}{3}, x_0 = 16$  (舍去).

因为  $S''(\frac{16}{3}) = -8 < 0$ , 所以  $S(\frac{16}{3}) = \frac{4096}{27}$  为极大值.

故  $S(\frac{16}{3}) = \frac{4096}{27}$  为所有三角形中面积最大者.

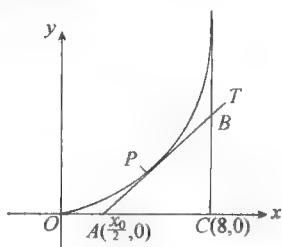


图 7-4

**【例 7.17】** 在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  内嵌入一内接矩形, 使其边平行于椭圆的轴, 且面积最大.

**【解】** 设  $x, y$  为矩形的半长, 则矩形面积为  $S = 4xy$ , 由题设可知  $(x, y)$  为椭圆上的点.

$$\text{因为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

所以  $S = 4ab \sin t \cos t = 2ab \sin 2t$ .

$$S' = 4ab \cos 2t, \text{ 令 } S' = 0, \text{ 得 } t_1 = \frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{3\pi}{4},$$

$$S'' \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -8ab \sin 2t \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -8ab < 0,$$

$$S'' \Big|_{t=\frac{3}{4}\pi} = -8ab \sin 2t \Big|_{t=\frac{3}{4}\pi} = 8ab > 0,$$

故  $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2ab$  为内接矩形的最大值, 此时矩形的边长分别为  $2x = \sqrt{2}a, 2y = \sqrt{2}b$ .

**【例 7.18】** 曲线  $y = 4 - x^2$  与  $y = 1 + 2x$  相交于  $A, B$  两点, 在抛物线上  $AB$  两点间求一点  $C$ , 使  $\triangle ABC$  的面积最大, 并求最大面积.

**【解】** 先求  $A, B$  两点的坐标.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = 1 + 2x \\ y = 4 - x^2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -5 \end{cases}.$$

所以  $A(1, 3), B(-3, -5)$ , 抛物线上  $C$  点的坐标为  $(x, 4 - x^2)$ ,

于是,  $\triangle ABC$  的面积  $S$  为

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & 4-x^2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} (12 - 8x - 4x^2) \right| = |6 - 4x - 2x^2|,$$

先求  $S_* = 6 - 4x - 2x^2$  的驻点,

$$\frac{dS_*}{dx} = -4 - 4x = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{d^2S_*}{dx^2} = -4 < 0,$$

故  $S_*$  的最大值点为  $x = -1$ , 因而也是  $S$  的最大值点,  $S(-1) = 8$ .

### 题型三 关于方程根的讨论

**提示** 1. 关于方程  $f(x) = 0$  的根[或  $f(x)$  的零点]的存在性的证明思路

(1) 只知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 而没有说明  $f(x)$  是否可导, 则一般用闭区间上连续函数的零值定理证明.

(2) 作出  $f(x)$  的一个原函数  $F(x)$ , 证明  $F(x)$  满足罗尔定理条件, 从而得出  $f(x)$  的零点的证明.

2. 方程  $f(x) = 0$  的根的个数的讨论

**解题步骤**

(1) 求出  $f(x)$  的驻点和使  $f'(x)$  不存在的点, 划分  $f(x)$  的单调增减性区间;

(2) 求出各单调区间的极值(或最值);

(3) 分析极值(或最值)与  $x$  轴的相对位置.

3. 方程  $f(x) = 0$  的根的唯一性的研究

**解题思路**

(1) 利用零值定理(或罗尔定理)证明  $f(x) = 0$  至少存在一个根;

(2) 利用函数的单调性证明  $f(x) = 0$  最多只有一个根.

**【例 7.19】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$ , 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

**【分析】** 本题仅知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 因而只能用零值定理证明.

**【证】** 由假设  $f'_+(a)$  与  $f'_-(b)$  同号, 不妨设  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0$ , 由导数定义有

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

由极限定理, 存在一个  $\delta_1 > 0$ , 当  $a < x < a + \delta_1$  时,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ , 又  $f(a) = 0$ , 必定  $f(x) > 0$ .

同理, 由  $f'_-(b) > 0, f(b) = 0$ , 存在一个  $\delta_2 > 0$ , 当  $b - \delta_2 < x < b$  时  $f(x) < 0$ .

令  $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ , 则当  $x_1 \in (a, a + \delta)$  时,  $f(x_1) > 0$ ; 当  $x_2 \in (b - \delta, b)$  时,  $f(x_2) < 0$ .

又显然  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上连续, 由零值定理, 在  $(x_1, x_2)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 从而在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

**【例 7.20】** 设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  为满足

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$$

的实数, 证明方程  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

**【分析】** 函数  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  虽然在  $[0, 1]$  上连续, 但却难以验证  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的某个子区间的端点处的函数值是否异号. 但是经分析发现  $f(x)$  的原函数

$$F(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

在  $x = 1$  处的函数值  $F(1)$  恰好满足题设已知条件,  $F(1) = 0$ , 为此该命题可利用罗尔定理来证.

**【证】** 作辅助函数

$$F(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

显然  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 又因为

$$F(0) = 0, F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

由罗尔定理, 存在一个  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ ,

即  $a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = 0$ . 命题得证.

**【例 7.21】** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可微, 证明: 在  $f(x)$  的任何两个零点之间必有  $f(x) + f'(x)$  的一个零点.

**【分析】** 设  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$  为  $f(x)$  的任意两个零点, 要证的是存在一个  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , 使得

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

因为  $f(x)$  可微, 故可用罗尔定理证明, 其辅助函数可用积分法构造.

$$f(x) + f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{f(x)} = -dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -x + \ln C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{C}{e^x} \Rightarrow f(x)e^x = C,$$

令  $F(x) = f(x)e^x$  即可.

**【证】** 作辅助函数  $F(x) = f(x)e^x$ ,

显然  $f(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 且在  $(\alpha, \beta)$  内可微, 其中  $\alpha, \beta$  为  $f(x)$  的任意两个零点, 即  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  且  $\alpha < \beta$ ,

$$F(\alpha) = f(\alpha)e^\alpha = 0 = f(\beta)e^\beta = F(\beta),$$

可知  $F(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上满足罗尔定理条件, 于是存在一个  $\xi \in (\alpha, \beta)$  使

$$F'(\xi) = 0,$$

即  $e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0$ , 亦即  $f(\xi) + f'(\xi) = 0$ . 命题得证.

**【例 7.22】** 设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 在  $(0, \pi)$  内可导, 且

$$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0,$$

证明: 存在一个  $\xi \in (0, \pi)$  使得  $f'(\xi) = 0$ .

**【证明】** 因为在  $(0, \pi)$  内  $\sin x > 0$ , 由  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$  可知  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  内不能恒为正或负,

由于  $f(x)$  的连续性可推知  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  内必有零点. 证明零点有两个以上, 可用罗尔定理命题证.

用反证法证: 若  $x_0 \in (0, \pi)$  是  $f(x)$  的唯一零点, 则当  $x \neq x_0$  时,  $\sin(x - x_0) \cdot f(x)$  就恒为正的(或负的), 于是  $\int_0^\pi \sin(x - x_0) \cdot f(x) dx \neq 0$ , 而

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(x - x_0) \cdot f(x) dx &= \int_0^\pi (\sin x \cos x_0 - \cos x \sin x_0) f(x) dx \\ &= \cos x_0 \int_0^\pi \sin x f(x) dx - \sin x_0 \int_0^\pi \cos x f(x) dx = 0, \\ &(\text{由题设条件 } \int_0^\pi \sin x f(x) dx = \int_0^\pi \cos x f(x) dx = 0) \end{aligned}$$

两者矛盾, 故  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  内至少有两个零点, 由罗尔定理命题得证.

**【例 7.23】** 证明方程  $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在  $(0, +\infty)$  内有且仅有两个不同实根.

$$\begin{aligned} \text{【证】} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^\pi |\sin x| dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi \sin x dx = \sqrt{2} (-\cos x) \Big|_0^\pi = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } F(x) = \ln x + 2\sqrt{2} - \frac{x}{e},$$

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, \text{ 令 } F'(x) = 0 \Rightarrow x = e, \text{ 列表见 7-2.}$$

表 7-2

$x$	$(0, e)$	$e$	$(e, +\infty)$
$F'(x)$	+		
$F(x)$	↗	$F(e) = 2\sqrt{2}$ 极大值	↘

由表 7-2 可知  $F(x)$  在  $(0, e)$  与  $(e, +\infty)$  分别至多有一个零点.

又因为  $x = e$  是  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上唯一的驻点,  $F(e) = 2\sqrt{2}$  是  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内的极大值, 因此它是  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内的最大值, 由于  $F(e) > 0$ , 而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln x + 2\sqrt{2} - \frac{x}{e} \right) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$  可知  $F(x)$  在  $(0, e)$  和  $(e, +\infty)$  内分别至

少有一个零点, 故  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有且仅有两个实根, 即方程  $\ln x = \frac{x}{e} -$



$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  在  $(0, +\infty)$  内有且仅有两个不同实根.

**【例 7.24】** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上可微, 对于  $[0, 1]$  上每一个  $x$ , 函数  $f(x)$  的值都在开区间  $(0, 1)$  内, 且  $f'(x) \neq 1$ , 证明: 在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

**【证】** 令  $F(x) = f(x) - x$ , 由题设可知  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 又由于  $0 < f(x) < 1$ , 所以

$$F(0) = f(0) - 0 > 0, \quad F(1) = f(1) - 1 < 0,$$

由闭区间上连续函数的零值定理可知, 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $x$ , 使  $F(x) = 0$ , 即  $f(x) = x$ . 用反证法证  $F(x)$  在  $(0, 1)$  内至多有一个零点.

若不然,  $\exists x_1, x_2 \in (0, 1), x_1 < x_2$ , 使得

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = x_2,$$

由拉格朗日中值定理, 至少存在一个  $x \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$  使得

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1,$$

与题设矛盾.

综上所述, 命题得证.

**【例 7.25】** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 当  $x > a$  时,  $f'(x) > k > 0$ , 其中  $k$  为常数, 又  $f(a) < 0$ , 证明: 方程  $f(x) = 0$  在  $(a, a + \frac{|f(a)|}{k})$  内有唯一实根.

**【证】** 由题设, 在  $(a, a + \frac{|f(a)|}{k})$  内,  $f'(x) > k > 0$  可知在该区间内  $f(x)$  “↗”, 因此  $f(x)$  在该区间内至多有一个实根.

再证  $f(x)$  在该区间内至少有一个实根.

由题设知,  $f(x)$  在  $[a, a + \frac{|f(a)|}{k}]$  上满足拉格朗日定理条件, 故至少存在一个  $\xi \in (a, a + \frac{|f(a)|}{k})$ , 使  $f(a + \frac{|f(a)|}{k}) - f(a) = \frac{|f(a)|}{k} f'(\xi)$ ,

再由题设当  $\xi > a$  时,  $f'(\xi) > k > 0$ , 于是有

$$f(a + \frac{|f(a)|}{k}) > f(a) + \frac{|f(a)|}{k} \cdot k = f(a) + |f(a)| = 0,$$

又  $f(a) < 0$ , 由零值定理,  $f(x)$  在  $(a, a + \frac{|f(a)|}{k})$  内至少有一个零点.

综上所述, 命题得证.

**【例 7.26】** 试讨论方程  $xe^{-x} = a (a > 0)$  的实根.

**【解】** 令  $F(x) = xe^{-x} - a$ , 则方程  $xe^{-x} = a$  的实根的个数相当于  $F(x)$  的零点的个数. 为此研究  $F(x)$  的单调性及极值(或最值).

令  $F'(x) = (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$ , 见表 7-3.

表 7-3

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$F'(x)$	+		-
$F(x)$	↗	$(e^{-1} - a)$ 极大值	↘

因为  $x = 1$  是  $F(x)$  唯一的驻点,  $F(1) = e^{-1} - a$  为  $(-\infty, +\infty)$  上的极大值, 因此也是最大值, 以下就  $F(1) = e^{-1} - a$  与  $x$  轴的相对位置讨论  $F(x)$  的零点.

① 若  $F(1) = e^{-1} - a < 0$ , 即  $(1, e^{-1} - a)$  位于  $x$  轴下方, 由表所示,  $F(x)$  与  $x$  轴不会有交点, 因此  $F(x)$  没有零点.

② 若  $F(1) = e^{-1} - a = 0$ , 即  $(1, e^{-1} - a)$  位于  $x$  轴上, 由表所示  $F(x)$  与  $x$  轴除  $(1, e^{-1} - a)$  点外再不会相交, 因此  $f(x)$  只有唯一的零点.

③ 若  $F(1) = e^{-1} - a > 0$ , 即  $(1, e^{-1} - a)$  位于  $x$  轴的上方, 由表可知  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  内“↗”, 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - a) = -\infty$ , 可知  $F(x)$  在  $(-\infty, 1)$  内有且仅有唯一的零点; 而  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  内“↘”, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -a < 0$ , 可知  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  内也有且仅有唯一的零点.

总之, 在这种情况下,  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有且仅有二个零点.

综上所述, 当  $e^{-1} - a < 0$ , 即  $a > e^{-1}$  时, 方程没有实根; 当  $a = e^{-1}$  时, 方程有唯一实根; 当  $a < e^{-1}$  时, 方程有两个实根.

**【例 7.27】** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty]$  中二阶可导, 并满足  $f(a) = A > 0, f'(a) < 0$ , 当  $x > a$  时,  $f''(x) < 0$ , 证明: 方程  $f(x) = 0$  在  $(a, +\infty)$  内有且仅有一个实根.

**【证】** 因为  $f''(x) < 0$ , 所以  $f'(x)$  “↘”, 因而当  $x > a$  时,  $f'(x) < f'(a) < 0$ , 故  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  内严格单调下降, 因此  $f(x) = 0$  在  $(a, +\infty)$  内至多有一个实根.

以下证明  $f(x) = 0$  在  $(a, +\infty)$  至少有一个实根.

由题设可知  $f(x)$  在  $x = a$  的右侧可展成泰勒公式:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)^2,$$

因为  $f''(x) < 0$ , 所以  $f''(\xi) < 0$ , 于是  $f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$ ,

当  $x$  充分大时, 不妨设  $x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ , 则

$$f(x_0) < f(a) + f'(a) \left[ \left( a - \frac{f(a)}{f'(a)} \right) - a \right] = 0.$$

又  $f(a) > 0$ , 由零值定理可知, 至少存在一个  $\xi \in (a, x_0)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

综上所述命题得证.

**【例 7.28】** 证明: 当  $a^2 - 3b < 0$  时, 实系数方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  只有唯一的实根.

**【证】** 令  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ,

先证  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内至少有一个零点, 将  $f(x)$  改写成

$$f(x) = x^3 \left( 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right),$$

当  $x$  充分大时, 可知  $f(x)$  的符号与  $x^3$  相同, 设  $x_0 > 0$  为足够大的  $x$  值, 于是

$$f(x_0) > 0, f(-x_0) < 0,$$

由零值定理, 至少存在一个  $\xi \in (-x_0, x_0) \subset (-\infty, +\infty)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

再证  $f(x)$  至多有一个零点.

由  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ , 可知该二次三项式的判别式为

$$B^2 - 4AC = (2a)^2 - 12b = 4(a^2 - 3b) < 0 \text{ (由题设)},$$

又  $A = 3 > 0$ , 故  $f'(x) > 0$ , 可知  $f(x)$  单调上升, 因此  $f(x)$  至多只有一个零点.

综上所述, 命题得证.

题型四 函数渐近线的求解

**提示** 1° 水平渐近线.

若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ , 或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , 则  $y = b$  称为函数  $y = f(x)$  在右侧或左侧的水平渐近线.

2° 铅直渐近线.

若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ , 或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ , 则  $x = x_0$  称为  $y = f(x)$  的铅直渐近线.

3° 斜渐近线.

若  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ , 则  $y = ax + b$  称为  $y = f(x)$  的右侧斜渐近线.

若  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ , 则  $y = ax + b$  称为  $y = f(x)$  的左侧斜渐近线.

4° 在同一侧, 水平渐近线和斜渐近线不能同时存在.

**【例 7.29】** 设曲线  $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ , 则该曲线

- (A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.  
(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平又有铅直渐近线.

**【 】**

**【解】**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$ ,  $y = 1$  为水平渐近线,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty, x = 0 \text{ 为铅直渐近线,}$$

由此可知该选(D).

**【例 7.30】** 曲线  $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$

- (A) 没有渐近线. (B) 有一条水平渐近线和一条斜渐近线.  
(C) 有一条铅直渐近线. (D) 有两条水平渐近线.

**【 】**

**【解】**  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}) = 2$ .

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以  $y = 2x - \frac{1}{2}$  为右侧斜渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + x - 1}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{1}{2}.$$

所以  $y = \frac{1}{2}$  为左侧水平渐近线, 故选择(B).

题型五 函数作图

**提示** 作图程序:

- ① 求出  $y = f(x)$  的定义域;
- ② 判别  $y = f(x)$  的奇偶性、周期性;
- ③ 求出  $y = f(x)$  与坐标轴的交点(尽量求,不强求);
- ④ 求出  $f'(x)$ , 求出驻点和使  $f'(x)$  不存在的点, 求  $f''(x) = 0$  的点及使  $f''(x)$  不存在的点;
- ⑤ 求出渐近线;
- ⑥ 将所求结果按特殊点由小到大排列, 列表;
- ⑦ 绘制曲线(在坐标系中先画出渐近线, 特殊点).

**【例 7.31】** 描绘函数  $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$  的图形.

**【解】** ① 定义域为  $x \neq 1$ , 即  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

② 与坐标轴的交点为  $(-1, 0)$ .

③  $y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$ , 令  $y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5$ , 使  $y'$  不存在的点为  $x = 1$  (因为在该

点处原来的函数没有定义, 所以也可不写出),  $y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$ , 令  $y'' = 0 \Rightarrow x = -1$ ,

使  $y''$  不存在的点为  $x = 1$ .

④ 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$ , 所以  $x = 1$  为  $y$  的铅直渐近线,

因为  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = 1$ ,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right] = 5,$$

所以  $y = x + 5$  为函数的斜渐近线.

⑤ 列表 7-4.

表 7-4

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, 5)$	$5$	$(5, +\infty)$
$y'$	+		+		-		+
$y''$	-		+		+		+
$y$	$\nearrow$	$(-1, 0)$ 拐点	$\nearrow$	$x = 1$ (铅直渐近线)	$\searrow$	$f(5) = \frac{27}{2}$ (极小值)	$\nearrow$

⑥ 作图(如图 7-5 所示).

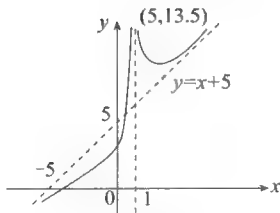


图 7-5

### 题型六 求平面图形的面积

**提示** 1. 直角坐标系中图形的面积(如图 7-6 所示)

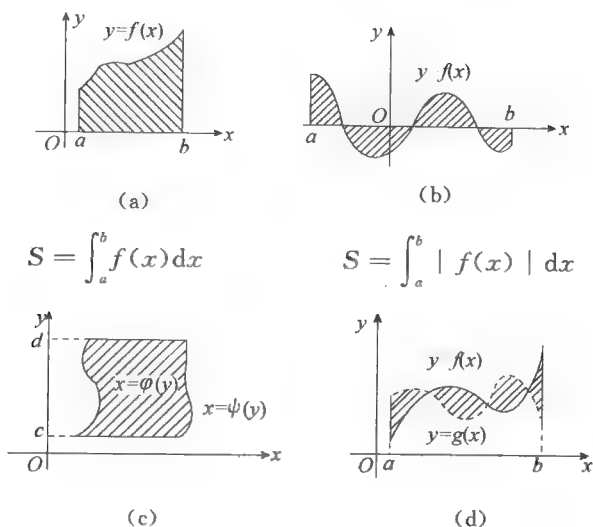


图 7-6

2. 边界直线为参数方程的图形的面积

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t_1 \leq t \leq t_2, S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

**注** 设一个上下限, 若  $\int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$  为“正”的, 则它就是图形的面积; 若为“负”的, 则只要更换一下积分上下限便得所求面积。

3. 极坐标下平面图形的面积(如图 7-7 所示)

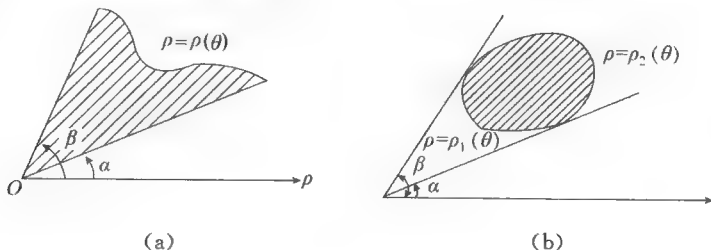


图 7-7

$$S = \frac{1}{2} \int_a^\beta \rho^2(\theta) d\theta \quad S = \frac{1}{2} \int_a^\beta [\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)] d\theta$$

**【例 7.32】** 求界于两椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 之间的图形面积。

**【解】** 由于图形的对称性, 两椭圆的交点在直线  $y = x$  和  $y = -x$  上, 因此所求面积  $S$  为在第一象限中由直线  $y = x$ ,  $x$  轴及椭圆  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  所围成图形的面积的 8 倍, 为方便起见, 将  $\frac{x^2}{b^2} +$

$\frac{y^2}{a^2} = 1$  化为极坐标方程.

将  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  代入椭圆方程  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  中, 得  $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$ .

于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(\theta) d\theta = 4a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4b^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta (1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \theta)} \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \theta} d\left(\frac{b}{a} \tan \theta\right) = 4ab \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4ab \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

**【例 7.33】** 从抛物线  $y = x^2 - 1$  上的点  $P$  引抛物线  $y = x^2$  的切线, 证明该切线与  $y = x^2$  所围成的面积与  $P$  点的位置无关.

**【证】** 如图 7-8 所示, 设  $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$  分别表示从点  $P(x_0, y_0)$  向抛物线  $y = x^2$  引出的两条切线的切点.

$K_{PQ_1} = 2x_1$ ,  $PQ_1$  的方程为  $y - y_0 = 2x_1(x - x_0)$ .

因为  $y_0 = x_0^2 - 1$ , 又  $Q_1(x_1, y_1)$  在抛物线  $y = x^2$  上, 有  $y_1 = x_1^2$ ,

所以  $x_1^2 - (x_0^2 - 1) = 2x_1(x_1 - x_0) \Rightarrow (x_1 - x_0)^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 - x_0 = \pm 1, x_1 = x_0 + 1, x_1 = x_0 - 1$ ,

于是切线  $PQ_1, PQ_2$  的方程分别为

$$y = 2(x_0 + 1)x - (x_0 + 1)^2,$$

$$y = 2(x_0 - 1)x - (x_0 - 1)^2,$$

由  $y = x^2, PQ_1$  及  $PQ_2$  所围图形面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_0}^{x_0+1} [x^2 - 2(x_0 - 1)x + (x_0 - 1)^2] dx + \int_{x_0}^{x_0+1} [x^2 - 2(x_0 + 1)x + (x_0 + 1)^2] dx \\ &= \int_{x_0-1}^{x_0} [x^2 - 2(x_0 - 1)x + (x_0 - 1)^2] dx + \int_{x_0}^{x_0+1} [x^2 - 2(x_0 + 1)x + (x_0 + 1)^2] dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

由此可见  $S$  与  $x_0$  无关, 故  $S$  与点  $P(x_0, y_0)$  的位置无关.

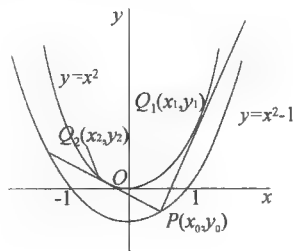


图 7-8

**【例 7.34】** 求双纽线  $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta (a > 0)$  所围图形的面积.

**【解】** 通过对方程  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$  分析可知, 其图形是关于  $x$  轴 (因为用  $-\theta$  代  $\theta$  方程不变),  $y$  轴 (用  $\pi - \theta$  代  $\theta$  方程不变) 对称, 故只需计算它在第一象限的面积, 然后乘 4 即得. 现确定第一象限中  $\theta$  的变化范围:  $\rho = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ,

$$\text{于是, } S = 4 \left( \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta \right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d(2\theta) = 2a^2 \cdot \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

**【例 7.35】** 求摆线的一拱与  $x$  轴所围图形的面积.

**【解】** 摆线的方程为  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

【例 7.36】求两曲线  $\rho = \sqrt{2} \cos \theta$  及  $\rho^2 = \sqrt{3} \sin 2\theta$  所围图形公共部分的面积(如图 7-9 所示).

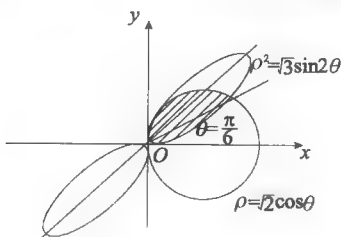


图 7-9

【解】求两曲线的交点.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \cos \theta \\ \rho^2 = \sqrt{3} \sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} \sin 2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

### 题型七 求立体的体积

【提示】(1) 已知平行截面面积的立体体积.

$$V = \int_a^b s(x) dx \text{ (如图 7-10 所示).}$$

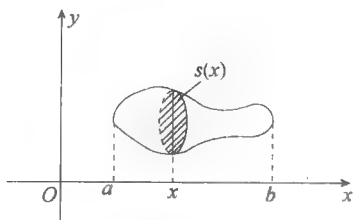
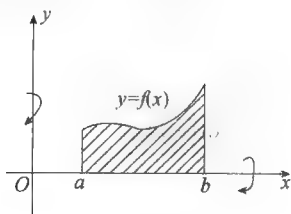
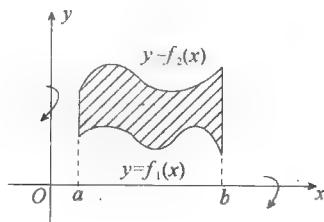


图 7-10

(2) 旋转体体积(如图 7-11 所示)



(a)



(b)

图 7-11

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

【例 7.37】一平面经过半径为  $R$  的圆柱体的底圆中心并与底面交成角  $\alpha$ , 计算圆柱体被该平面截下的那部分体积.

【解】如图 7-12 所示, 底圆方程  $x^2 + y^2 = R^2$  在  $x$  处用垂直于  $x$  轴的平面截割形体所得截面为一直角三角形  $ABC$ , 其面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} y \cdot y \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha,$$

故所求形体体积为

$$V = \int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha dx = \int_0^R (R^2 - x^2) \tan \alpha dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$

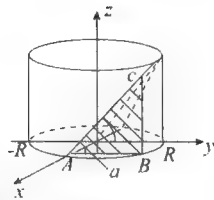


图 7-12

**【例 7.38】**过点  $P(1,0)$  作抛物线  $y = \sqrt{x-2}$  的切线,该切线与上述抛物线及  $x$  轴围成一平面图形(如图 7-13 所示),求此图形绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体体积.

**【解】**设所作切线与抛物线相切于点  $Q(x_0, y_0)$ ,

$$\text{切线 } PQ \text{ 的斜率 } k = y' \big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}} \bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}},$$

$$\text{切线 } PQ \text{ 的方程 } y - \sqrt{x_0-2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x - x_0),$$

$$\text{因为 } P \text{ 点在 } PQ \text{ 上, 所以 } -\sqrt{x_0-2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1 - x_0) \Rightarrow x_0 = 3,$$

$$\text{于是切线方程为 } y = \frac{1}{2}(x-1),$$

$$\text{故所求旋转体体积 } V = \pi \int_1^3 \frac{1}{4}(x-1)^2 dx - \pi \int_2^3 (x-2) dx = \frac{\pi}{6}.$$

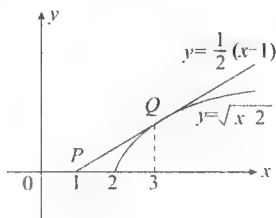


图 7-13

**【例 7.39】**求星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转所得旋转体体积.

**【解】**由于图形的对称性,只要算出第一象限部分绕  $x$  轴所得旋转体的体积,2 倍之即得所求体积.从本例看,将方程化为参数式为宜:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } V_x &= 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^6 t \cdot (-3a \cos^2 t \sin t) dt \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t) dt = \frac{32}{105} \pi a^3. \end{aligned}$$

### 题型八 求平面曲线的弧长

$$\text{【提示】} 1. L: y = f(x), a \leq x \leq b, \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

$$2. L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} a \leq t \leq \beta, \quad l = \int_a^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

$$3. L: \rho = \rho(\theta), a \leq \theta \leq \beta, \quad l = \int_a^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

**【例 7.40】**求曲线  $y = \ln(1-x^2)$  上相应于  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  的一段弧.

$$\begin{aligned} \text{【解】} l &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right] dx - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$= \ln \left. \frac{1+x}{1-x} \right|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

【例 7.41】求摆线  $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$  上相应于  $0 \leq t \leq 2\pi$  的一拱.

【解】
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8.$$

### 题型九 求旋转体的侧面积

提示 1°  $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ , 如图 7-14 所示.

$$S_{\text{侧}} = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

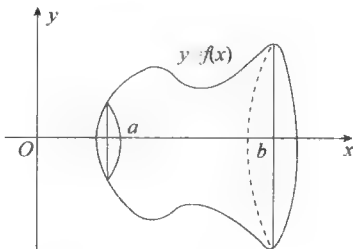


图 7-14

2°  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta,$

$$\text{则 } S_{\text{侧}} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3°  $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta,$

$$\text{则 } S_{\text{侧}} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

【例 7.42】过原点作曲线  $y = \sqrt{x-1}$  的切线, 求由此曲线、切线及  $x$  轴围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

【解】作草图如图 7-15 所示.

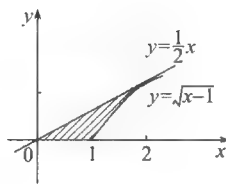


图 7-15

设切点为  $(x_0, \sqrt{x_0-1})$ , 则过原点的切线方程为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x.$$

再将点  $(x_0, \sqrt{x_0-1})$  代入上式, 解得

$$x_0 = 2, y_0 = \sqrt{x_0 - 1} = 1,$$

所以切线方程为  $y = \frac{1}{2}x$ .

由曲线  $y = \sqrt{x-1} (1 \leq x \leq 2)$  绕  $x$  轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_1 = \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

由直线段  $y = \frac{1}{2}x (0 \leq x \leq 2)$  绕  $x$  轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_2 = \int_0^2 2\pi \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx = \sqrt{5}\pi.$$

因此, 所求旋转体的表面积为  $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6} (11\sqrt{5} - 1)$ .

**【例 7.43】** 求曲线  $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$  绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转一周所得到的旋转面的面积.

**【解】**  $\begin{cases} x' = \sin t \\ y' = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi),$

设  $S_x$  与  $S_y$  分别是曲线绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转一周所得到的旋转面的面积, 则

$$S_x = 2\pi \int_0^{2\pi} y \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot 2 \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2,$$

$$S_y = 2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot 2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3}\pi.$$

### 题型十 变力做功、引力、液体的静压力

**【例 7.44】** 由抛物线  $y = x^2$  及  $y = 4x^2$  绕  $y$  轴旋转一周构成一旋转抛物面的容器(剖面如图 7-16 所示), 高为  $H$ . 现于其中盛水, 水高  $\frac{H}{2}$ , 问要将水全部抽出, 外力需做多少功?

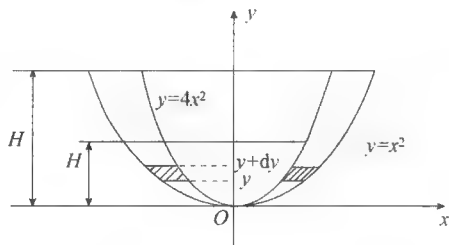


图 7-16

**【解】** 设水的比重为  $\mu$ , 图中阴影部分的水重量为

$$\pi \left( y - \frac{y}{4} \right) dy \cdot \mu = \frac{3}{4} \pi \mu y dy,$$

抽出这部分水外力需做的功为

$$dW = \frac{3}{4} \pi \mu y (H - y) dy,$$

故抽出全部水外力需做的功

$$W = \frac{3}{4}\pi\mu \int_0^H y(H-y)dy = \frac{1}{16}\pi\mu H^3.$$

**【例 7.45】** 半径为  $R$ , 比重为  $\sigma$  (大于 1) 的球沉入深为  $H$  (大于  $2R$ ) 的水池底, 现将其从水中取出, 需做多少功?

**【解】** 建立坐标系如图 7-17 所示, 将球从底捞出所需做的功分为两部分:

(1) 将球从池底提升到球面与水平面相切时所需做的功  $W_1$ ;

(2) 将球进一步提离水平面所做的功为  $W_2$ .

先求  $W_1$ , 在水中所用外力:

$$F'_{\text{外}} = \text{球重} - \text{浮力} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma - \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ 于是}$$

$$W_1 = F'_{\text{外}} \cdot (H - 2R) = \frac{4}{3}\pi R^3 (\sigma - 1)(H - 2R).$$

再求  $W_2$ , 将球从水平面提出高度为  $x$  单位时所用外力

$$F''_{\text{外}} = \text{球重} - \text{浮力} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma - \text{水下部分球缺的浮力}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma - \pi(2R - x)^2 \left[R - \frac{1}{3}(2R - x)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}[4R^3(\sigma - 1) - x^3 + 3Rx^2],$$

其中,  $h$  为球缺的高.

$$\text{故 所需做的功 } W_2 = \frac{\pi}{3} \int_0^{2R} [4R^3(\sigma - 1) - x^3 + 3Rx^2] dx$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[ 4R^3(\sigma - 1)x - \frac{x^4}{4} + Rx^3 \right]_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\sigma - 1),$$

于是将球从池底捞出的外力需做的功为

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = \frac{4}{3}\pi R^3(\sigma - 1)(H - 2R) + \frac{4}{3}\pi R^4(2\sigma - 1) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3[R + (\sigma - 1)H]. \end{aligned}$$

**【例 7.46】** 边长为  $a$  和  $b$  的矩形薄板 ( $a > b$ ), 放置于与液面成  $\alpha$  角的液体内, 长边平行于液面, 位于深  $h$  处, 设液体的比重为  $\sigma$ , 求薄板所受的压力  $P$ .

**提示** 求液体的静压力一定要用帕斯卡定律: 静压力 = 液体比重  $\times$  液体深度  $\times$  受力面积.

**【解】** 建立坐标, 如图 7-18 所示, 当  $x$  取增量  $dx$  时, 薄板对应的宽度

为  $\frac{dx}{\sin \alpha}$ , 于是图中阴影部分的面积为  $a \cdot \frac{dx}{\sin \alpha}$ , 这小条所受液体的静压力为

$$dP = \sigma \cdot x \cdot a \cdot \frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{a\sigma x}{\sin \alpha} dx,$$

整块薄板所受压力为

$$P = \int_h^{h+b\sin \alpha} \frac{a\sigma x}{\sin \alpha} dx = \frac{a\sigma}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_h^{h+b\sin \alpha} = ab\sigma \left( h + \frac{b}{2} \sin \alpha \right).$$

**【例 7.47】** 某闸门的形状与大小如图 7-19(a) 所示, 其中直线  $l$  为对称轴, 闸门的上部为矩形

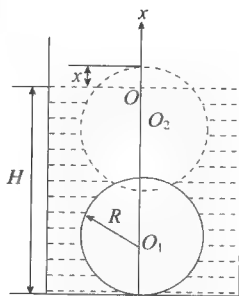


图 7-17

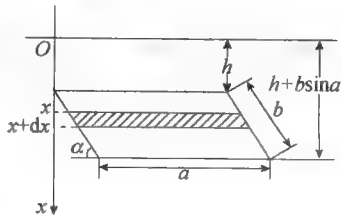


图 7-18

ABCD, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5 : 4, 闸门矩形部分的高  $h$  应为多少 m?

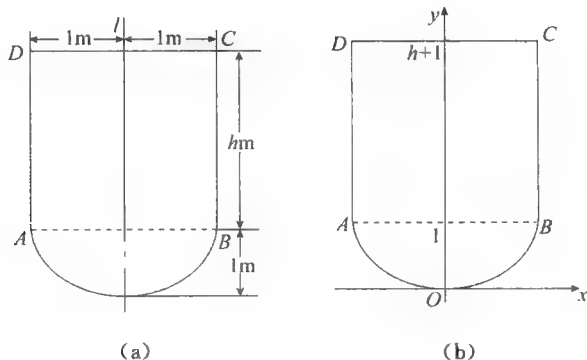


图 7-19

【解】如图 7-19(b) 所示, 建立坐标系, 则抛物线的方程为  $y = x^2$ . 闸门矩形部分承受的水压力

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \int_1^{h+1} \rho g (h+1-y) dy \\ &= 2\rho g \left[ (h+1)y - \frac{y^2}{2} \right]_1^{h+1} = \rho g h^2, \end{aligned}$$

其中,  $\rho$  为水的密度,  $g$  为重力加速度. 闸门下部承受的水压力

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_0^1 \rho g (h+1-y) \sqrt{y} dy \\ &= 4\rho g \left( \frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

由题意知,  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$ , 即  $\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}$ , 得  $h = 2, h = -\frac{1}{3}$  (舍去), 故  $h = 2$ . 即闸门矩形

部分的高应为 2m.

【例 7.48】设有一质量均匀的细直杆 AB, 其长为  $l$ , 质量为  $M$ .

- (1) 在 AB 的延长线上与端点 B 的距离  $a$  处有一质量为  $m$  的质点  $N_1$ , 试求细杆对点  $N_1$  的引力;
- (2) 在 AB 的中垂线上到杆的距离为  $a$  处有一质量为  $m$  的质点  $N_2$ , 试求细杆对点  $N_2$  的引力.

【解】(1) 建立坐标系如图 7-20(a) 所示, 积分变量为  $x$ , 积分区间为  $[0, l]$ , 细杆在  $[x, x+dx]$  这一段的质量为

$$dM = \frac{M}{l} dx,$$

该小段对位于  $N_1$  处的质点的引力为

$$dF = k \frac{\frac{M}{l} dx \cdot m}{(l+a-x)^2},$$

其中  $k$  为引力系数, 于是细杆 AB 对质点  $N_1$  的引力为

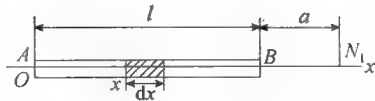


图 7-20(a)

$$F = \int_0^l k \frac{Mm}{l(l+a-x)^2} dx = \frac{kMm}{l} \int_0^l \frac{dx}{(l+a-x)^2} = \frac{kMm}{a(l+a)}.$$

(2) 建立坐标系如图 7-20(b) 所示, 积分变量为  $x$ , 变

化区间为  $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ , 细杆在  $[x, x+dx]$  这一段

的质量为  $dM = \frac{M}{l} dx$ .

由于对称性, 在  $x$  轴正方向与负方向的一小段  $dx$  对  $N_2$  的引力在  $x$  轴上的投影为 0,

则  $[x, x+dx]$  这段上的  $dx$  对  $N_2$  点在  $y$  轴的分力为

$$dF_y = k \frac{Mm dx}{(a^2 + x^2)l} \cos\theta = \frac{kMma}{l} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

令  $x = a \tan t, dx = a \sec^2 t dt$ , 则

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{kMma}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2kMma}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2kMm}{al} \int_0^{\arctan \frac{l}{2a}} \cos t dt = \frac{2kMm}{a\sqrt{4a^2 + l^2}}. \end{aligned}$$

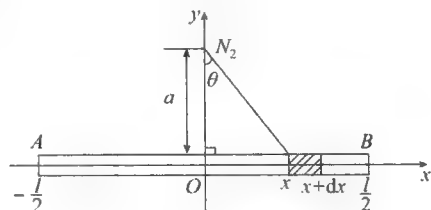


图 7-20(b)

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 已知函数的图形判断导函数的图形或已知导函数的图形判断函数的图形时, 则要想到先用列表法处理.

**【例 7.49】** 设函数  $f(x)$  在定义域内可导,  $f(x)$  的图形如图 7-21 所示.

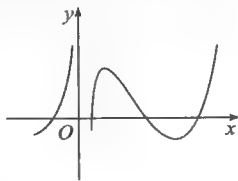


图 7-21

则其导函数的图形(如图 7-22 所示)为

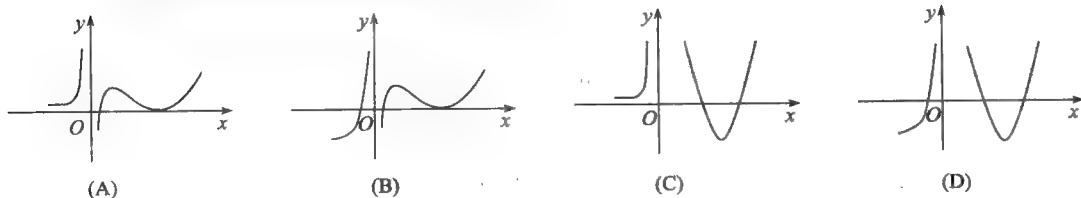


图 7-22

【分析】对于根据函数图形判断导函数图形或根据导函数图形判断函数图形的命题,一般找出特殊点(极值点,拐点,不可导点等)作为分界点,然后列表进行判断.

【解】设两个极值点分别为  $\xi_1, \xi_2$ , 则  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ , 则将点  $x = 0, x = \xi_1, x = \xi_2$  作为分界点, 列表见表 7-5.

表 7-5

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \xi_1)$	$\xi_1$	$(\xi_1, \xi_2)$	$\xi_2$	$(\xi_2, +\infty)$
$f'(x)$	+		+		-		+
$f(x)$	单增		单增		单减		单增

由表 7-5 可知, 应选(C).

【例 7.50】设函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 3]$  上的图形(如图 7-23 所示)为

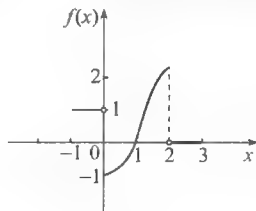


图 7-23

则  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  的图形(如图 7-24 所示)为

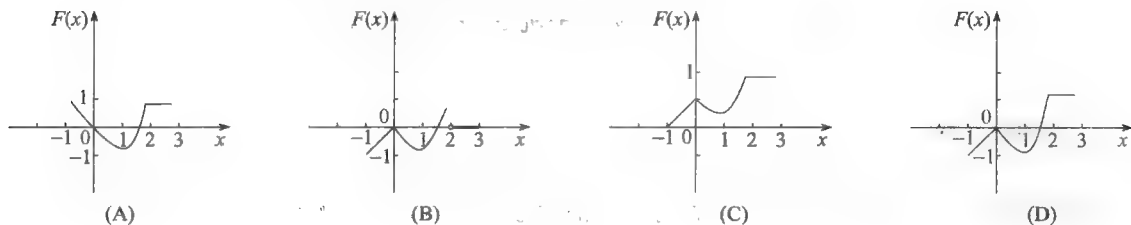


图 7-24

【解】由图可知,  $x = 0, x = 2$  为间断点,  $f(1) = 0$ , 所以以  $x = 0, 1, 2$  为分隔点列表见表 7-6.

表 7-6

$x$	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$
$f(x)$	+		-		+		0
$F(x)$	单增		单减		单增		常数

于是

(1) 在区间  $(-1, 0)$  内,  $f(x) \geq 0$ , 则  $F(x)$  在此区间单调递增, 排除(A).

(2)  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  表示  $y = f(x), x = 0, x = x$  与  $x$  轴所围曲边梯形位于  $x$  轴上方的图形面积减去位于  $x$  轴下方的图形面积所得的差值, 当  $0 < x < 1$  时, 由图可知  $F(x) = \int_0^x f(t) dt < 0$ , 排除(C).

(3) 根据原函数的连续性可知  $F(x)$  在  $x = 2$  处连续, 排除(B), 故选(D).

## 二、综合题解析

【例 7.51】函数  $f(x)$  对于一切实数  $x$  满足微分方程

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}, \dots \quad (1)$$

(1) 若  $f(x)$  在点  $x=c (c \neq 0)$  有极值, 试证它是极小值;

(2) 若  $f(x)$  在点  $x=0$  有极值, 则它是极大值还是极小值?

【解】(1) 由  $f(x)$  可导, 且它在  $x=c$  处有极值, 故  $f'(c)=0, (c \neq 0)$ , 将  $x=c$  代入 ① 式, 得

$$\Rightarrow f''(c) = \frac{1-e^{-c}}{c} > 0,$$

故  $f(c)$  为  $f(x)$  的极小值.

(2) 因为  $f(x)$  对一切实数  $x$  二阶可导, 又  $f(0)$  为极值, 所以  $f'(0)=0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-e^{-x}}{x} - 3[f'(x)]^2 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1, \end{aligned}$$

故  $f(0)$  为  $f(x)$  的极小值.

【例 7.52】设  $f(x) = -2a + \int_0^x (t^2 - a^2) dt$ , 试求

(1) 将  $f(x)$  的极大值  $M$  用  $a$  表示出来;

(2) 将(1)中的  $M$  看做  $a$  的函数, 求  $M$  为极小值时  $a$  的值.

【解】(1)  $f'(x) = x^2 - a^2, f''(x) = 2x$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x_1 = a, x_2 = -a$ , 于是

$$f''(a) = 2a, f''(-a) = -2a.$$

① 当  $a > 0$  时,  $f''(-a) = -2a < 0$ , 则

$$M = f(-a) = -2a + \int_0^{-a} (t^2 - a^2) dt = -2a + \frac{2}{3}a^3 \quad (\text{极大值}).$$

② 当  $a < 0$  时,  $f''(a) = 2a < 0$ ,

$$M = f(a) = -2a + \int_0^a (t^2 - a^2) dt = -2a - \frac{2}{3}a^3 \quad (\text{极大值}).$$

(2) 当  $a > 0$  时,

$$\frac{dM}{da} = -2 + 2a^2 = 2(a^2 - 1), \text{ 令 } \frac{dM}{da} = 0 \Rightarrow a = 1,$$

$$\left. \frac{d^2M}{da^2} \right|_{a=1} = 4a \Big|_{a=1} = 4 > 0,$$

故  $a=1$  时,  $M$  为极小值.

当  $a < 0$  时,

$$\frac{dM}{da} = -2 - 2a^2 = -2(a^2 + 1) < 0,$$

所以  $M$  “ $\searrow$ ”, 故  $M$  没有极值.

【例 7.53】对一切实数  $t$ , 函数  $f(t)$  是连续的正函数, 又  $f(-t) = f(t)$ , 函数

$$g(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt, \quad -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0),$$

(1) 证明  $g'(x)$  是单调增大的;

(2) 求出使函数  $g(x)$  取最小值的  $x$  值;

(3) 将函数  $g(x)$  的最小值作为  $a$  的函数, 它等于  $f(a) - a^2 - 1$  时, 求  $f(t)$ .

**【解】** (1)  $g(x) = \int_{-a}^x (x-t)f(t)dt + \int_x^a (t-x)f(t)dt$

$$= x \int_{-a}^x f(t)dt - \int_{-a}^x tf(t)dt + \int_x^a tf(t)dt - \int_x^a xf(t)dt,$$

$$g'(x) = \int_{-a}^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - xf(x) - \int_x^a f(t)dt + xf(x)$$

$$= \int_{-a}^x f(t)dt - \int_x^a f(t)dt,$$

$$g''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0 \text{ (因为 } f(x) > 0 \text{)},$$

故  $g'(x)$  单调递增.

(2) 令  $g'(x) = 0$ , 即  $\int_{-a}^x f(t)dt = \int_x^a f(t)dt$ .

$$\text{因为 } \int_{-a}^x f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_a^{-x} f(-u)(-du) = \int_{-x}^a f(-u)du$$

$$= \int_{-x}^a f(t)dt \text{ (因为 } f(-t) = f(t) \text{)},$$

$$\text{所以 } \int_{-x}^a f(t)dt = \int_x^a f(t)dt \xrightarrow{\text{因为 } f(t) > 0} -x = x \Rightarrow x = 0,$$

$$g(0) = 2 \int_0^a tf(t)dt, g(a) = g(-a) = 2a \int_0^a f(t)dt.$$

因为  $0 < t < a, f(t) > 0$ .

所以  $g(0) < g(a) = g(-a)$ .

所以  $x = 0$ .

(3)  $g(0) = \int_{-a}^a |t| f(t)dt = f(a) - a^2 - 1$ , 即

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^0 (-t)f(t)dt + \int_0^a tf(t)dt = f(a) - a^2 - 1 \\ & \Rightarrow -[af(-a) \cdot (-1)] + af(a) = f'(a) - 2a \\ & \Rightarrow 2af(a) = f'(a) - 2a \quad (\text{因为 } f(-a) = f(a)) \\ & \Rightarrow f'(a) = 2af(a) + 2a = 2a(f(a) + 1) \\ & \Rightarrow \frac{f'(a)}{f(a) + 1} = 2a \\ & \Rightarrow \ln[f(a) + 1] = a^2 + C, \end{aligned} \tag{2}$$

由 ② 可知, 当  $a = 0$  时,  $f(0) = 1$ , 代入上式, 得  $C = \ln 2$ ,

故

$$f(a) + 1 = e^{a^2 + \ln 2} = 2e^{a^2},$$

即

$$f(t) = 2e^{t^2} - 1.$$

**【例 7.54】** 证明: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \int_0^x (t - t^2) \sin^{2n} t dt$  ( $n$  为正整数) 的最大值不超过

$$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

**【证】**  $f'(x) = (x - x^2) \sin^{2n} x$ , 显然  $f'(x)$  与  $x - x^2 = x(1 - x)$  同号,

当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  “↗”; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  “↘”, 又  $x = 1$



时,  $\sin^{2n}x \neq 0$ , 所以  $f(1)$  是  $f(x)$  的极大值, 故也是  $x \geq 0$  时,  $f(x)$  的最大值. 又因为  $0 \leq t < 1 < \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin^{2n}t \leq t^{2n}$ .

所以

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 (t-t^2) \sin^{2n}t \, dt \leq \int_0^1 (t-t^2) t^{2n} \, dt \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}. \end{aligned}$$

故

$$\int_0^x (t-t^2) \sin^{2n}t \, dt \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

### 习 题 七

#### 1. 选择题.

(1) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且对任意  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 > x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则

A. 对任意  $x, f'(x) > 0$ .      B. 对任意  $x, f'(-x) \leq 0$ .

C. 函数  $f(-x)$  单调增加.      D. 函数  $-f(-x)$  单调增加.      【    】

(2) 设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 当  $a$  为何值时,  $F(a) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - a \cos nx]^2 dx$  取极小值

A.  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ .      B.  $\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ .

C.  $\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ .      D.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ .      【    】

(3) 函数  $y = f(x)$  具有下列特征:

$f(0) = 1; f'(0) = 0$ , 当  $x \neq 0$  时,  $f'(x) > 0; f''(x) \begin{cases} < 0, x < 0, \\ > 0, x > 0, \end{cases}$  则其图形(如图 7-25 所示)是

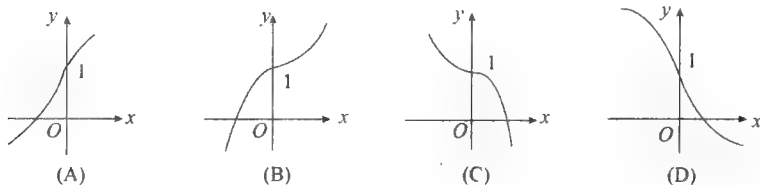


图 7-25

(4) 设三次函数  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , 若两个极值点及其对应的两个极值均为相反数, 则这个函数的图形是

A. 关于  $y$  轴对称.      B. 关于原点对称.

C. 关于直线  $y = x$  对称.      D. 以上均错.      【    】

(5) 曲线  $y = x(x-1)(2-x)$  与  $x$  轴所围图形面积可表示为

A.  $-\int_0^2 x(x-1)(2-x) \, dx$ .

B.  $\int_0^1 x(x-1)(2-x) \, dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x) \, dx$ .

C.  $-\int_0^1 x(x-1)(2-x) \, dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) \, dx$ .

D.  $\int_0^2 x(x-1)(2-x) \, dx$ .      【    】

## 2. 填空题.

- (1) 函数  $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}}) dt (x > 0)$  的单调减少区间为 \_\_\_\_\_.
- (2) 曲线  $y = x^3 - x$  与其在  $x = \frac{1}{3}$  处的切线所围成的部分被  $y$  轴分成两部分, 这两部分面积之比是 \_\_\_\_\_.
- (3) 二椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$  之间的图形的面积为 \_\_\_\_\_.
- (4)  $x^2 + y^2 = a^2$  绕  $x = -b (b > a > 0)$  旋转所成旋转体体积为 \_\_\_\_\_.
- (5) 求心脏线  $\rho = 4(1 + \cos\theta)$  和直线  $\theta = 0$  及  $\theta = \frac{\pi}{2}$  围成的图形绕极轴旋转所成旋转体体积为 \_\_\_\_\_.
- (6)  $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$  绕  $x$  轴旋转所成旋转面的面积为 \_\_\_\_\_.
- (7)  $r = a(1 + \cos\theta) (a > 0)$  绕极轴旋转所成旋转面的面积为 \_\_\_\_\_.

## 3. 证明题.

- (1) 设  $f(x)$  为连续正值函数, 证明当  $x \geq 0$  时函数  $\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$  单调增加.
- (2) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 证明:  $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  在  $(a, b)$  内单调增加.
- (3) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导且  $f'(x) \leq 0$ , 求证:  $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$  在  $(a, b)$  内  $F'(x) \leq 0$ .
- (4) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 又  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$ .  
证明: ①  $F'(x) \geq 2$ , ②  $F(x) = 0$  在  $(a, b)$  内有唯一实根.
- (5) 证明方程  $\tan x = 1 - x$  在  $(0, 1)$  内有唯一实根.
- (6) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数, 并满足  $a_1 - \frac{a_2}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = 0$ .

证明: 方程  $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ , 在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内至少有一实根.

## 4. 计算题.

- (1) 在直线  $x - y + 1 = 0$  与抛物线  $y = x^2 - 4x + 5$  的交点上引抛物线的法线, 试求由两法线及连接两交点的弦所围成的三角形的面积.
- (2) 过抛物线  $y = x^2$  上一点  $P(a, a^2)$  作切线, 问  $a$  为何值时所作切线与抛物线  $y = -x^2 + 4x - 1$  所围图形面积最小?
- (3) 求通过点  $(1, 1)$  的直线  $y = f(x)$  中, 使得  $\int_0^2 [x^2 - f(x)]^2 dx$  为最小的直线方程.
- (4) 求函数  $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$  的最大值与最小值.
- (5) 求曲线  $y = x^3 - 2x$  与  $y = x^2$  所围阴影部分面积  $S$ , 并将此面积绕  $y$  轴旋转, 求此旋转体

体积,如图 7-26 所示.

(6) 已知圆  $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ , 其中  $b > a > 0$ , 求此圆绕  $y$  轴旋转所构成的旋转体体积和表面积.

(7) 设有一薄板其边缘为一抛物线, 如图 7-27 所示, 铅直沉入水中,

① 若顶点恰好在水平面上, 试求薄板所受的静压力, 将薄板下沉多深, 压力加位?

② 若将薄板倒置使弦恰在水平面上, 水薄板所受静压力, 将薄板下沉多深时, 压力加倍?

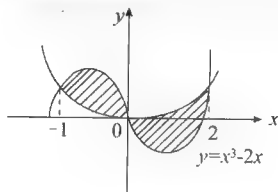


图 7-26

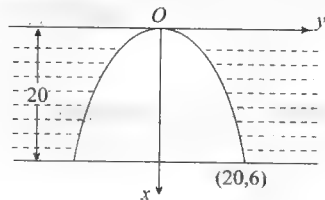


图 7-27

### 5. 作图.

(1)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ ; (2)  $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$ .

### 参 考 答 案

1. (1)D (2)B (3)B (4)B (5)C

2. (1)  $(0, \frac{1}{4})$  (2)  $8:1$  (3)  $S = 4ab \arctan(\frac{b}{a})$  (4)  $2ba^2\pi^2$  (5)  $160\pi$

(6)  $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$  (7)  $\frac{32}{5}\pi a^2$

3. 略.

4. (1)  $\frac{15}{4}$  (2)  $a = 1, S_{\min} = \frac{4}{3}$  (3)  $y = 2x - 1$ .

(4)  $f(\pm\sqrt{2}) = 1 + e^{-2}$  为最大值,  $f(0) = 0$  为最小值.

(5)  $S = \frac{37}{12}, V_y = \frac{63}{10}\pi$ .

(6)  $S = 4\pi^2 ab, V_y = 2a^2 b\pi^2$ .

(7) ①  $P = 1920, h = 12$ , ②  $P = 1280, h = 8$ .

5. 略.

## 第八章 无穷级数

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、无穷级数的基本概念和性质

定义1 数列 $\{u_n\}$ 的各项依次相加所得的表达式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数(简称级数).

定义2 令

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i,$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ (有限数),则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $s$ 为其和,即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ .

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在,则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

基本性质:

(1) 设常数 $c \neq 0$ ,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 有相同的敛散性;

(2) 设有两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ,

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ ,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$ ;

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散;

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性不确定.

(3) 添加或去掉有限项不影响一个级数的敛散性.

(4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和.

① 一个级数加括号后所得新级数发散,则原级数发散.

② 一个级数加括号后收敛,原级数敛散性不确定.

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

① 级数收敛的必要条件常被用来判别级数发散. ② 也可用它求或验证极限值为“0”的极限.

【例8.1】判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(1+n)^n}.$$

【解】(1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{8} \neq 0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(2) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} \neq 0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

【例 8.2】求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)}{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)} \quad (b > a > 0).$$

【解】(1) 先考虑  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$  的敛散性.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0, \end{aligned}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$  收敛.

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

$$(2) \text{ 考虑级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)}{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)[(n+1)a+1]}{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)[(n+1)b+1]} \cdot \\ &\quad \frac{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)}{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1} = \frac{a}{b} < 1, \end{aligned}$$

所以级数收敛.

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)}{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)} = 0 \text{ (当 } b > a > 0 \text{ 时)}.$$

## 二、数项级数判敛法

### (一) 正项级数敛散性的判敛法

#### 1. 比较判别法

$$\begin{aligned} \text{若 } 0 \leq u_n \leq v_n, \text{ 则} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}; \\ & \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}. \end{aligned}$$

比较法的极限形式:

$$\text{设 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 均为正项级数, 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A (v_n \neq 0),$$

$$(1) \text{ 若 } 0 \leq A < +\infty, \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.}$$

(2) 若  $0 < A \leq +\infty$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

**注** 由比较判别法可推出如下快速的判别法

① 若分母, 分子关于  $n$  的最高次数分别为  $p$  和  $q$ ,

当  $p - q > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$  收敛;

当  $p - q \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

② 若当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n \sim v_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  具有相同的敛散性.

例如:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{\sqrt{3n^7 + n^2 + 2}}$  收敛 (因为  $p - q = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} > 1$ );

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \tan \frac{\pi}{2^n}$  发散 (因数  $n \rightarrow \infty, 3^n \tan \frac{\pi}{2^n} \sim \pi (\frac{3}{2})^n, \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{2})^n$  发散).

常用的比较级数:

(1) 几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{发散}, & |r| \geq 1 \end{cases}$ ;

(2)  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1 \text{ 时} \\ \text{发散}, & p \leq 1 \text{ 时} \end{cases}$ ;

(3) 调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ , 发散.

## 2. 比值判别法 (适用于 $u_n$ 中含有 $n!$ 或关于 $n$ 的若干连乘积的形式)

$$\text{设 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho = \begin{cases} \rho > 1, \sum u_n \text{ 发散} \\ \rho = 1, \text{方法失效} \\ \rho < 1, \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

## 3. 根值判别法 (适用于 $u_n$ 中含有以 $n$ 为指数幂的因子)

$$\text{设 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0), \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho = \begin{cases} \rho > 1, \sum u_n \text{ 发散} \\ \rho = 1, \text{方法失效} \\ \rho < 1, \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

**注** (1) 比值与根值法条件是充分但非必要的.

$$\text{由 } \sum u_n (u_n \geq 0) \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1,$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho < 1.$$

(2) 凡涉及证明的命题一般不用比值法与极值法, 而用比较判别法, 见例 8.3 和例 8.4.

**【例 8.3】** 设  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (n = 1, 2, \cdots, a_n > 0, b_n > 0)$ , 求证:

(1) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; (2) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

【错误证明】(1) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \rho < 1$ ,

又由题设  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \rho < 1$ ,

故有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho > 1$ ,

又因为  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho > 1$ ,

故有  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

【错因分析】出错的原因是将正项级数的比值判别法当做收敛与发散的充要条件!

【正确证法】由  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , ( $a_n > 0, b_n > 0$ ), 显然有

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow a_2 \leq \frac{a_1}{b_1} b_2$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \Rightarrow a_3 \leq \frac{a_2}{b_2} b_3 \leq \frac{a_1}{b_1} b_3$$

$\vdots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{a_n}{b_n} b_{n+1} \leq \frac{a_1}{b_1} b_{n+1},$$

由正项级数的比较判别法可知:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛},$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散}.$$

【例 8.4】若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) 收敛, 则

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ 收敛},$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ 收敛}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^2+n^2} \right) \text{ 收敛}.$$

【证】(1) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) 收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,

由极限定义, 取  $\varepsilon = 1$ , 于是存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $a_n < 1$ ,

因此  $a_n^2 = a_n \cdot a_n < 1 \cdot a_n$ ,

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 由正项级数的比较判别法, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛.

$$(2) \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sqrt{\frac{a_n}{n^2}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + a_n \right),$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2} + a_n \right)$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  收敛.

(3) 因为  $a_n \geq 0$ ,  $\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  收敛.

(4) 令  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^2+n^2} = u_n$ ,

因为  $\frac{u_n}{a_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+n^2} = \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2n}$ ,

所以  $u_n < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_n}{n} < \frac{\pi}{2} a_n$ , 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^2+n^2} \right)$  收敛.

## (二) 交错级数的判别法

### 莱布尼茨判别准则

若交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$  满足如下条件:

$$(1) u_n \geq u_{n+1}, (n=1, 2, \dots), \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则交错级数收敛, 且其和  $S \leq u_1$ , 其  $n$  项余和的绝对值  $|R_n| \leq u_{n+1}$ .

用莱布尼茨准则判别交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$  是否收敛时, 要考查  $u_n$  与  $u_{n+1}$  的大小, 比较  $u_n$  与  $u_{n+1}$  的大小的方法有三种:

(1) 比值法, 即考查  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  是否小于 1;

(2) 差值法, 即考查  $u_n - u_{n+1}$  是否大于 0;

(3) 由  $u_n$  找出一个连续可导函数  $f(x)$ , 使  $u_n = f(n) (n=1, 2, \dots)$ , 考查  $f'(x)$  是否小于 0.

**【例 8.5】** 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}).$$

**【解】** (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} = 0$ , 可知莱布尼茨判别的条件(2) 满足, 但条件(1) 不满足,

故用莱氏判别法是无法判别的, 但是因为

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [\sqrt{n} - (-1)^n]}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} \text{ 收敛, } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \text{ 发散,}$$

故级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  发散.

(2) 由  $u_n = \frac{\ln(1+n)}{1+n}$  想到函数  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ,

因为  $f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} < 0$  (当  $x$  取足够大的正数),

所以  $f(x)$  “ $\searrow$ ”, 于是



$$\textcircled{1} u_n \geq u_{n+1} (n = 1, 2, \dots), \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} = 0,$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$  收敛.

$$(3) \text{ 因为 } \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sin[n\pi + (\sqrt{n^2 + a^2} - n)\pi] = (-1)^n \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}.$$

因为当  $n$  充分大时,  $0 < \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} < \frac{\pi}{2}$ , 而正弦函数  $\sin x$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  是单调增大的.

$$\text{所以 } \textcircled{1} u_n = \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} > u_{n+1} = \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{(n+1)^2 + a^2} + (n+1)},$$

$$\text{又 } \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} = 0,$$

故由莱氏准则可知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$  收敛.

### (三) 任意项级数的判别法

**定义** 设有一任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (即  $u_n$  可正, 可负, 可 0), 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为绝对收敛级数.

若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为条件收敛级数.

**定理 1** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必收敛.

**定理 2** 条件收敛级数的所有正项 (或负项) 所构成的级数一定发散.

**【例 8.6】** 设常数  $k > 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散.

(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.

(D) 收敛或发散与  $k$  的取值有关.

【 】

**【解】** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ , 前一级数绝对收敛, 后一级数条件收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$  条件收敛, 故 (C) 入选.

**【例 8.7】** 设  $\alpha$  为常数且  $\alpha > 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$

(A) 发散.

(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.

(D) 收敛性与  $\alpha$  有关.

【 】

**【解】** 因为  $\left| (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right) \right| = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^2}{2n^2}$  绝对收敛,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$  绝对收敛. 故选 (C).

【例 8.8】已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  等于

- (A) 3. (B) 7.  
(C) 8. (D) 9.

【 】

【解】因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots,$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2 \times 5 - 2 = 8$ . 故选 (C).

### 三、函数项级数的概念

定义 1 设  $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$  为定义在  $(a, b)$  内的函数序列, 则式子

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为定义在  $(a, b)$  内的函数项级数.

定义 2 设  $x_0 \in (a, b)$ , 若数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  收敛(或发散), 则称  $x_0$  为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛点(或发散点). 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的所有收敛点(或发散点)称为其收敛域(或发散域).

定义 3 设  $\{s_n(x)\}$  为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的前  $n$  项和序列, 若极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x), x \in (a, b)$  存在, 则  $s(x)$  称为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的和函数.

### 四、幂级数的概念和性质

#### 1. 幂级数的概念

定义 1 如下形式的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

称为  $(x - x_0)$  的幂级数, 其中  $a_n$  为常数.

当  $x_0 = 0$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 称为  $x$  的幂级数.

定义 2 设任一幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  在  $(a, b)$  内收敛, 在  $(a, b)$  外发散 ( $x = a, x = b$  发散与否不考虑), 则称

$$R = \frac{b-a}{2}$$

为幂级数的收敛半径.

收敛半径的类型:

- (1)  $R = 0$ , 此时收敛域仅为一点;  
(2)  $R = +\infty$ , 此时收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ ;

(3)  $R =$  某定常数, 此时收敛域为一个有限区间.

## 2. 幂级数的四则运算性质

设有两个幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$  及  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)$ , 其收敛半径分别为  $R_1, R_2, R = \min(R_1, R_2)$ , 则对于任意  $x \in (-R, R)$  有

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x), \text{ 且在 } (-R, R) \text{ 内绝对收敛};$$

$$(2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n = f(x) g(x);$$

(3) 设  $b_0 \neq 0$ , 则在  $x = 0$  的足够小的邻域内

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots.$$

利用多项式的长除法可得:  $C_0 = \frac{a_0}{b_0}, C_1 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}, \dots$

## 3. 幂级数的分析性质

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R$ , 则在  $(-R, R)$  内有

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $f(x)$  是连续的;

(2)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  可逐项微分, 且

$$f'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, x \in (-R, R);$$

(3)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  可逐项积分, 且

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x a_n x^n dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R). \end{aligned}$$

## 4. 函数的幂级数展开

**泰勒级数:** 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  的某一邻域内具有任意阶导数, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \cdots$$

称为  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的泰勒级数.

当  $x_0 = 0$  时, 级数变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \cdots,$$

称此级数为麦克劳林级数.

**定理** 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  某一邻域内具有任意阶导数, 则泰勒级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

收敛于  $f(x)$  的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , 其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)](x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

常用函数的展开式:

$$(1) \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, u \in (-1, 1)$$

$$(2) \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, u \in (-1, 1)$$

$$(3) e^u = 1 + u + \frac{1}{2!} u^2 + \cdots + \frac{1}{n!} u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, u \in (-\infty, +\infty)$$

$$(4) \sin u = u - \frac{1}{3!} u^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} u^{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, u \in (-\infty, +\infty)$$

$$(5) \cos u = 1 - \frac{1}{2!} u^2 + \frac{1}{4!} u^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} u^{2n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}, u \in (-\infty, +\infty)$$

$$(6) \ln(1+u) = u - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}, u \in (-1, 1]$$

$$(7) (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} u^n + \cdots, u \in (-1, 1), \text{端点 } u=-1, u=1 \text{ 处}$$

是否收敛随  $\alpha$  而定, 但(7) 式在  $(-1, 1)$  内总有意义.

## 五、傅里叶级数的概念及定理

### 1. 概念

三角函数族的正交性:

$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$  之中任两个不同函数的乘积在  $[-\pi, \pi]$  或  $[0, 2\pi]$  上积分为零, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi. \end{array} \right.$$

**定义 1** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 且在  $[-\pi, \pi]$  或  $[0, 2\pi]$  上可积, 则

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ \quad = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ \quad = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, (n = 1, 2, \cdots) \end{array} \right\} \text{称为函数 } f(x) \text{ 的傅里叶系数.}$$

**定义 2** 以  $f(x)$  的傅里叶系数为系数的三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

称为函数  $f(x)$  的傅里叶级数, 表示为

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

**定义 3** 设  $f(x)$  是以  $2l$  为周期的函数, 且在  $[-l, l]$  上可积, 则以

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, (n = 1, 2, \dots),$$

为系数的三角级数  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$

称为  $f(x)$  的傅里叶级, 表示为  $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$ .

## 2. 收敛定理(狄里赫莱的充分条件)

设函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上满足条件:

1° 除有限个第一类间断点外都是连续的.

2° 只有有限个极值点.

则  $f(x)$  的傅里叶级数在  $[-\pi, \pi]$  上收敛, 且有

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \begin{cases} f(x), & x \text{ 是 } f(x) \text{ 的连续点;} \\ \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)], & x_0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的第一类间断点;} \\ \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)], & x = \pm \pi, \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

**【例 8.9】** 填空题.

(1) 设函数  $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$  的傅里叶级数为  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 则系数  $b_3$  的值为 \_\_\_\_\_.

(2) 设  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ , 则以  $2\pi$  为周期的傅里叶级数在  $x = \pi$  处收敛于 \_\_\_\_\_.

(3) 设  $f(x)$  是以 2 为周期的函数, 其表达式为  $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的傅里叶级数在  $x = 1$  处收敛于 \_\_\_\_\_.

**【解】** (1) 傅里叶系数公式

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 3x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x + x^2) \sin 3x dx \\ &\stackrel{\text{由奇偶积分性质}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi x \sin 3x dx = 2 \left[ -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

(2) 由狄里赫莱收敛定理, 可知傅里叶级数在  $x = \pi$  处收敛于

$$\frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pi^-} (1 + x^2) + \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (-1)}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(3) 由狄里赫莱收敛定理, 可知傅里叶级数在  $x = 1$  处收敛于

$$\frac{f(1-0) + f(-1+0)}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}.$$

周期与非周期函数傅里叶级数一览表见表 8-1

表 8-1

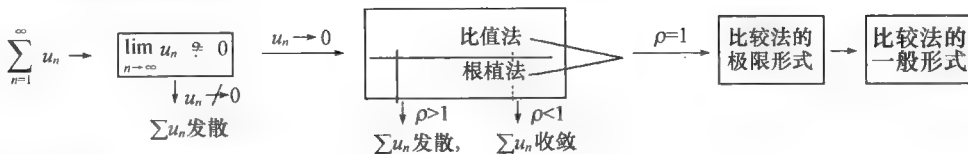
周期函数的傅里叶级数	一般函数	<p>以 <math>2\pi</math> 为周期的函数 <math>f(x)</math></p> $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, \dots)$	<p>以 <math>2l</math> 为周期的函数 <math>f(x)</math></p> $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x)$ $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx (n = 1, 2, \dots)$
	偶函数	<p>以 <math>2\pi</math> 为周期, 且 <math>f(x) = f(-x)</math></p> $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx (\text{余弦级数})$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$	<p>以 <math>2l</math> 为周期, 且 <math>f(x) = f(-x)</math></p> $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x (\text{余弦级数})$ $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$
	奇函数	<p>以 <math>2\pi</math> 为周期, 且 <math>f(x) = -f(-x)</math></p> $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx (\text{正弦级数})$ $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, \dots)$	<p>以 <math>2l</math> 为周期, 且 <math>f(x) = -f(-x)</math></p> $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x (\text{正弦级数})$ $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$ $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx (n = 1, 2, \dots)$
非周期函数的傅里叶级数	偶开拓	<p><math>f(x)</math> 为 <math>[0, \pi]</math> 上的非周期函数</p> <p>令 <math>F(x) = \begin{cases} f(x), &amp; 0 \leq x \leq \pi, \\ f(-x), &amp; -\pi \leq x &lt; 0, \end{cases}</math></p> <p>则 <math>F(x)</math> 除 <math>x = 0</math> 外在 <math>[-\pi, \pi]</math> 上为偶函数</p> $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx (\text{余弦级数})$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx (n = 0, 1, 2, \dots)$	<p><math>f(x)</math> 为 <math>[0, l]</math> 上的非周期函数</p> <p>令 <math>F(x) = \begin{cases} f(x), &amp; 0 \leq x \leq l, \\ f(-x), &amp; -l \leq x &lt; 0, \end{cases}</math></p> <p>则 <math>f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x (\text{余弦级数})</math></p> $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$
	奇开拓	<p><math>f(x)</math> 为 <math>[0, \pi]</math> 上的非周期函数</p> <p>令 <math>F(x) = \begin{cases} f(x), &amp; 0 \leq x \leq \pi, \\ -f(-x), &amp; -\pi \leq x &lt; 0, \end{cases}</math></p> <p>则 <math>F(x)</math> 除 <math>x = 0</math> 外在 <math>[-\pi, \pi]</math> 上为奇函数</p> $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx (\text{正弦级数})$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx (n = 1, 2, \dots)$	<p><math>f(x)</math> 为 <math>[0, l]</math> 上的非周期函数</p> <p>则令</p> <p><math>F(x) = \begin{cases} f(x), &amp; 0 \leq x \leq l, \\ -f(-x), &amp; -l \leq x &lt; 0, \end{cases}</math></p> <p>则 <math>F(x)</math> 除 <math>x = 0</math> 外在 <math>[-\pi, \pi]</math> 上为奇函数</p> $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x (\text{正弦级数})$ $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx (n = 1, 2, \dots)$

注  $\cos n\pi = (-1)^n, \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

## 题型一 正项级数的判敛

提示 正项级数的判敛程序:



【例 8.10】判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} (x > 0);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n});$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+p^n} (p > 0);$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}(3n-1)};$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}};$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + bn + c)^a} (a > 0, b > 0).$$

【解】(1) 因为  $u_n$  中含有  $n!$ , 所以用比值法.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(2) 用比值法, 根植法  $\rho = 1$ , 改用比较法的极限形式判别,

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(3) 因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $2^n \sin \frac{x}{3^n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n x$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  收敛,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} (x > 0)$  收敛.

(4) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(5) 因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2\sin^2 \frac{\pi}{2n} \sim 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n^2}$  收敛,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(6) 当  $0 < p < 1$  时,  $u_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ ; 当  $p = 1$  时,  $u_n = \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty)$ ;

当  $p > 1$  时,  $\frac{1}{1+p^n} \sim \frac{1}{p^n} = \left(\frac{1}{p}\right)^n$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n$  收敛 (为  $\frac{1}{p} < 1$  的等比级数).

故 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+p^n} = \begin{cases} \text{发散,} & p \leq 1 \\ \text{收敛,} & p > 1 \end{cases}$$

(7) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(8) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{2n-1}(3n-1)}} = \frac{1}{4} < 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(9) 取  $v_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$  因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$  收敛,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}$  收敛.

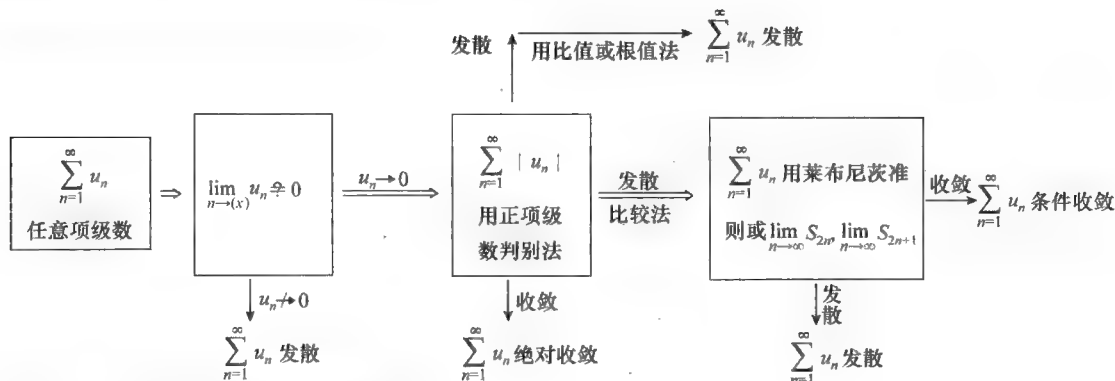
(10) 因为  $u_n = \frac{1}{(an^2 + bn + c)^a} \sim \frac{1}{a^a n^{2a}}$ ,

而 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^a n^{2a}} = \frac{1}{a^a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a}} \begin{cases} \text{收敛, 当 } \alpha > \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \text{发散, 当 } \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

故 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + bn + c)^a} \begin{cases} \text{收敛, 当 } \alpha > \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \text{发散, 当 } \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

## 题型二 任意项级数的判敛

**提示** 任意项级数的判敛程序:



**【例 8.11】** 判别下列级数的敛散性:



$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}.$$

【解】(1) 因为  $0 < u_n = \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx < \int_n^{n+1} e^{-x} dx = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{1}{e^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  收敛,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx$  绝对收敛.

(2)  $u_n = \frac{1}{n^p}$ , 当  $p \leq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ , 于是  $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \nrightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故级数发散; 当  $p > 1$

时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$  绝对收敛. 当  $0 < p \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散, 但由于该级数为交错级数且满足:

$$1^\circ \quad u_n = \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p} = u_{n+1};$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

由莱布尼茨准则, 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \text{ 条件收敛.}$$

【例 8.12】讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2 + n\alpha + \beta}{n} \pi$  的敛散性. 其中,  $\alpha, \beta$  为常数.

【解】 $u_n = \sin \frac{n^2 + n\alpha + \beta}{n} \pi = \sin[n\pi + \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)\pi] = (-1)^n \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)\pi$ ,

1° 当  $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

2° 当  $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时,  $u_n = (-1)^{n+\alpha} \sin \frac{\beta}{n} \pi$ .

当  $\beta = 0$  时,  $u_n = 0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛;

当  $\beta \neq 0$  时, 不妨设  $\beta > 0$  (当  $\beta < 0$  时,  $u_n = (-1)^{n+\alpha+1} \sin \frac{|\beta|}{n} \pi$ ),

由莱布尼茨准则可知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+\alpha} \sin \frac{\beta}{n} \pi$  条件收敛.

同理可证, 当  $\beta < 0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛.

【例 8.13】试讨论下列级数的敛散性:

$$(1) 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^x} + \dots;$$

$$(2) \text{ 设 } a > 0, b > 0, a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \dots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \dots.$$

【解】(1) (i) 当  $x = 1$  时, 级数为  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$ ,

属于莱布尼茨型交错级数, 级数收敛.

(ii) 当  $x > 1$  时,  $S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2^x} \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x}\right)$ ,

当  $n \rightarrow \infty$  时,前一括号  $\rightarrow +\infty$ ,后一括号  $\rightarrow$  定值(因为  $x > 1$ ),于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = +\infty$ ,故级数发散.

(iii) 当  $x < 1$  时,  $S_{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4^x} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left[\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{2n+1}\right]$ ,

由于  $x < 1$ ,所以 1 以后各项均为负的.

考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{2n+1}\right]$ ,

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{2n+1}\right] / \frac{1}{n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) - (2n)^x}{(2n+1)2^x} = \frac{1}{2^x}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} (x < 1)$  发散,

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \infty$ ,故级数发散.

综上所述,当  $x = 1$  时级数收敛, $x \neq 1$  时,级数发散.

(2) 取级数的前  $2n$  项与前  $(2n+1)$  项的和

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} \\ &= a \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= a \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + (a-b) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= a \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} (a-b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = a\tau_{2n} + \frac{1}{2} (a-b)\sigma_n, \end{aligned} \quad ①$$

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \frac{a}{2n+1} \\ &= a \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) + (a-b) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= a \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} (a-b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= a\tau_{2n+1} + \frac{1}{2} (a-b)\sigma_n, \end{aligned} \quad ②$$

由 ①, ② 可知,当  $a = b$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = a\tau$  ( $\tau$  为  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$  的和),所以级数收敛,当  $a \neq b$  时,级数发散.

### 题型三 级数的证明或判敛

**提示** (1) 正项级数证明的思路:

- 1° 已知某级数收敛,欲证另一级数收敛,通常用比较判别法,已知收敛的某级数被用作比较级数;
- 2° 已知某数列有某种性质(有极限、有界性、单调性),欲证一级数收敛,通常是利用极限、有界性、单调性对数列的通项作某种估值,再用比较判别法;
- 3° 若欲证级数的通项与已知敛散性级数的通项有某种四则运算关系,通常用级数敛散性定义(即考查欲证级数前  $n$  项和的极限)进行分析.

(2) 交错级数的判敛可验证莱布尼茨准则的条件,或是验证  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$ .

【例 8.14】证明如下命题成立:

(1) 设  $a_n > 0$ , 且  $\{na_n\}$  有界, 试证:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛;

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = c (c > 0)$ , 试证:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

【证】(1) 因为  $a_n > 0$ ,  $\{na_n\}$  有界, 所以  $\exists M > 0$ , 使  $0 \leq na_n \leq M$ , 即  $0 \leq a_n \leq \frac{M}{n}$ , 于是

$$0 \leq a_n^2 \leq M^2 \cdot \frac{1}{n^2},$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} M^2 \cdot \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛.

(2) 由题设可知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数,

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = c (c > 0)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 由正项级数比较法的极限形式可知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛.

【例 8.15】设  $f_0(x)$  在区间  $[0, a] (a > 0)$  上连续, 而且  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x) dx, x \in [0, a] (n = 1,$

$2, \dots)$ , 试证: 无穷级数  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  在  $[0, a]$  上是绝对收敛的.

【证】因为  $f_0(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 所以  $|f_0(x)|$  在  $[0, a]$  上连续, 因此  $|f_0(x)|$  在  $[0, a]$  上有最大值, 设为  $M$ , 即  $M = \max_{0 \leq x \leq a} \{|f_0(x)|\}$ .

因为  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x) dx = \int_0^x [\int_0^x f_{n-2}(x) dx] dx = \dots = \underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n \uparrow} f_0(x) dx \cdot \dots \cdot dx$ ,

所以  $|f_n(x)| \leq \underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n \uparrow} |f_0(x)| dx \cdot \dots \cdot dx \leq \underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n \uparrow} M dx \cdot \dots \cdot dx = \frac{M}{n!} x^n$ ,

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} x^n, x \in [0, a]$  收敛, 故  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$  收敛, 即  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  绝对收敛.

【例 8.16】设  $f(x)$  在点  $x = 0$  的某一邻域内具有连续的二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

【证】由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 又  $f(x)$  在  $x = 0$  的邻域内具有连续的二阶导数, 可推出

$$f(0) = 0, f'(0) = 0.$$

将  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

又由题设  $f''(x)$  在属于邻域内包含原点的一个小闭区间内连续, 因此  $\exists M > 0$ , 使

$$|f''(x)| \leq M, \text{ 于是 } |f(x)| = \frac{1}{2} |f''(\xi)x^2| \leq \frac{M}{2} x^2,$$

令  $x = \frac{1}{n}$ , 则  $|f(\frac{1}{n})| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ , 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$  绝对收敛.

【例 8.17】设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足  $a \leq f(x) \leq b$ ,  $|f'(x)| \leq q < 1$ , 令  $u_n = f(u_{n-1})$ ,

$n = 1, 2, 3, \dots, u_0 \in [a, b]$ , 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$  绝对收敛.

【证】因为

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= |f(u_n) - f(u_{n-1})| = |f'(\xi_1)| |u_n - u_{n-1}| \\ &\leq q |u_n - u_{n-1}| = q |f(u_{n-1}) - f(u_{n-2})| \\ &= q |f'(\xi_2)| |u_{n-1} - u_{n-2}| \\ &\leq q^2 |u_{n-1} - u_{n-2}| \leq \dots \leq q^n |u_1 - u_0|, \end{aligned}$$

又级数  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  收敛, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$  绝对收敛.

【例 8.18】设  $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ ,  $\{a_n\}$  单调减,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{1+a_n})^n$  的敛散性.

【解】由题设有  $a_n > a_{n+1}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则由莱布尼茨判别准则, 交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛, 与假设矛盾, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l (l > 0)$ .

由根值判别法, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\frac{1}{1+a_n})^n} = \frac{1}{1+l} < 1$ , 故级数收敛.

【例 8.19】设  $u_1 = 1, u_2 = 2$ , 当  $n \geq 3$  时,  $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ , 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  的敛散性.

【解】显然  $u_n$  递增, 即  $u_{n-2} < u_{n-1}$ , 于是

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} < 2u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} > \frac{1}{2}u_n, \text{ 亦有 } u_{n-2} > \frac{1}{2}u_{n-1},$$

$$u_n > \frac{1}{2}u_{n-1} + u_{n-1} = \frac{3}{2}u_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2} > \dots > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

因此  $\frac{1}{u_n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$  收敛.

#### 题型四 计算函数项级数收敛域

##### 提示 解题程序

(1) 用比值法(或根值法)求  $\rho(x)$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \rho(x) \text{ (或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x);$$

(2) 解不等式方程  $\rho(x) < 1$ , 求出  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛区间  $(a, b)$ ;

(3) 考查  $x = a$  (或  $x = b$ ) 时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  (或  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  的敛散性);

(4) 写出  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域.

【例 8.20】求下列函数项级数的收敛域:

$$\begin{aligned}
 (1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}; & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(x^2+x+1)^n; \\
 (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n; & (4) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}.
 \end{aligned}$$

【解】(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+x^n|}{|1+x^{n+1}|}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|x|} < 1, & |x| > 1, & \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 收敛}, \\ 1, & -1 < x \leq 1, & \text{方法失效}, \\ \text{不存在}, & x = -1, & \text{方法失效}. \end{cases}$$

当  $|x| < 1$  时,  $u_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  发散.

当  $x = 1$  时,  $u_n(x) = \frac{1}{2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  发散.

当  $x = -1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$  不存在, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  发散.

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$  的收敛域为  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}(x^2+x+1)^n} = x^2+x+1,$$

当  $x^2+x+1 < 1$  时,  $(x+1)x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛,

令  $x = 0$ , 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  收敛,

令  $x = -1$ , 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  收敛,

故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域为  $[-1, 0]$ .

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|,$$

当  $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ , 即  $|1-x| < |1+x|$ , 亦即  $x > 0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛.

当  $x = 0$  时, 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}$  收敛,

故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域为  $[0, +\infty)$ .

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

当  $x > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  收敛, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$  收敛;

当  $x \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  发散, 只要  $x \neq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$  发散;

当  $x = 0$  时, 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 0$  收敛.

故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域为  $x = 0$  及  $(1, +\infty)$ .

### 题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径

**提示** 1° 同函数项级数, 若收敛区间为  $(a, b)$ , 则收敛半径  $R = \frac{b-a}{2}$ .

2° 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  中至多只有有限个  $a_n = 0$ , 则收敛半径为  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  或  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ .

3° 代入  $x = \pm R$ , 考查  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$  的收敛性.

**【例 8.21】** 求下列幂级数的收敛域和收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n-3^{2n}}; (2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n} x^{2n-3}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n, (a > 0, b > 0).$$

**【解】** (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-1|^{2n}}{|n-3^{2n}|}} = \frac{|x-1|^2}{3^2}.$

当  $\frac{|x-1|^2}{3^2} < 1$ , 即  $|x-1| < 3$ , 亦即,  $-2 < x < 4$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛;

当  $x = -2$  时, 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2n}}{n-3^{2n}}$  发散 (因为  $u_n \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ );

当  $x = 4$  时, 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}$  发散 (因为  $u_n \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ).

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域为  $(-2, 4)$ , 收敛半径  $R = \frac{4 - (-2)}{2} = 3$ .

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{2n-3}}{2^n n}} = \frac{|x|^2}{2}.$$

当  $\frac{|x|^2}{2} < 1$ , 即  $|x| < \sqrt{2}$ , 亦即  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛;

当  $x = \sqrt{2}$  时, 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{2}n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  收敛;

当  $x = -\sqrt{2}$  时, 原级数  $\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  收敛.

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域为  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , 收敛半径  $R = \frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}$ .

$$(3) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}}} = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a \geq b \\ \frac{1}{b}, & a < b \end{cases}.$$

① 当  $a \geq b$  时, 收敛半径为  $R = \frac{1}{a}$ .

当  $x = \frac{1}{a}$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散;

当  $x = -\frac{1}{a}$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n}$  为交错级数,

由莱布尼茨判别法知收敛, 收敛区域为  $\left[ -\frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right)$ .

② 当  $a < b$  时, 收敛半径  $R = \frac{1}{b}$ ,

当  $x = \pm \frac{1}{b}$  时, 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{b^n}$  收敛.

所以当  $x = \pm \frac{1}{b}$  时级数都收敛, 收敛区域为  $\left[ -\frac{1}{b}, \frac{1}{b} \right]$ .

由 ①② 知该级数的收敛半径为  $R = \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}$ .

### 题型六 函数在某点的幂级数展开

**提示** 将给定函数在某点处展成泰勒级数有两种方法: 直接法与间接法. 所谓间接法, 就是利用已知的 7 个函数展式, 通过适当的变量替换, 四则运算, 复合以及逐项微分, 积分而将一个函数展成幂级数的方法. 通常采用的就是间接法.

**【例 8.22】** 把下列函数展成  $x$  的幂级数:

$$(1) f(x) = \frac{x}{9+x^2};$$

$$(2) f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2};$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x;$$

$$(4) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) f(x) &= \frac{1}{9} \frac{x}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \stackrel{\text{由展开式(2)}}{=} \frac{1}{9} x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2(n+1)}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{3^{2n}}, x \in (-3, 3). \end{aligned}$$

$$(2) f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \arctan x,$$

$$f''(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

$$f'(x) = \int_0^x f''(x) dx = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

$$(3) f'(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n},$$

且  $f(0) = 0$  于是

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx + f(0) = \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

$$(4) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4) = \ln \frac{1-x^5}{1-x} \quad (x \neq 1) \\ = \ln(1-x^5) - \ln(1-x),$$

$$\text{因为 } \ln(1-x^5) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{5n} \quad (-1 \leq x < 1),$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad (-1 \leq x < 1),$$

$$\text{所以 } f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{5n} - \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^{4n})}{n} x^n \quad (-1 \leq x < 1).$$

**【例 8.23】** 把下列函数在指定点展成幂级数:

$$(1) f(x) = \ln x, \text{ 在 } x=1 \text{ 处};$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}, \text{ 在 } x=1 \text{ 处};$$

$$(3) f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e}{x-1} \right), \text{ 在 } x=1 \text{ 处};$$

$$(4) f(x) = \sin x, \text{ 在 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 处}.$$

$$\text{【解】} (1) f(x) = \ln x = \ln[1+(x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (0 < x \leq 2),$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{x-1}{2} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} \quad (-1 < x < 3),$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} \quad (-2 < x < 4),$$

$$\text{故 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x-1)^n \quad (-1 < x < 3).$$

$$(3) e^x = e e^{x-1} = e \left[ 1 + (x-1) + \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \frac{1}{3!} (x-1)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} (x-1)^n + \cdots \right],$$

$$\frac{e^x - e}{x-1} = e \left[ 1 + \frac{1}{2!} (x-1) + \frac{1}{3!} (x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} (x-1)^{n-1} + \cdots \right], x \neq 1,$$



$$\text{故 } \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e}{x-1} \right) = e \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}(x-1) + \cdots + \frac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2} + \cdots \right], x \neq 1.$$

$$\begin{aligned} (4) \sin x &= \sin \left[ \frac{\pi}{4} + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned}$$

又由展开式(4)有

$$\sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^5}{5!} - \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} + \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^4}{4!} - \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

$$\text{故 } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} - \frac{\left( x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \cdots \right] \quad (-\infty < x < +\infty).$$

**【例 8.24】**把级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)! 2^{2n-2}} x^{2n-1}$  的和函数展成  $x-1$  的幂级数.

**【解】**设级数的和函数为  $s(x)$ , 即

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)! 2^{2n-2}} x^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n-1} = 2 \sin \frac{x}{2},$$

$x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} s(x) &= 2 \sin \frac{1 + (x-1)}{2} = 2 \sin \left( \frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} \right) = 2 \left( \sin \frac{1}{2} \cos \frac{x-1}{2} + \cos \frac{1}{2} \sin \frac{x-1}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} \left( \frac{x-1}{2} \right)^{2n} + 2 \cos \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \left( \frac{x-1}{2} \right)^{2n-1}, \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, +\infty).$

### 题型七 幂级数求和

#### 提示 解题程序

- (1) 求出给定级数的收敛域;
- (2) 通过逐项积分或微分将给定的幂级数化为常见函数展开式的形式(或易看出其假设和函数  $s(x)$  与其导数  $s'(x)$  的关系), 从而得到新级数的和函数;
- (3) 对于得到的和函数作相反的分析运算, 使得原幂级数的和函数.

**【例 8.25】**求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^{n-1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**【解】**(1) 先求收敛域,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} |x|^{n-1} = \frac{|x|}{2}.$$

当  $\frac{|x|}{2} < 1$  时, 即  $|x| < 2$ , 亦即  $-2 < x < 2$  时, 级数收敛;

令  $x = 2$ , 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  发散;

令  $x = -2$ , 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n}$  收敛;

故 级数的收敛域为  $[-2, 2)$ .

设级数的和为  $s(x)$ , 即

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n = \frac{1}{x} \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n2^n} x^{n-1} \right)' \right] dx = \frac{1}{x} \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} x^{n-1} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left[ \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n \right] dx = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{2-x} dx = \frac{1}{x} [\ln 2 - \ln(2-x)] \quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

因为和函数  $s(x)$  在收敛域内是连续的,

$$\text{所以 } s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2 - \ln(2-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故, 级数的和函数 } s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{\ln 2 - \ln(2-x)}{x}, & x \in [-2, 0) \cup (0, 2) \end{cases}.$$

(2) 可求出收敛域为  $[-1, 1]$ .

$$\begin{aligned} \text{设 } s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n(n+1)} \right)' \right] dx = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n-1} \right) dx \\ &= \int_0^x \left( \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) dx = \int_0^x \left[ \frac{1}{x^2} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' dx \right] dx \\ &= \int_0^x \left( \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{x}{1-x} dx \right) dx = \int_0^x \left( \frac{1}{x^2} (-x - \ln(1-x)) \right) dx \\ &= \int_0^x \left[ -\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right] dx = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \Big|_0^x \\ &= 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, \quad x \neq 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

由和函数  $s(x)$  在收敛域内的连续性, 有

$$s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + (1-x)\ln(1-x)}{x} \right) = 0,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 原级数 } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

(因为  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,  $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时)

$$\text{故, } s(x) = \begin{cases} 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}} |x|^{2n-2} = \frac{|x|^2}{2},$$

当  $\frac{|x|^2}{2} < 1$ , 即  $|x| < \sqrt{2}$ , 亦即  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$  时, 级数收敛.

当  $x = \pm\sqrt{2}$  时, 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$  发散. 故级数的收敛域为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

$$\begin{aligned} \text{令 } s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \left( \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} \right) dx \right)' \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} dx \right)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} \right)' \\ &= \left( \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^2}{2} \right)^n \right)' = \left[ \frac{1}{x} \frac{\frac{1}{2} x^2}{1 - \frac{x^2}{2}} \right]' \\ &= \left( \frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

(4) 可求出收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \text{令 } s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{n+1}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} dx \right)' = \left( \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' \\ &= \left( \frac{x}{2} \sin x \right)' = \frac{1}{2} (\sin x + x \cos x), x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

**【例 8.26】** 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  的和函数.

**【解】** 易求出收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$\text{令 } s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (3)$$

$$s'(x) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \cdots,$$

$$s(x) + s'(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \cdots = e^x,$$

即  $s(x) + s'(x) = e^x$ , 此一阶线性方程的通解为  $s(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2} e^x$ .

又由 (3) 可知  $s(0) = 1$ , 代入上式, 得  $C = \frac{1}{2}$ . 故幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$ .

**【例 8.27】** 求下列级数的和函数.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$$

**提示** 系数为若干项代数之和的幂级数, 求和函数时应先将级数写成各个幂级数的代数和, 然后分别求出它们的和函数, 最后对和函数求代数和, 即得所求级数的和函数.

**【解】** (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n+1) |x|^n} = |x|$ .

当  $|x| < 1$ , 即  $-1 < x < 1$  时, 级数收敛.

令  $x = 1$ , 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)$  发散;  $x = -1$ , 原级数  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)$  发散, 故级数收敛域为  $(-1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{令 } s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 2x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx \right)' + \frac{1}{1-x} \\ &= 2x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' + \frac{1}{1-x} = 2x \left( \frac{x}{1-x} \right)' + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

(2) 易知其收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \text{令 } s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!} x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!} x^{n-1} = x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x \frac{n^2}{2^n n!} x^{n-1} dx \right) \right]' \\ &= x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n n!} x^n \right]' = x \left[ x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n n!} x^{n-1} \right]' \\ &= x \left[ x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n n!} x^{n-1} dx \right) \right]' = x \left[ x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \right) \right]' \\ &= x \left[ x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n \right) \right]' = x \left[ x (e^{\frac{x}{2}} - 1) \right]' = \frac{1}{4} x (x+2) e^{\frac{x}{2}}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n = e^{\frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = \frac{1}{4} x (x+2) e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = \left( \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right) e^{\frac{x}{2}}.$$

**【例 8.28】** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = a_2 = 1$ , 且  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 2, 3, \dots$ ,

证明: 当  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$  收敛, 并求其和函数.

**【解】** 显然,  $a_n > 0, a_{n+1} > a_n$ , 所以  $\{a_n\}$  是单调增加正数列.

又  $a_3 = 2, a_4 = a_3 + a_2 < 2a_3 = 2^2$ . 设  $a_n < 2^{n-2}$ , 则

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < 2a_n < 2^{n-1}.$$

所以, 由归纳法得  $a_n < 2^{n-2}, n = 4, 5, \dots$ . 于是

$$|a_n x^{n-1}| < 2^{n-2} |x^{n-1}| = \frac{1}{2} |(2x)^{n-1}|,$$

又当  $|2x| < 1$ , 即  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1}$  收敛.

所以, 由比较判别法, 当  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$  绝对收敛.

$$\text{由于 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1 + a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1} x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) x^n \\
 &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n \\
 &= 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} \\
 &= 1 + x + x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - a_1 \right) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \\
 &= 1 + (x + x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1},
 \end{aligned}$$

$$\text{得 } (1 - x - x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1, \text{ 即 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1 - x - x^2}, |x| < \frac{1}{2}.$$

### 题型八 数项级数求和

**提示 (I)** 利用级数和的定义求和

$$\text{即, 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, \text{ 则 } \sum_{k=1}^n u_k = s, \text{ 其中 } s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

根据  $s_n$  的求法又可分为: 直接法、拆项法和递推法.

1. 直接法 (适用于  $\sum_{k=1}^n u_k$  为等差或等比数列或通过简单变换易化为这两种数列的数列)

**【例 8.29】** 求下列级数的和.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)q^{n-1} \quad (|q| < 1); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

**【解】** (1)  $s_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n-1)q^{n-1}$ ,

④

④ 的两边同乘以  $q$ , 得

$$qs_n = q + 3q^2 + 5q^3 + \cdots + (2n-1)q^n,$$

⑤

④ - ⑤ 得

$$\begin{aligned}
 (1-q)s_n &= 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^{n-1} - (2n-1)q^n \\
 \Rightarrow s_n &= \frac{1}{1-q} + \frac{2(q+q^2+\cdots+q^{n-1})}{1-q} - (2n-1)\frac{q^n}{1-q} \\
 &= \frac{1}{1-q} + \frac{2q(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} - (2n-1)\frac{q^n}{1-q},
 \end{aligned}$$

$$\text{因为 } |q| < 1, \text{ 所以 } s_n \rightarrow \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)q^{n-1} (|q| < 1) = \frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

(2) 略, 其和为  $s = 2$ .

2. 拆项法 (即把通项拆成两项差的形式, 在求前  $n$  项和时, 除首尾两项外其余各项均对消掉)

**【例 8.30】** 求下列级数的和.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) u_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right], \\ s_n &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left( \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

$$(2) u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$\begin{aligned} s_n &= \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = 1.$$

## (II) 阿贝尔法(构造幂级数法)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

其中, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  可通过逐项微分或积分求得和函数  $s(x)$ . 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x).$$

**【例 8.31】** 求下列级数的和.

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; & \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left( \frac{3}{4} \right)^n; \\ (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}; & \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}. \end{aligned}$$

**【解】** (1) 令  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ , 其收敛域为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,

$$\begin{aligned} s(x) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} dx \right)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} \right)' \\ &= \left( \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^2}{2} \right)^n \right)' = \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2-x^2} \right)' = \left( \frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+2}{(2-x^2)^2} = 3. \text{ 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3.$$

(2) 令  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left( \frac{3}{4} \right)^n x^{2n-1}$ , 收敛域为  $\left[ -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$ ,

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left( \frac{3}{4} \right)^n x^{2n-1} \right] dx = \int_0^x \left[ \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{3}{4} x^2 \right)^n \right] dx \\ &= \int_0^x \frac{1}{x^2} \cdot \left( -\frac{3x^2}{4+3x^2} \right) dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} x \Big|_0^x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} x, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1} \left( \frac{3}{4} \right)^n = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(3) \text{ 令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \text{ 收敛域为 } (-\infty, +\infty),$$

$$\begin{aligned} s(x) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx \right)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2(2n+1)!} \right)' \\ &= \left( \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx \right)' = \left[ \frac{1}{2x} (\sin x - x) \right]' \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2} = \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1),$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1).$$

$$(4) \text{ 令 } s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}, \text{ 收敛域为 } (-1, 1],$$

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} \right)' \right] dx = \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} \right] dx \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{6} \ln(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

凡通项  $u_n$  可拆成代数形式的, 在求和之前一定要拆开, 然后分别求各级数的和, 最后求它们的代数和.

**【例 8.32】** 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n(n-1)!}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}.$$

$$\text{【解】} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!},$$

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n} x^{n-1} dx \right)'$$

令

$$= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n \right]' = \left( \frac{x}{2-x} \right)' = \frac{2}{(2-x)^2},$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} s_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{(2-x)^2} = 2.$$

$$\text{令 } s_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!} x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}},$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)!} = \lim_{x \rightarrow 1^-} s_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n(n-1)!} = 2 + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{令 } s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-2} = \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-2} dx \right]' \\ = \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1} \right]' = \left\{ \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x n \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1} dx \right]' \right\}' \\ = \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n \right]'' = \left[ \frac{x^2}{2(2+x)} \right]'' = \frac{4}{(2+x)^3},$$

$$\text{有 } \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{4}{27},$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = \frac{2}{3} + \frac{4}{27} = \frac{22}{27}.$$

### 题型九 周期与非周期函数的傅里叶级数

#### 提示 解题程序:

- (1) 画出  $f(x)$  的图形并验证是否满足狄氏条件(画图目的:验证狄氏条件,由图形写出收敛域,利用奇偶性可减少求系数的工作量);
- (2) 求出傅里叶系数;
- (3) 写出傅里叶级数,并注明它在何处收敛于  $f(x)$ .

#### 【例 8.33】填空.

$$(1) \text{ 设 } f(x) \text{ 在 } [0, l] \text{ 上连续, 在 } (0, l) \text{ 内有 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

则  $b_n$  的计算公式为\_\_\_\_\_.

$$(2) \text{ 设 } f(x) \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的函数, 且其傅里叶系数为 } a_n, b_n, \text{ 试求 } f(x+h) (h \text{ 为实数}) \text{ 的傅里叶系数: } a'_n = \text{_____, } b'_n = \text{_____}.$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) \text{ 是可积函数, 且在 } [-\pi, \pi] \text{ 上恒有 } f(x+\pi) = f(x), \text{ 则 } a_{2n-1} = \text{_____, } b_{2n-1} = \text{_____}.$$

【解】(1) 由题设条件可知是对  $f(x)$  进行奇开拓, 由相应的系数公式即可得出

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

$$(2) a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos[n(x+h) - nh] dx \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nh \cos n(x+h) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \sin nh \sin n(x+h) dx \\ = a_n \cos nh + b_n \sin nh.$$

类似可求出  $b'_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$ .



$$(3) a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & \stackrel{\text{令 } x=t+\pi}{=} \int_{-\pi}^0 f(t+\pi) \cos n(t+\pi) \, dt \\ & = \int_{-\pi}^0 f(t+\pi) (-1)^n \cos nt \, dt = \int_{-\pi}^0 f(t) (-1)^n \cos nt \, dt \\ & = \int_{-\pi}^0 f(x) (-1)^n \cos nx \, dx, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [1 + (-1)^n] f(x) \cos nx \, dx,$$

$$\text{故 } a_{2n-1} = 0.$$

$$\text{类似可求出 } b_{2n-1} = 0.$$

**【例 8.34】** 将函数  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 展成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

**【解】**  $f(x) = 2 + |x|$  为偶函数 (如图 8-1 所示), 只能展成余弦级数, 即

$$b_n = 0, a_0 = 2 \int_0^1 (2+x) \, dx = 5,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 (2+x) \cos(n\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx \\ &= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

因为所给函数在  $[-1, 1]$  上满足狄氏收敛定理, 故

$$\begin{aligned} 2 + |x| &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x), [-1, 1] \\ &= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, 上式 } \Rightarrow 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ 又}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**【例 8.35】** 将函数  $f(x) = x - 1$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 展成周期为 4 的余弦级数.

**【解】** 既然是将  $f(x)$  展成余弦函数, 所以就必须对  $f(x)$  进行偶开拓, 如图 8-2 所示.

$$b_n = 0, (n = 1, 2, \dots)$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \, dx = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx \\ &= \left[ (x-1) \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \end{aligned}$$

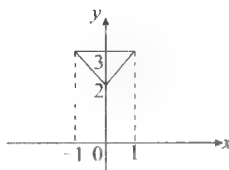


图 8-1

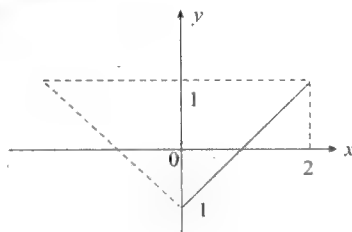


图 8-2

$$= \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1, (k=1, 2, \dots) \end{cases}$$

故  $f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2} x, x \in [0, 2]$ .

**【例 8.36】** 把  $f(x) = |\sin x|, -\pi \leq x \leq \pi$  展成傅里叶级数.

**【解】** 由图 8-3 可看出  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 且只有三个极值点. 故狄氏条件满足.

因为  $f(x)$  为偶函数. 所以  $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(1-n)x] \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} [(-1)^{n-1} - 1] \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{\pi(n^2-1)} [(-1)^{n-1} - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

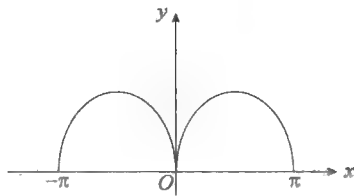


图 8-3

因为在推演中当  $n = 1$  时,  $a_n$  没有意义, 所以  $a_0, a_1$  要重新求. (注: 若在推演中  $n = 3$  没有意义, 则  $a_0, a_1, a_2, a_3$  都要重新求, 其他情形类似处理.)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$\text{故 } |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

**【例 8.37】** 把  $f(x) = 10 - x, 5 \leq x \leq 15$  展成以 10 为周期的傅里叶级数.

(如图 8-4 所示)

**【解】**  $a_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \cos \frac{n\pi}{5} x \, dx$

$$= 2 \int_5^{15} \cos \frac{n\pi}{5} x \, dx - \frac{1}{5} \int_5^{15} x \cos \frac{n\pi}{5} x \, dx$$

$$= \frac{10}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} x \Big|_5^{15} - \frac{5}{n\pi} x \sin \frac{n\pi}{5} x \Big|_5^{15} - \left( \frac{5}{n\pi} \right)^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{5} x \Big|_5^{15}$$

$$= 0.$$

推演  $a_n$  过程中  $n = 0$  没有意义, 所以  $a_0$  要重新求.

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \, dx = 0,$$

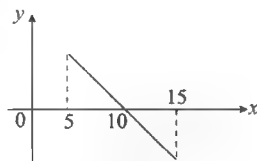


图 8-4

$$b_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \sin \frac{n\pi}{5} x dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{故 } f(x) = 10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{5} x \quad (5 < x < 15).$$

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 已知一级数收敛, 判别另一相关级数的敛散性时, 要想到级数的比较判别法和一些常用的不等式, 如  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  等.

**【例 8.38】** 下列各选项正确的是

(A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  均收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛.

(B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  都收敛.

(C) 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $u_n \geq \frac{1}{n}$ .

(D) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也收敛. 【   】

**【解】** 因为  $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n \leq u_n^2 + v_n^2 + (u_n^2 + v_n^2) = 2(u_n^2 + v_n^2)$ ,

所以若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$  均收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛. 故选(A).

**【例 8.39】** 设常数  $\lambda > 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与  $\lambda$  有关. 【   】

**【解】**  $|u_n| = \left| (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| = \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} < \frac{|a_n|}{n} < \frac{1}{2} \left( a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  都收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 故选(C).

#### 二、综合题解析

**【例 8.40】** 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 试将  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数, 并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \text{ 的和及 } f^{(n)}(0).$$

**【解】** 因  $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1, 1)$ , 故

$$\arctan x = \int_0^x (\arctan x)' dx = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \text{ 根据函数的幂级数展开式的唯一性, 当 } n = 2k-1, k = 1,$$

$$2, 3, \dots \text{ 时, } f^{(2k-1)}(0) = 0. \text{ 当 } n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots \text{ 时, } \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{2(-1)^k}{1-4k^2}, \text{ 即}$$

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \frac{2 \cdot (2k)!}{1-4k^2}.$$

【例 8.41】已知  $f_n(x)$  满足  $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1}e^x$  ( $n$  为正整数), 且  $f_n(1) = \frac{e}{n}$ . 求函数项级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  的和.

【解】解方程  $f'_n(x) - f_n(x) = x^{n-1}e^x$ , 得通解为

$$f_n(x) = e^{\int dx} \left( \int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} dx + c \right) = e^x \left( \frac{x^n}{n} + c \right).$$

代入  $f_n(1) = \frac{e}{n}$ , 得  $c = 0$ , 故  $f_n(x) = \frac{e^x x^n}{n}$ . 于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= e^x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = e^x \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = e^x \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= -e^x \ln(1-x), \quad x \in [-1, 1). \end{aligned}$$

【例 8.42】已知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ , 试证明

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad (x \in (0, 1)).$$

【分析】记  $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ , 则可由  $F'(x) = 0$  得证  $f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = C$  [ $x \in (0, 1)$ ]. 然后对上式令  $x \rightarrow 0^+$  取极限得  $C = \frac{\pi^2}{6}$  即可.

【解】由于幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$  在  $[0, 1]$  上收敛, 所以  $f(x), f(1-x)$  在  $[0, 1]$  上都连续, 且在  $(0, 1)$  内可导. 记  $F(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ , 则  $F(x)$  在  $(0, 1)$  内可导, 且

$$F'(x) = f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x} \ln x. \quad \textcircled{1}$$

由于对  $x \in (0, 1)$  有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\frac{1}{x} \ln(1-x). \end{aligned} \quad (2)$$

将上式中的  $x$  换为  $1-x$  得

$$f'(1-x) = -\frac{1}{1-x} \ln x. \quad (3)$$

将式 (2) 式 (3) 代入式 (1) 得  $F'(x) = 0$ , 从而  $F(x) \equiv C$ , 即

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) \equiv C. \quad (4)$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x) \stackrel{\text{令 } t=1-x}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} t^n \Big|_{t=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(1-x)}{x} = 0, \end{aligned}$$

所以, 对 (4) 的两边令  $x \rightarrow 0^+$  得  $C = \frac{\pi^2}{6}$ , 代入 (4) 得

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad [x \in (0, 1)].$$

## 习 题 八

### 1. 选择题.

(1) 设  $\alpha$  为常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

A. 绝对收敛.

B. 发散.

C. 条件收敛.

D. 敛散性与  $\alpha$  取值有关.

【 】

(2) 设  $u_n = (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , 则

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  都收敛.

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  都发散.

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 而  $\sum_{k=1}^{\infty} u_n^2$  发散.

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,  $\sum_{k=1}^{\infty} u_n^2$  收敛.

【 】

(3) 设函数  $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$ , 而  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$ ,

其中  $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \quad (n=1, 2, \dots)$ , 则  $s\left(-\frac{1}{2}\right)$  等于

A.  $-\frac{1}{2}$ .

B.  $-\frac{1}{4}$ .

C.  $\frac{1}{4}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

【 】

(4) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  条件收敛, 则

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  收敛.

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$  都收敛. 【 】

(5) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则必收敛的级数为

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ .

B.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ .

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ .

D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n-1})$  【 】

(6) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$  在  $x = -2$  处收敛, 则此级数在  $x = -1$  处

A. 条件收敛.

B. 绝对收敛.

C. 发散.

D. 收敛性不确定. 【 】

(7) 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 3, 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$  的收敛区间为

A.  $(-2, 4)$ .

B.  $[-2, 4]$ .

C.  $(-3, 3)$ .

D.  $(-4, 2)$ . 【 】

## 2. 判断下列级数的敛散性.

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} \sin \frac{1}{n}$ ;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)} (a \neq 0)$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ ;

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$ ;

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ;

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sqrt{1+n} - \sqrt{n-1})$ ;

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + \ln n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$ ;

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$ ;

(9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$ .

## 3. 判断下列级数的敛散性.

(1)  $a - a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{4}} + \cdots (a > 0)$ ;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1) \sqrt{n+1} - 1}$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ ;

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$ ;

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ;

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$ .

## 4. 证明题.

(1) 设正项数列  $\{a_n\}$  单调下降, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-a_{n+1}}{a_n}\right)$  收敛.

(2) 设正项数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta (\delta > 0 \text{ 常数})$ , 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

5. 求下列级数的收敛域.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (3^n + \sqrt[3]{n})(x-1)^{2n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}.$$

6. 求下列级数的和.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} (m \text{ 为自然数});$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} x^{n-1} \text{ 并求 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}}.$$

7. 把下列级数展成  $x$  的幂级数.

$$(1) f(x) = \ln(1+x-2x^2);$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{2} \arctan x;$$

$$(3) f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(4) f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)};$$

$$(5) f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

8. 把下列级数在指定点展成幂级数.

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \text{ 在 } x_0 = -4 \text{ 处}; (2) f(x) = \lg x, \text{ 在 } x_0 = 1 \text{ 处}.$$

9. 把下列函数分别展成正弦函数和余弦函数.

$$(1) f(x) = x^2, (0 < x < 2\pi);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \text{ 时} \\ 2-x, & 1 < x < 2 \text{ 时} \end{cases}.$$

10. 把下列函数展成傅里叶级数.

$$(1) f(x) = \frac{1}{2} \cos x + |x|;$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

参 考 答 案

1. (1) B (2) C (3) B (4) C (5) D (6) B (7) A

2. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛;

(5) 收敛; (6) 收敛; (7) 收敛; (8) 发散; (9) 发散.

3. (1) 发散; (2) 条件收敛; (3) 绝对收敛;

(4) 绝对收敛; (5) 绝对收敛; (6) 条件收敛.

4. 略.

$$5. (1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad (2) [-1, 1]; \quad (3) (-\sqrt{2}, \sqrt{2});$$

$$(4) \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right); \quad (5) (-2, 4); \quad (6) [4, 6].$$

$$6. (1) \frac{1}{24}; \quad (2) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}; \quad (3) f(x) = \arctan x, [-1, 1];$$

$$(4) f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}, (-1, 1); \quad (5) f(x) = \ln \frac{2}{1-x} [-3, 1];$$

$$(6) f(x) = \frac{16}{(2-x)^3}, f(1) = 16.$$

$$7. (1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, (-1, 1);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, [-1, 1];$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{2n+1}] x^n, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$(5) -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, [-1, 1].$$

$$8. (1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n, (-6, -2);$$

$$(2) \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, (0, 2].$$

$$9. (1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2}, \text{ 其中 } b_{2k+1} = -\left[\frac{\pi^2}{2k+1} - \frac{4}{(2k+1)^3}\right], b_{2k} = -\frac{4\pi}{k},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{2} = \frac{4\pi^2}{3} - 16 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^2};$$

$$(2) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}; \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

$$10. (1) \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \cos x - \frac{4}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, [-\pi, \pi];$$

$$(2) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{2}\right] \sin nx, (-\pi, \pi).$$



## 第九章 矢量代数与空间解析几何

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、矢量的概念及其性质

##### (一) 概念及其运算

矢量  $\triangleq$  既有大小又有方向的量.

矢量的模  $\triangleq$  矢量  $\boldsymbol{a}$  的大小. 矢量  $\boldsymbol{a}$  的模, 记为  $|\boldsymbol{a}|$ .

若矢量用坐标表示  $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \{x, y, z\}$ ,

则  $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

单位矢量  $\triangleq$  模为 1 的矢量. 矢量  $\boldsymbol{a}$  的单位矢量记作  $\boldsymbol{a}^0$ ,

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

矢量  $\boldsymbol{a}$  的方向余弦  $\triangleq \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,

显然  $\boldsymbol{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ , 且有  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ .

设  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  是空间直角坐标系中的两点, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \\ |\overrightarrow{M_1M_2}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \\ \cos\alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.\end{aligned}$$

#### 矢量的运算及其性质

##### 1. 加减运算

设有矢量  $\boldsymbol{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \boldsymbol{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,

则  $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$ .

##### 2. 数乘运算

数乘矢量  $\triangleq$  矢量  $\boldsymbol{a}$  与一数量  $\lambda$  之积  $\lambda\boldsymbol{a}$ ,

$$\lambda\boldsymbol{a} = \begin{cases} |\lambda\boldsymbol{a}| \boldsymbol{a}^0, & \lambda > 0, \text{即与 } \boldsymbol{a} \text{ 相向,} \\ \mathbf{0}, & \lambda = 0, \text{即为零矢量,} \\ -|\lambda\boldsymbol{a}| \boldsymbol{a}^0, & \lambda < 0, \text{即与 } \boldsymbol{a} \text{ 反向.} \end{cases}$$

设  $a = \{x_1, y_1, z_1\}$ , 则  $\lambda a = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$ .

### 3. 矢量的数积(点积, 内积)

矢量  $a$  与  $b$  的数量积  $a \cdot b \triangleq |a| |b| \cos(a, b)$ .

设  $a = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $b = \{x_2, y_2, z_2\}$ , 则  $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ .

#### 运算律

- (1) 交换律  $a \cdot b = b \cdot a$ ;
- (2) 分配律  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;
- (3) 与数乘矢量有结合律  $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$ .

### 4. 矢量的矢积(叉积, 外积)

定义 设有两个矢量  $a$  与  $b$ , 若存在一个矢量  $c$ , 满足如下条件

- (1)  $|c| = |a| |b| \sin(a, b)$ ;
- (2)  $c \perp a, c \perp b$ , 即  $c$  垂直于  $a, b$  所确定的平面;
- (3)  $a, b, c$  成右手系.

则称矢量  $c$  为矢量  $a$  与  $b$  的矢量积, 记  $c = a \times b$ .

设  $a = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $b = \{x_2, y_2, z_2\}$ , 则

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k.$$

#### 运算律

- (1) 反交换律  $a \times b = -b \times a$ ;
- (2) 与数乘矢量有结合律  $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$ ;
- (3) 分配律  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ .

### 5. 混合积

定义 设有三个矢量  $a, b, c$ , 若先作  $a, b$  的叉积  $a \times b$ , 再与  $c$  作点积  $(a \times b) \cdot c$ , 则这样的数积称为矢量  $a, b, c$  的混合积, 记为  $(a, b, c)$ , 即  $(a, b, c) = (a \times b) \cdot c$ .

设  $a = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $b = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,  $c = \{x_3, y_3, z_3\}$ , 则

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

几何意义:  $|(a, b, c)|$  表示以  $a, b, c$  为棱的平行六面体体积.

#### 运算律

- (1) 具有轮换对称性, 即  $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$ ;
- (2) 两矢量积互换, 混合积变号, 即  $(a, b, c) = -(a, c, b) = -(c, b, a) = -(b, a, c)$ .

### (二) 矢量之间的关系

设  $a = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $b = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,  $c = \{x_3, y_3, z_3\}$ ,

$$1^\circ \quad a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0;$$

$$2^\circ \quad a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

其中  $x_2, y_2, z_2$  之中有一个为“0”, 如  $x_2 = 0$ , 应理解为  $x_1 = 0$ ;

3°  $a, b$  共线  $\Leftrightarrow$  存在不全为零的数  $\lambda, \mu$ , 使  $\lambda a + \mu b = 0$ ;

4° 矢量  $a$  与  $b$  的夹角, 可由下式求出

$$\cos(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

5°  $a, b, c$  共面  $\Leftrightarrow$  存在不全为零的数  $\lambda, \mu, \nu$ , 使

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \text{ 或者 } (a, b, c) = 0.$$

【例 9.1】填空.

- (1) 设  $a = \{3, 2, 1\}, b = \left\{2, \frac{4}{3}, k\right\}$ , 若  $a \perp b$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_; 若  $a \parallel b$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_.
- (2) 设  $|a| = 3, |b| = 4$ , 且  $a \perp b$ , 则  $|(a+b) \times (a-b)| =$  \_\_\_\_\_.
- (3) 设  $a = \{2, -3, 1\}, b = \{1, -2, 5\}, c \perp a, c \perp b$  且  $c \cdot (i+2j-7k) = 10$ , 则  $c =$  \_\_\_\_\_.
- (4) 设  $(a \times b) \cdot c = 2$ , 则  $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) =$  \_\_\_\_\_.

【解】(1) 因为  $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ , 所以  $3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot k = 0 \Rightarrow k = -\frac{26}{3}$ .

因为  $a \parallel b \Leftrightarrow$  对应坐标成比例, 所以  $\frac{3}{2} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ .

$$(2) (a+b) \times (a-b) = a \times a + b \times a - a \times b - b \times b = b \times a - a \times b = 2b \times a,$$

因为  $a \perp b$ , 所以  $\sin(\hat{a}, \hat{b}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

$$\text{故 } |(a+b) \times (a-b)| = 2|b \times a| = 2|b||a|\sin(\hat{a}, \hat{b}) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24.$$

$$(3) \text{ 设 } c = \{x, y, z\}, \text{ 由 } c \perp a, c \perp b, \text{ 于是有 } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 7z = 0. \end{cases}$$

$$\text{解三元一次方程组, 得 } x = \frac{65}{12}, y = \frac{15}{4}, z = \frac{5}{12}. \text{ 故 } c = \left\{\frac{65}{12}, \frac{15}{4}, \frac{5}{12}\right\}.$$

$$\begin{aligned} (4) & [(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) \\ &= (a \times b + b \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c+a) \\ &= (a \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c+a) \\ &= (a \times b) \cdot c + (a \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot c + (a \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot a \\ &= (a \times b) \cdot c + (b \times c) \cdot a \\ &= 2(a \times b) \cdot c \\ &= 4[\text{因为 } (a \times b) \cdot c = 2]. \end{aligned}$$

【例 9.2】若矢量  $a+3b$  垂直于  $7a-5b$ , 并且矢量  $a-4b$  垂直于  $7a-2b$ , 求  $a$  与  $b$  的夹角.

【解】由题设可知

$$\begin{cases} (a+3b) \cdot (7a-5b) = 0, \\ (a-4b) \cdot (7a-2b) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a^2 + 16a \cdot b - 15b^2 = 0, \\ 7a^2 - 30a \cdot b + 8b^2 = 0, \end{cases} \quad ①$$

$$\Rightarrow 46a \cdot b = 23b^2 \Rightarrow 2a \cdot b = b^2, \quad ②$$

把②代入①,得  $|a| = |b|$ , 又

$$\cos(\hat{a}, b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{\frac{1}{2}b^2}{|b|^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } (\hat{a}, b) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

【例 9.3】求与矢量  $a = 2i - j + 2k$  共线且满足  $a \cdot x = -18$  的矢量  $x$ .

【解】因为  $x$  与  $a$  共线, 所以  $\exists \lambda \neq 0$ , 使  $x = \lambda a = \{2\lambda, -\lambda, 2\lambda\}$ , 又

$$a \cdot x = -18, \text{ 所以 } 4\lambda + \lambda + 4\lambda = -18, \lambda = -2,$$

$$\text{故 } x = \{-4, 2, -4\}.$$

【例 9.4】化简下列各式:

$$(1) (a+b) \cdot [(b+c) \times (c+a)];$$

$$(2) (a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)(a \cdot b)$$

$$(3) (2a+b) \times (c-a) + (b+c) \times (a+b)$$

【解】(1) 利用矢积, 混合积性质并注意到

$$c \times c = 0, a \perp (b \times a), a \perp (c \times a), b \perp (b \times c), b \perp (b \times a), \text{ 于是}$$

$$(a+b) \cdot [(b+c) \times (c+a)]$$

$$= (a+b) \cdot (b \times c + b \times a + c \times c + c \times a) = (a+b)(b \times c + b \times a + c \times a)$$

$$= a \cdot (b \times c) + a \cdot (b \times a) + a \cdot (c \times a) + b \cdot (b \times a) + b \cdot (c \times a) + b \cdot (b \times c)$$

$$= a \cdot (b \times c) + b \cdot (c \times a) = (a, b, c) + (b, c, a) = 2(a, b, c).$$

$$(2) (a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$$

$$= |a \times b|^2 + (a \cdot b)^2$$

$$= (|a||b|)^2 \sin^2(\hat{a}, b) + (|a||b|)^2 \cos^2(\hat{a}, b) = (|a||b|)^2.$$

$$(3) \text{ 原式} = 2a \times c + b \times c - 2a \times a - b \times a + b \times a + c \times a + b \times b + c \times b$$

$$= 2a \times c + b \times c + c \times a + c \times b = a \times c.$$

【例 9.5】证明矢量  $c = \frac{|a||b|+|b||a|}{|a|+|b|}a$  表示矢量  $a$  与  $b$  夹角平分线的方向.

【证】设  $a^0, b^0$  分别表示与  $a, b$  同向的单位矢量, 则

$$a^0 = \frac{a}{|a|}, b^0 = \frac{b}{|b|},$$

由  $a^0, b^0$  为边所构成的平行四边形为菱形, 知其对角线平分顶角, 于是

$$d = a^0 + b^0 = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} = \frac{|a||b|+|b||a|}{|a||b|},$$

这是与  $a, b$  夹角平分线平行的矢量, 又

$$c = \frac{|a||b|+|b||a|}{|a|+|b|}a = \frac{|a||b|}{|a|+|b|} \cdot \frac{a}{|a|} + \frac{|a||b|}{|a|+|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = \lambda d, \text{ 其中 } \lambda = \frac{|a||b|}{|a|+|b|} > 0,$$

故  $c$  表示  $a$  与  $b$  夹角平分线的方向.

【例 9.6】已知矢量  $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \angle ODA = \frac{\pi}{2}$ , 如图 9-1 所示.

$$\text{求证: (1) } \triangle ODA \text{ 的面积等于 } \frac{|a \cdot b||a \times b|}{2|b|^2};$$

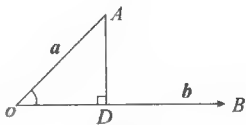


图 9-1

(2) 当  $a, b$  的夹角  $\theta$  为何值时,  $\triangle ODA$  的面积取最大值?

【解】(1) 设  $\triangle ODA$  的面积为  $S$ , 则

$$S = \frac{1}{2} OD \cdot AD = \frac{1}{2} |a| \cos\theta \cdot |a| \sin\theta = \frac{1}{4} |a|^2 \sin 2\theta,$$

$$\text{又 } |a \cdot b| = |a| |b| \cos\theta, \quad |a \times b| = |a| |b| \sin\theta,$$

$$\text{于是, } \frac{|a \cdot b| |a \times b|}{2 |b|^2} = \frac{|a|^2 |b|^2 \sin\theta \cos\theta}{2 |b|^2} = \frac{1}{4} |a|^2 \sin 2\theta,$$

$$\text{故 } S = \frac{|a \cdot b| |a \times b|}{2 |b|^2}.$$

$$(2) \text{ 由 } S = \frac{1}{4} |a|^2 \sin 2\theta \Rightarrow \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} |a|^2 \cos 2\theta,$$

令  $\frac{dS}{d\theta} = 0$ , 可得  $\theta = \frac{\pi}{4}$  是  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  内唯一驻点.

$$\text{又 } \frac{d^2 S}{d\theta^2} = -|a|^2 \sin 2\theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -|a|^2 < 0,$$

故, 当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时,  $\triangle ODA$  的面积  $S = \frac{1}{4} |a|^2$  最大.

【例 9.7】证明: 当  $a, b, c$  不共面时, 方程组

$$xa + yb + zc = d \quad (3)$$

$$\text{有以下解: } x = \frac{d \cdot (b \times c)}{a \cdot (b \times c)} \quad y = \frac{d \cdot (c \times a)}{b \cdot (c \times a)} \quad z = \frac{d \cdot (a \times b)}{c \cdot (a \times b)}.$$

【证】将式 (3) 的两边点乘  $b \times c$ , 并注意到:  $b, b, c$  共面,  $c, b, c$  共面, 则有

$$(xa + yb + zc) \cdot (b \times c) = xa \cdot (b \times c) + yb \cdot (b \times c) + zc \cdot (b \times c) \\ = xa \cdot (b \times c).$$

$$\text{即 } xa \cdot (b \times c) = d \cdot (b \times c),$$

故,  $x = \frac{d \cdot (b \times c)}{a \cdot (b \times c)}$ , 同理可证  $y$  与  $z$  的表达式成立.

【例 9.8】证明如下结论:

(1) 若  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ , 则矢量  $a, b, c$  共面;

(2) 若  $a \times b = c \times d, a \times c = b \times d$ , 则矢量  $a - d$  与  $b - c$  共线.

【证】(1) 由于  $a, b, c$  共面  $\Leftrightarrow (a, b, c) = 0$ ,

因而只要考虑  $a$  与  $a \times b + b \times c + c \times a = 0$  的数积即可.

注意到  $a, a, b$  共面,  $a, c, a$  共面, 故

$$a \cdot (a \times b + b \times c + c \times a) = a \cdot (a \times b) + a \cdot (b \times c) + a \cdot (c \times a) \\ = 0 + a \cdot (b \times c) + 0 = a \cdot (b \times c),$$

又  $a \cdot 0 = 0$ , 故  $a \cdot (b \times c) = 0$ , 于是矢量  $a, b, c$  共面.

(2) 由于  $a - d$  与  $b - c$  共线  $\Leftrightarrow (a - d) \times (b - c) = 0$ ,

即只要考虑  $(a - d) \times (b - c)$  是否为零矢量即可.

$$(a - d) \times (b - c) = a \times b - d \times b - a \times c + d \times c,$$

因为

$$a \times b = c \times d, a \times c = b \times d,$$

所以

$$(a - d) \times (b - c) = c \times d - b \times d - d \times b + d \times c = 0,$$

故  $a - d$  与  $b - c$  共线.

【例 9.9】一矢量与  $x$  轴、 $y$  轴成等角, 与  $z$  轴所构成的角是它们的 2 倍, 试确定该矢量的方向.

【解】设该矢量与  $x, y$  轴的夹角为  $\alpha$ , 则与  $z$  轴的夹角为  $2\alpha$ , 又由于方向余弦的平方和等于 1,

所以

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha &= 1, \\ 2\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)^2 &= 1, \\ 2\cos^2\alpha \cdot (2\cos^2\alpha - 1) &= 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0, \cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (“-” 舍去)} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{该矢量的方向角分别为: } \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \pi \text{ 或 } \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{故, 该矢量的方向为 } \{\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1\},$$

$$\text{或 } \left\{ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = 0 \right\}.$$

## 二、平面与直线

平面与直线的关系见表 9-1.

表 9 1

平面方程	直线方程
<p>1. 一般方程</p> $Ax + By + Cz + D = 0$ <p>法矢量 <math>\mathbf{n} = \{A, B, C\}</math></p> <p>若方程中某个坐标不出现, 则平面就平行于该坐标轴, 例如</p> <p>平面 <math>Ax + Cz + D = 0 \parallel y</math> 轴</p>	<p>1. 一般式方程(两平面交线)</p> $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \text{ 平面 } \Pi_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \text{ 平面 } \Pi_2 \end{cases}$ <p>平面 <math>\Pi_1</math> 与 <math>\Pi_2</math> 的法矢量分别为</p> $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ <p>直线的方向矢量为</p> $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$
<p>2. 平面的点法式方程</p> $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ <p><math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 为平面上已知点</p> <p><math>\mathbf{n} = \{A, B, C\}</math> 为法矢量</p>	<p>2. 标准式方程</p> $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ <p><math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 为直线上的已知点</p> <p><math>\mathbf{s} = \{l, m, n\}</math> 为直线的方向矢量</p>
<p>3. 三点式方程</p> $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ <p><math>M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)</math> 为平面上的三个点</p>	<p>3. 两点式方程</p> $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ <p><math>M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)</math> 为直线上的两点</p>
<p>4. 截距式方程</p> $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ <p><math>a, b, c</math> 分别为平面在三坐标轴上的截距, 即平面通过三点 <math>(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)</math></p>	<p>4. 参数式方程</p> $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ <p><math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 为直线上的已知点</p> <p><math>\mathbf{s} = \{l, m, n\}</math> 为直线的方向矢量</p>

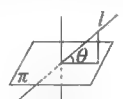
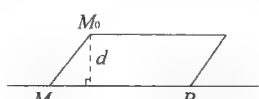
由平面  $\Pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  与平面  $\Pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  所确定的平面束

方程为

$$\mu(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \text{ 其中 } \mu, \lambda \text{ 不全为“0”}.$$

平面间的关系见表 9-2.

表 9-2

平面间关系	平面与直线间关系	直线间关系
<p>设有两个平面:</p> <p>平面 <math>\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0</math></p> <p>平面 <math>\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0</math></p> <p>1. 平面 <math>\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}</math></p> <p>2. 平面 <math>\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0</math></p> <p>3. 平面 <math>\Pi_1</math> 与 <math>\Pi_2</math> 的夹角 <math>\theta</math>, 由下式确定</p> <p><math>\cos\theta = \frac{ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}</math></p>	<p>设直线与平面方程分别为</p> <p>直线 <math>L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}</math></p> <p>平面 <math>\Pi: Ax + By + Cz + D = 0</math></p> <p>1. <math>L \parallel \Pi \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0</math></p> <p>2. <math>L \perp \Pi \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}</math></p> <p>3. <math>L</math> 与 <math>\Pi</math> 的夹角 <math>\theta</math>, 由下式确定</p> <p><math>\sin\theta = \frac{ Al + Bm + Cn }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}</math></p> 	<p>设有两直线:</p> <p>直线 <math>L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}</math></p> <p>直线 <math>L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}</math></p> <p>1. <math>L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}</math></p> <p>2. <math>L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0</math></p> <p>3. 直线 <math>L_1</math> 与 <math>L_2</math> 的夹角 <math>\theta</math>, 由下式确定</p> <p><math>\cos\theta = \frac{ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 }{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}</math></p>
<p>点 <math>M_0(x_0, y_0, z_0)</math> 到平面 <math>\pi: Ax + By + Cz + D = 0</math> 的距离为</p> <p><math>d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}</math></p>	<p>点 <math>M_0(x_0, y_0, z_0)</math> 到直线 <math>L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}</math> 的距离为</p> <p><math display="block">d = \frac{ \vec{M_1M_0} \times \vec{M_1P} }{ \vec{M_1P} } = \frac{\begin{vmatrix} i &amp; j &amp; k \\ x_0 - x_1 &amp; y_0 - y_1 &amp; z_0 - z_1 \\ l &amp; m &amp; n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}</math></p> 	

### 三、投影方程

**定义** 设  $\Gamma$  为一条空间曲线,  $\Pi$  是一张平面,  $\Gamma$  的每一个点在平面  $\Pi$  上均有一个垂足, 由这些垂足构成的曲线就称为  $\Gamma$  在平面  $\Pi$  上的投影. 经过  $\Gamma$  的每一点均有平面  $\Pi$  的一条垂线, 这些垂线, 构成一个柱面, 称为  $\Gamma$  到平面  $\Pi$  的投影柱面.

由以上定义可知,  $\Gamma$  在平面  $\Pi$  上的投影方程可由下列联立方程组表示

$$\begin{cases} \Gamma \text{ 在平面 } \Pi \text{ 上的投影柱面方程} \\ \text{平面 } \Pi \text{ 的方程} \end{cases}$$

$$\text{设空间曲线 } \Gamma: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

求  $\Gamma$  在  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$  平面上的投影方程.

(1) 先求  $\Gamma$  在  $xOy$  平面上的投影方程.

1° 从方程组 (4) 中消去  $z$ , 得到一个母线平行于  $z$  轴的柱面方程  $\varphi(x, y) = 0$

2° 将  $\varphi(x, y) = 0$  与  $z = 0$  联立, 即得  $\Gamma$  在  $xOy$  平面上的投影方程

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(2)  $\Gamma$  在  $xOz$  平面上投影方程为

$$\begin{cases} \psi(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \text{其中 } \psi(x, z) = 0 \text{ 为母线平行于 } y \text{ 轴的柱面方程.}$$

(3)  $\Gamma$  在  $yOz$  平面上的投影方程为

$$\begin{cases} w(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \text{其中 } w(y, z) = 0 \text{ 为母线平行于 } x \text{ 轴的柱面方程.}$$

**【例 9.10】** 设曲线方程为

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y + z^2 = 4z \\ x^2 - 8y + 3z^2 = 12z \end{cases}, \text{求它在三个坐标面上的投影方程.}$$

**【解】** 通过配方, 将上述方程组变形为

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y + (z - 2)^2 = 4 \\ x^2 - 8y + 3(z - 2)^2 = 12 \end{cases},$$

解之得

$$x^2 + 4y = 0,$$

于是, 曲线在  $xOy$  面上的投影方程为  $\begin{cases} x^2 + 4y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

类似地可求得曲线在  $xOz, yOz$  面上的投影方程分别为

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4z \\ y = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} z^2 - 4y = 4z \\ x = 0 \end{cases}.$$

**【例 9.11】** 求曲线  $\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases} \quad (a > 0)$  在各坐标面上的投影方程. ⑤

⑥

**【解】** 曲线在  $XY$  面上的投影方程为  $\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$

⑤ - ⑥, 得

$$z^2 + ax = a^2,$$

⑦

于是可知曲线在  $XZ$  面上的投影方程为  $\begin{cases} z^2 + ax = a^2, \\ y = 0. \end{cases}$

从式 ⑦ 中解出  $x = \frac{1}{a}(a^2 - z^2)$ , 代入式 ⑤, 得  $z^4 + a^2(y^2 - z^2) = 0$ ,

于是可得曲线在  $YZ$  面上的投影方程为  $\begin{cases} z^4 + a^2(y^2 - z^2) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

**【例 9.12】** 求直线  $L: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 + 8t \end{cases}$  在三个坐标面及平面  $\Pi: x - y + 3z + 8 = 0$  上的投影方程.

**【解】** 直线  $L$  在  $xOy, xOz, yOz$  坐标面上的投影方程分别为

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 0 \\ z = 5 + 8t \end{cases}, \begin{cases} x = 0, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 5 + 8t. \end{cases}$$

下面求直线  $L$  在平面  $\Pi: x - y + 3z + 8 = 0$  上的投影方程.

先求出通过直线  $L$  且垂直于平面  $\Pi$  的平面  $\Pi^*$  的方程, 此即直线  $L$  在平面  $\Pi$  上的投影柱面.



直线  $L$  的方向向量  $s = \{-1, 2, 8\}$ , 平面  $\Pi$  的法向量  $n = \{1, -1, 3\}$ , 设平面  $\Pi^*$  的法向量  $n^*$ , 由投影柱面的意义有

$$n^* = s \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \{14, 11, -1\},$$

又平面  $\Pi^*$  通过直线  $L$ , 可知直线  $L$  上的点  $P(3, -1, 5)$  在平面  $\Pi^*$  上, 于是该平面方程为

$$14(x-3) + 11(y+1) - (z-5) = 0,$$

即

$$14x + 11y - z - 26 = 0,$$

故所求  $L$  在  $\Pi$  上的投影方程为

$$\begin{cases} 14x + 11y - z - 26 = 0 \\ x - y + 3z + 8 = 0 \end{cases}.$$

## 四、曲面方程

### 1. 柱面方程

由平行于定直线并沿定曲线  $C$  移动的直线  $L$  描绘出的轨迹叫做柱面. 定曲线叫做柱面的准线, 动直线  $L$  叫做柱面的母线.

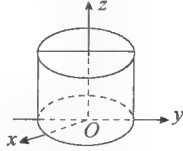
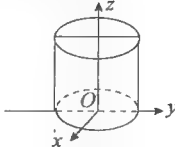
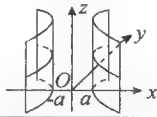
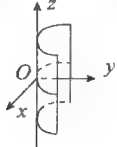
(1) 准线为  $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ , 母线 //  $z$  轴的柱面方程为  $f(x, y) = 0$ ,

准线为  $\Gamma: \begin{cases} \varphi(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , 母线 //  $y$  轴的柱面方程为  $\varphi(x, z) = 0$ ,

准线为  $\Gamma: \begin{cases} \psi(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ , 母线 //  $x$  轴的柱面方程为  $\psi(y, z) = 0$ .

常见的柱面方程见表 9-3.

表 9-3

名称	方程	图形
圆柱面	$x^2 + y^2 = R^2$	
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
抛物柱面	$x^2 = 2py, (p > 0)$	

(2) 准线为  $\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ , 母线的方向矢量为  $\{l, m, n\}$  的柱面方程的求法:

首先, 在准线上任取一点  $(x, y, z)$ , 则过点  $(x, y, z)$  的母线方程为

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n},$$

其中  $X, Y, Z$  为母线上任一点的流动坐标, 消去方程组

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ \frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n} \end{cases} \text{ 中的 } x, y, z \text{ 便得所求的柱面方程.}$$

【例 9.13】设准线方程为  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$  ⑧

母线的方向数为  $-1, 0, 1$ , 求这个柱面方程.

【解】柱面的母线方程可表示为  $\frac{X-x}{-1} = \frac{Y-y}{0} = \frac{Z-z}{1}$

令  $\frac{X-x}{-1} = \frac{Y-y}{0} = \frac{Z-z}{1} = t \Rightarrow x = X+t, y = Y, z = Z-t,$

将其代入准线方程 ⑧ 有  $\begin{cases} (X+t)^2 + Y^2 + (Z-t)^2 = 1, \\ 2(X+t)^2 + 2Y^2 + (Z-t)^2 = 2, \end{cases}$  ⑨

解之得  $(Z-t)^2 = 0$ , 即  $Z = t$ , 将其代入方程组 ⑨

可知所求柱面方程为  $(X+Z)^2 + Y^2 = 1$ .

【例 9.14】设准线方程为  $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$  ⑩

母线平行于直线  $x = y = z$ , 求该柱面方程.

【解】由题设可知母线的方向矢量  $s = \{1, 1, 1\}$ ,  $(x, y, z)$  为准线上任一点, 于是柱面的母线方程

可表示为  $\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{1} = \frac{Z-z}{1},$

或  $X = x+t, Y = y+t, Z = z+t$ , 代入准线方程 ⑩, 得

$$2Y - 2Z - 1 = 0,$$

这就是所求柱面方程, 该柱面为平行于  $X$  轴的平面.

(3) 设准线方程为参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad (a \leq t \leq b) \\ z = g(t) \end{cases}$

母线的方向数为  $l, m, n$  的柱面方程的求法.

首先设  $t = t_0 \in [a, b]$ , 可得准线上一点  $(\varphi(t_0), \psi(t_0), g(t_0))$ , 故母线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t_0) + lu \\ y = \psi(t_0) + mu. \quad (-\infty < u < +\infty, \text{其中 } u \text{ 为参数}) \\ z = g(t_0) + nu \end{cases} \quad \text{⑪}$$

其次, 当  $t_0$  在  $[a, b]$  上变化,  $u$  取所有的值时, 由式 ⑪ 所确定的点  $(x, y, z)$  就布满整个柱面, 故柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) + lu \\ y = \psi(t) + mu. \quad (a \leq t \leq b, -\infty \leq u \leq +\infty) \\ z = g(t) + nu \end{cases}$$

标准二次方程及其图形见表 9-4.

表 9-4

曲面名称	方 程	图 形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ( $a, b, c$ 均为正数)	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ( $a, b, c$ 均为正数)	
双叶双曲面	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ( $a, b, c$ 均为正数)	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ ( $a, b, p$ 均为正数)	
双曲抛物面 (又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ ( $a, b, p$ 均为正数)	
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ( $a, b, c$ 为正数)	

## 2. 旋转曲面方程

由一已知平面曲线  $L$  绕该平面上一定直线旋转而成的曲面叫做旋转曲面, 定直线叫做旋转曲面的轴, 曲线  $L$  叫做旋转面的母线.

设有平面曲线  $L: \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

(1) 曲线  $L$  绕  $x$  轴旋转所成的旋转曲面方程为:  $f(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ ;

(2) 曲线  $L$  绕  $y$  轴旋转所成的旋转曲面方程为:  $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$ .

(3) 空间曲线  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所成的旋转面方程:

1° 解出  $\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$ ;

2° 旋转面方程为:  $x^2 + y^2 = x^2(z) + y^2(z)$ .

**【例 9.15】** 求下列各平面曲线的旋转面方程:

(1)  $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  分别绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转.

(2) 求空间直线  $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转的旋转面方程.

**【解】** 平面曲线绕某轴旋转, 则该坐标所对应的变量不变.

(1) 绕  $x$  轴的旋转面方程  $x^2 + 4(y^2 + z^2) = 1$ ,

绕  $y$  轴的旋转面方程  $x^2 + z^2 + 4y^2 = 1$ .

(2) 解得  $x = \frac{1}{2}(5-z)$ ,  $y = \frac{3}{2}(1+z)$ , 旋转面方程为:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(5-z)^2 + \frac{9}{4}(1+z)^2, \text{ 即 } 4x^2 + 4y^2 - 10z^2 - 8z - 34 = 0.$$

**【例 9.16】** 求以原点为顶点且经过三坐标轴的正圆锥面方程.

**提示:** 准线为  $\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ , 顶点为  $A(x_0, y_0, z_0)$  的锥面方程的求法.

先设  $M(X, Y, Z)$  为锥面上任一点, 直线  $AM$  为锥面的母线, 它与准线  $\Gamma$  的交点为  $(x, y,$

$z)$ , 则母线方程为  $\frac{X-x_0}{x-x_0} = \frac{Y-y_0}{y-y_0} = \frac{Z-z_0}{z-z_0}$ ,

$$\text{从联立方程组} \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ \frac{Z-x_0}{x-x_0} = \frac{Y-y_0}{y-y_0} = \frac{Z-z_0}{z-z_0} \end{cases}$$

中消去  $x, y, z$ , 便得所求锥面方程为  $F(X, Y, Z) = 0$ .

**【解】** 以  $O(0, 0, 0)$  为顶点的锥面经过三坐标轴, 易知  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$  必在锥面上, 由  $A, B, C$  三点所确定的平面为

$$x + y + z = 1.$$

该平面与正圆锥面的交线是一个圆

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad (12)$$

这是锥面的准线, 设  $M(X, Y, Z)$  为锥面上任一点,  $(x, y, z)$  为母线  $OM$  与准线的交点, 故

母线方程为  $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$ ,

令  $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{1}{t}$ ,

则  $x = Xt, y = Yt, z = Zt$ , 代入式 (12) 得

$$\begin{cases} t^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = 1, \\ t(X + Y + Z) = 1. \end{cases}$$

消去参数  $t$ , 则得

$$XY + YZ + ZX = 0.$$

即  $-XY + YZ + ZX = 0, XY - YZ + ZX = 0, XY + YZ - ZX = 0$

这就是所求的锥面方程.

**【例 9.17】** 求直线  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\Pi: x-y+2z-1=0$  上的投影直线  $L_0$ , 并求

$L_0$  绕  $y$  轴旋转一周所得的曲面方程.

**【解】** 平面  $\Pi$  的法向量  $n = \{1, -1, 2\}$ , 直线  $L$  的方向向量  $s = \{1, 1, -1\}$ . 于是求直线  $L$  在平面  $\Pi$  上的投影平面方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } x-3y-2z+1=0.$$

于是  $L_0$  的方程为  $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$ , 消去  $z$  得  $x=2y$ .

$$\text{所以 } L_0 \text{ 的参数式 } \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=\frac{1}{2}(1-t) \end{cases}.$$

故所求旋转曲面方程为

$$x^2 + z^2 = (2t)^2 + \left[\frac{1}{2}(1-t)\right]^2 = (2y)^2 + \left[\frac{1}{2}(1-y)\right]^2,$$

即  $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$ .

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求平面方程

**提示** 最好依题意画草图, 以助分析.

若题设条件中有两个相交的平面(其方程为一般式方程), 则用平面束方程处理简便; 若题设条件中平面过某点, 则一般用点法式方程, 此时问题转化为求平面的法向量  $n$ .

**【例 9.18】** (1) 与两直线  $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$  及  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$  都平行, 且过原点的平面方程是 \_\_\_\_\_.

(2) 过点  $M(1, 2, -1)$  且与直线  $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$  垂直的平面方程是 \_\_\_\_\_.

(3) 已知两直线方程是  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$  和  $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ , 则过  $L_1$  且平行于  $L_2$  的平面方程是 \_\_\_\_\_.

**【解】** (1)  $s_1 = \{0, 1, 1\}, s_2 = \{1, 2, 1\}$ ,

由题意平面  $\Pi \parallel$  两直线, 则平面的法向量  $\mathbf{n}$  与该两直线的方向向量垂直, 于是可设

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

平面又过原点, 所以所求平面方程为

$$-x + y - z = 0, \text{ 即 } x - y + z = 0.$$

(2) 直线的方向向量为  $\mathbf{s} = \{-1, 3, 1\}$ , 因为直线垂直于所求平面, 于是可知平面的法向量  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{s}$ , 取  $\mathbf{s} = \{-1, 3, 1\}$  为平面的法向量, 故所求平面为

$$(-1)(x-1) + 3(y-2) + 1 \cdot (z+1) = 0,$$

即

$$x - 3y - z + 4 = 0.$$

(3) 直线  $L_1, L_2$  的方向向量分别为  $\mathbf{s}_1 = \{1, 0, -1\}, \mathbf{s}_2 = \{2, 1, 1\}$ , 因为平面过  $L_1$  且平行

于  $L_2$ , 所以平面的法向量:  $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$  为  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k},$

由于平面过  $L_1$ , 所以点  $M(1, 2, 3)$  在平面上, 故平面方程为

$$(x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0,$$

即

$$x - 3y + z + 2 = 0.$$

**【例 9.19】** 求过直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$  且垂直于平面  $3x + 2y - z - 5 = 0$  的平面方程.

**【解】** 直线的方向向量  $\mathbf{s} = \{2, -3, 2\}$ , 已知平面的法向量为  $\mathbf{n} = \{3, 2, -1\}$ , 设所求平面的法向量为  $\mathbf{n}^*$ , 由题意  $\mathbf{n}^* \perp \mathbf{n}$  且  $\mathbf{n}^* \perp \mathbf{s}$ , 故可令

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 13\mathbf{k},$$

于是所求平面方程为  $-(x-1) + 8(y+2) + 13(z-2) = 0.$

即

$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

**【例 9.20】** 求平行于平面  $6x + y + 6z + 5 = 0$ , 而与三坐标面所构成的四面体体积为一个单位的平面.

**【解】** 设所求平面为  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} |abc| = 1, & \text{①} \\ \frac{1}{a}/6 = \frac{1}{b}/1 = \frac{1}{c}/6 = t, & \text{②} \end{cases}$$

由方程 ② 可知  $a = \frac{1}{6t}, b = \frac{1}{t}, c = \frac{1}{6t}$ , 将其代入式 ①, 得  $t^3 = \frac{1}{6^3} \Rightarrow t = \frac{1}{6},$

$$\Rightarrow a = 1, b = 6, c = 1 \text{ 或 } a = -1, b = -6, c = -1,$$

故所求平面方程为  $x + \frac{1}{6}y + z = 1$  或  $x + \frac{1}{6}y + z = -1.$

**【例 9.21】** 求通过下列两平面  $\Pi_1: 2x + y - z - 2 = 0$  和  $\Pi_2: 3x - 2y - 2z + 1 = 0$  的交线, 且与

平面  $\Pi_3: 3x + 2y + 3z - 6 = 0$  垂直的平面方程.

【解】设所求平面为

$$\lambda(2x + y - z - 2) + \mu(3x - 2y - 2z + 1) = 0, \quad (3)$$

$$\text{即 } (2\lambda + 3\mu)x + (\lambda - 2\mu)y + (-\lambda - 2\mu)z + (-2\lambda + \mu) = 0,$$

由于该平面  $\perp$  平面  $\Pi_3$ , 所以它们的法向量一定互相垂直, 于是

$$3(2\lambda + 3\mu) + 2(\lambda - 2\mu) + 3(-\lambda - 2\mu) = 0, \Rightarrow 5\lambda - \mu = 0,$$

取  $\lambda = 1, \mu = 5$ , 代入 (3) 即得所求平面为

$$17x - 9y - 11z + 3 = 0.$$

### 题型二 求空间直线方程

**提示** 若题设条件中有一个已知点, 则一般考虑建立直线的参数方程简便. 求两直线的交点, 异面直线的距离等方面的问题, 通常也借助于直线参数方程之便.

【例 9.22】求过点  $(-1, -4, 3)$  并与下面两直线

$$L_1: \begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x + 3y = -5 \end{cases} \text{ 和 } L_2: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ 都垂直的直线方程.}$$

【解】设所求直线方程为  $\begin{cases} x = -1 + lt \\ y = -4 + mt \\ z = 3 + nt \end{cases}, s = \{l, m, n\},$

直线  $L_1$  与  $L_2$  的方向向量分别为  $s_1 = \{-3, 1, 10\}, s_2 = \{4, -1, 2\}$ ,

由题意有  $s \perp s_1, s \perp s_2$ , 故

$$\begin{cases} -3l + m + 10n = 0 \\ 4l - m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = -12n \\ m = -46n \end{cases}.$$

令  $n = 1$ , 则所求直线为

$$\begin{cases} x = -1 - 12t, \\ y = -4 - 46t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

【例 9.23】求过点  $(-1, 0, 4)$ , 平行于平面  $3x - 4y + z = 10$ , 且与直线  $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$  相交的直线方程.

【解】设所求的直线方程为  $\begin{cases} x = -1 + lt \\ y = mt \\ z = 4 + nt \end{cases}, s = \{l, m, n\},$

平面的法向量  $n = \{3, -4, 1\}$ , 由直线与平面平行, 所以

$$n \perp s \Leftrightarrow 3l - 4m + n = 0, \quad (4)$$

因为两直线相交, 故有  $lt = -3 + mt = \frac{4 + nt}{2}.$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m - l)t = 3 \\ (2l - n)t = 4 \end{cases} \Rightarrow 4m + 3n - 10l = 0, \quad (5)$$

解方程 ④, ⑤ 得  $l = \frac{4}{7}n, m = \frac{19}{28}n$ ,

令  $n = 28$ , 得  $l = 16, m = 19$ ,

故, 所求直线为 
$$\begin{cases} x = -1 + 16t, \\ y = 19t, \\ z = 4 + 28t. \end{cases}$$

【例 9.24】直线过点  $A(-3, 5, -9)$ , 且与两直线

$L_1: \begin{cases} y = 3x + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$  和  $L_2: \begin{cases} y = 4x - 7 \\ z = 5x + 10 \end{cases}$  相交, 求此直线方程.

【解】设所求直线方程  $L: \begin{cases} x = -3 + lt \\ y = 5 + mt \\ z = -9 + nt \end{cases}$ .

因为直线  $L$  与直线  $L_1, L_2$  相交

$$\text{所以 } \begin{cases} 5 + mt = -9 + 3lt + 5 \\ -9 + nt = -6 + 2lt - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m - 3l)t = -9 \\ n = 2l \end{cases} \quad \text{⑥}$$

$$\begin{cases} 5 + mt = -12 + 4lt - 7 \\ -9 + nt = -15 + 5lt + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m - 4l)t = -24 \\ (n - 5l)t = 4 \end{cases} \quad \text{⑦}$$

由方程组 ⑥ 与方程组 ⑦, 得  $n = 2l, m = 22l$ ,

令  $l = 1$ , 则  $m = 22, n = 2$ ,

故所求直线方程为 
$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + 22t \\ z = -9 + 2t \end{cases}$$

【例 9.25】判断两直线  $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$  和  $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

是否在同一平面上, 若在同一平面上, 则求交点; 若不在同一平面上, 则求两直线间的距离.

【解】直线  $L_1, L_2$  的方向矢量分别为  $s_1 = \{1, 1, 2\}, s_2 = \{1, 3, 4\}$ , 该两直线分别通过  $P(-1, 0, 1), Q(0, -1, 2)$   $\overrightarrow{PQ} = \{1, -1, 1\}$ ,

$$\text{因为 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 所以直线 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 为异面直线.}$$

直线  $L_1$  与  $L_2$  的参数方程分别为

$$L_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad L_2: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 3s \\ z = 2 + 4s \end{cases}$$

设两直线间的距离为  $d$ , 则

$$d = \sqrt{(s-t+1)^2 + (-1+3s-t)^2 + (1+4s-2t)^2},$$

令

$$h = (s-t+1)^2 + (-1+3s-t)^2 + (1+4s-2t)^2,$$

$$\begin{cases} h'_s = 52s - 24t + 4 = 0 \\ h'_t = -24s + 12t - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{7}{3}, s = 1,$$



由二元函数求极值的方法可知,当  $t = \frac{7}{3}, s = 1$  时的距离  $d$  最小,为  $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

### 第3节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 已知三向量共面,要想到它们的混合积为零,即它们的坐标分量所组成的行列式为零.

**【例 9.26】**判断下列两直线  $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{4}$  和  $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$

是否在同一平面内,若是,则求两直线的交点;若不是,则试求它们的最短距离.

**【解】**直线  $L_1$  与  $L_2$  的方向向量分别为  $s_1 = \{2, 3, 4\}, s_2 = \{1, 1, 2\}$ , 并且它们分别过点  $P(0, -3, 0), Q(1, -2, 2), \overrightarrow{PQ} = \{1, 1, 2\}$ . 直线  $L_1$  与  $L_2$  共面  $\Leftrightarrow$  向量  $s_1, s_2, \overrightarrow{PQ}$  共面,即混合积  $= 0$ , 因为

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{故直线 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 共面.}$$

下面求直线  $L_1$  与  $L_2$  的交点,

$$\text{为此令 } \frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{4} = t, \quad \text{①}$$

即  $x = 2t, y = -3 + 3t, z = 4t$ , 代入  $L_2$  中,得

$$\frac{2t-1}{1} = \frac{(-3+3t)+2}{1} = \frac{4t-2}{2}.$$

$\Rightarrow t = 0$ , 代回 ①, 可得  $x = 0, y = -3, z = 0$ ,

故  $(0, -3, 0)$  为直线  $L_1$  与  $L_2$  的交点.

#### 二、综合题解析

**【例 9.27】**设二元函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^6}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ , 求

(1) 使方向导数  $\left. \frac{df}{d\mathbf{r}} \right|_{(0,0)} \neq 0$  [方向  $\mathbf{r} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}, \alpha \in [0, 2\pi)$ ] 的最大  $\alpha$  值 (记为  $\alpha_0$ );

(2) 过点  $M(2, -1, 3)$ , 与直线  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$  相交, 且与平面  $\Pi_1: 3x - 2y + z + 5 = 0$  的夹角为  $\alpha_0$  的直线  $L$  的方向向量.

**【分析】**(1) 利用方向导数的定义, 计算  $\left. \frac{df}{d\mathbf{r}} \right|_{(0,0)}$  (它是  $\alpha$  的函数), 由此确定使  $\left. \frac{df}{d\mathbf{r}} \right|_{(0,0)} \neq 0$  的最大  $\alpha$  值  $\alpha_0$ .

(2) 设  $L$  的方向向量为  $s = \{l, m, n\}$ , 则利用  $L$  的三个条件[过  $M(2, -1, 3)$ , 与  $L_1$  相交及与  $\Pi_1$  的夹角为  $\alpha_0$ ] 确定  $s$ .

**【解】**(1) 由于  $f(x, y)$  是非初等函数, 所以利用定义计算方向导数  $\left. \frac{df}{d\Gamma} \right|_{(0,0)}$ .

由于在方向  $\Gamma = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$  上,  $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$ , 所以对  $\alpha \in [0, 2\pi)$  有

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{d\Gamma} \right|_{(0,0)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) - f(0,0)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 \cos^5 \alpha}{(r\sin\alpha - r^2 \cos^2 \alpha)^2 + r^6 \cos^6 \alpha} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^5 \alpha}{(\sin\alpha - r \cos^2 \alpha)^2 + r^4 \cos^6 \alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ -1, & \alpha = \pi. \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

因此使  $\left. \frac{df}{d\Gamma} \right|_{(0,0)} \neq 0$  的最大  $\alpha$  值  $\alpha_0 = \pi$ .

(2) 设  $L$  的方向向量为  $s = \{l, m, n\}$ , 则由  $L$  过点  $M(2, -1, 3)$  及与直线  $L_1$  相交知, 向量  $\overrightarrow{M_0M}, s_1, s$  共面[其中,  $M_0 = (1, 0, -2)$  是  $L_1$  上的点,  $s_1 = \{1, -1, 1\}$  是  $L_1$  的方向向量], 于是有

$$[\overrightarrow{M_0M}, s_1, s] = 0,$$

$$\text{即 } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \text{ 由此得 } l, m, n \text{ 满足 } l + m = 0. \quad (2)$$

此外, 由于  $L$  与平面  $\Pi$  的夹角为  $\alpha_0 = \pi$ , 即  $L$  与平面  $\Pi_1$  平行, 或者说  $L$  与  $\Pi_1$  的法向量  $n = \{3, -2, 1\}$  垂直, 所以  $l, m, n$  满足

$$s \cdot n = 0, \text{ 即 } 3l - 2m + n = 0. \quad (3)$$

由式 (2) 和式 (3) 得,  $l = -\frac{1}{5}n, m = \frac{1}{5}n$ . 所以  $L$  的方向向量  $s = \left\{ -\frac{1}{5}n, \frac{1}{5}n, n \right\}$  ( $n$  是不为 0 的实数).

### 习 题 九

1. 设有两个矢量  $a, b$ , 试比较  $|a+b|$  与  $|a-b|$  的大小.

2. 化简下列各式:

$$(1) (a+b+c) \times c + (a+b+c) \times b - (b-c) \times a;$$

$$(2) (a+2b-c) \cdot [(a-b) \times (a-b-c)];$$

$$(3) [(a+b) \times (b+c) \cdot (c+a)].$$

3. 已知  $|a| = 2, |b| = 5, (a, b) = \frac{2}{3}\pi$ , 问: 系数  $\lambda$  为何值时, 向量  $A = \lambda a + 17b$  与  $B = 3a - b$  垂直.

4. 求同时垂直于矢量  $a = 2i + 2j + k$  和  $b = 4i + 5j + 3k$  的单位矢量.

5. 若  $a = 4m - n, b = m + 2n, c = 2m - 3n$ , 式中  $|m| = 2, |n| = 1$ , 又  $(m, n) = \frac{\pi}{2}$ , 化简表达式  $a \cdot c + 3a \cdot b - 2b \cdot c + 1$ .

6. 求平行四边形的面积, 若已知其对角线为矢量  $c = m + 2n$  及  $a = 3m - 4n$ , 而  $|m| = 1, |n| = 2, (m, n) = \frac{\pi}{6}$ .
7. 设  $A = 2a + b, B = ka + b$ , 其中  $|a| = 1, |b| = 2$ , 且  $a \perp b$ ,  
问: (1)  $k$  为何值时,  $A \perp B$ ;  
(2)  $k$  为何值时, 以  $A$  与  $B$  为邻边的平行四边形面积为 6.
8. 求通过三平面:  $2x + y - z - 2 = 0, x - 2y + z + 1 = 0$  和  $x + y + z - 3 = 0$  的交点, 且平行于平面  $x + y + 2z = 0$  的平面方程.
9. 过平面  $x + 28y - 2z + 17 = 0$  和平面  $5x + 8y - z + 1 = 0$  的交线, 作球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的切平面, 求切平面方程.
10. 设  $L_1, L_2$  为两条共面直线,  $L_1$  的方程为  $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$ ,  $L_2$  通过点  $(2, -3, -1)$ , 且与  $x$  轴正向夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 与  $z$  轴正向夹角为锐角, 求  $L_2$  的方程.
11. 求直线  $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 7x + 2 \end{cases}$  之间的垂直距离.
12. 已知直线  $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + d = 0 \end{cases}$  与  $z$  轴相交, 求  $d$  值.
13. 在平面  $x + y + z + 1 = 0$  内, 求作一直线, 使它通过直线  $\begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$  与平面的交点, 且与已知直线垂直.
14. 决定  $\lambda$ , 使直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$  与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  相交.
15. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = z \end{cases}$  在各坐标平面上的投影方程.
16. 求准线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \\ x^2 = y^2 + z^2, \end{cases}$  母线平行于  $z$  轴的柱面方程.
17. 求直线  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$  在平面  $x + y + z = 0$  上的投影方程.
18. 求通过两曲面  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$  和  $x^2 = y^2 + z^2$  的交线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面方程.

### 参 考 答 案

1.  $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$  时,  $|a + b| > |a - b|$ ;

$a, b = \frac{\pi}{2}$  时,  $|a + b| = |a - b|$ ;

$a, b > \frac{\pi}{2}$  时,  $|a + b| < |a - b|$ .

2. (1)  $2(a \times b)$ ; (2)  $3a \cdot (b \times c)$ ; (3)  $2(a \times b) \cdot c$ .

3.  $\lambda = 40$ .

4.  $\pm \frac{1}{3}(i - 2j + 2k)$ .

5. 74.      6. 5.      7. (1)  $k = -2$ , (2)  $k = -1$  或  $k = 5$ .

8.  $x + y + 2z - 4 = 0$ .

9.  $387x - 164y - 24z - 421 = 0$  及  $3x - 4y - 5 = 0$ .

10.  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{\sqrt{6}} = \frac{z+1}{\sqrt{6}}$ .

11.  $\frac{3\sqrt{35}}{7}$ .      12.  $d = 3$ .      13.  $\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$       14.  $\lambda = \frac{5}{4}$ .

15.  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z = y, \\ x = 0. \end{cases} \quad (|y| \leq \sqrt{2}).$

16.  $5x^2 - 3y^2 = 1$ .      17.  $\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

18.  $5x^2 - 3y^2 = 1$ , 双曲柱面.

## 第十章 多元函数微分学

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、二元函数的定义

设有三个变量  $x, y, z$ , 如果对于变量  $x, y$  的变化范围内每一对数值, 按照一定的法则, 变量  $z$  总有一个确定的数值与之对应, 则称变量  $z$  是变量  $x, y$  的二元函数, 记为

$$z = f(x, y).$$

和一元函数一样, 二元和二元以上的函数也只与定义域和对应关系有关, 而与用什么字母表示自变量与因变量无关.

**【例 10.1】** 设  $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ , 求  $f(x, y)$ .

**【解】** 令  $u = x + y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$ , 则

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v},$$

$$\text{故 } f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} \quad (y \neq -1).$$

一般讲, 二元函数的定义域是平面上的一个区域, 常用图形表示出来; 二元函数  $z = f(x, y)$  的图形是三维空间中的一张曲面.

**【提示】** 求较复杂点的多元函数的定义域也和一元函数一样, 先写出构成部分的各简单函数的定义域, 再解联立不等式组即得所求定义域.

**【例 10.2】** 求  $z = \arcsin(2x) + \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$  的定义域.

**【解】** 对  $\arcsin(2x)$ ,  $D_f: |2x| \leq 1$ ,

对  $\sqrt{4x - y^2}$ ,  $D_f: 4x - y^2 \geq 0$ ,

对  $\frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ ,  $D_f: 1 - x^2 - y^2 > 0$ , 且  $1 - x^2 - y^2 \neq 1$ .

故, 所求函数的定义域为 (如图 10-1 所示)

$$\begin{cases} |2x| \leq 1 \\ 4x - y^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y^2 \leq 4x \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases},$$

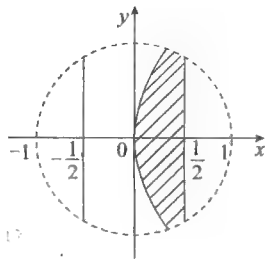


图 10-1

## 二、二元函数的极限及连续性

### 1. 二元函数的极限

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \text{ 时,}$

恒有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ .

二元函数的极限要求点  $Q(x, y)$  以任何方式、任何方向、任何路径趋向  $P(x_0, y_0)$  时, 均有

$$f(x, y) \rightarrow A (x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0).$$

倘若沿两条不同的路径,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$  不相等, 则可判断  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$  不存在, 这是证明多元

函数极限不存在的有效方法.

**【例 10.3】** 求  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ .

**【解】** 因为当  $(x, y)$  沿  $x = y$  的路径趋于无穷时,  $\left| \frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y} \right| = \left| \frac{\sqrt{|x|}}{5x} \right| = \frac{1}{5\sqrt{|x|}}$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5\sqrt{|x|}} = 0, \text{ 所以 } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y=x}} \frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y} = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{|x|}}{2}}} \frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}} = 1,$$

故  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$  不存在.

**【例 10.4】** 求极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y}$ .

**【解】**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^3-x}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(x^3-x) + x(x^3-x)^4 + x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 - x^4 + o(x^4)}{x^3} = -1,$$

$$\text{又 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^5 + x^3}{2x} = 0,$$

故  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x+y}$  不存在.

### 2. 二元函数连续性的定义

**定义 1** 设函数  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 分别给自变量  $x, y$  在  $x_0, y_0$  处以增量  $\Delta x, \Delta y$ , 得全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

如果极限  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ , 则称  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  处连续.

**定义 2** 如果二元函数  $z = f(x, y)$  满足如下条件:

(1)  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  点的某邻域内有定义;

(2)  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$  存在;

(3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

则称函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  连续.

### 三、偏导数、全导数及全微分

#### 1. 偏导数的定义

设  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 给自变量  $x$  以增量  $\Delta x$ , 而  $y$  保持不变 (即  $y = y_0$ ), 相应地得到函数关于  $x$  的偏增量

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

存在, 则该极限值就称为  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  处对变量  $x$  的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \text{ 或 } f'_x(x_0, y_0),$$

即

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

同样可定义

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

**注** 在分界点处的偏导数, 用偏导数定义求.

**【例 10.5】** 设  $z = f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ , 求  $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ .

**【解】**  $f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$ . 同理有  $f'_y(0, 0) = 0$ .

#### 2. 全导数的定义

设  $z = f(u, v, w), u = \varphi(t), v = \psi(t), w = g(t)$  且  $f, \varphi, \psi, g$  均可导, 则

$z = f[\varphi(t), \psi(t), g(t)]$  是关于  $t$  的一元函数, 也可导, 且有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt} \quad \text{—— 称为 } z \text{ 对 } t \text{ 的全导数.}$$

#### 3. 全微分的定义

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 给  $x, y$  在  $x_0, y_0$  处分别以增量  $\Delta x, \Delta y$ , 相应地得到函数的全增量  $\Delta z$ , 若其可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中,  $A, B$  与  $\Delta x, \Delta y$  无关;  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ;  $o(\rho)$  为  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  时  $\rho$  的高阶无穷小, 则称函数  $f(x, y)$  在  $P(x_0, y_0)$  处可微;  $A\Delta x + B\Delta y$  称为  $f(x, y)$  在  $P(x_0, y_0)$  处的全微分, 记为

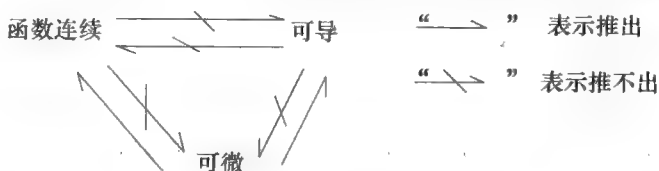
$$dz \Big|_{x_0, y_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y.$$

当  $z = f(x, y)$  在  $P(x, y)$  可微时,  $A = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), B = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ ,

于是 
$$dz \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} dy.$$

一般地 
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

二元函数  $z = f(x, y)$  连续, 可导(两个偏导数存在) 与可微三者的关系如下:



**【例 10.6】** 求由方程  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  所确定函数  $z = z(x, y)$  在点  $(1, 0, -1)$  处的全微分.

**【解】**  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  的两边分别对  $x, y$  求偏导数, 并解出  $z'_x, z'_y$ , 得

$$z'_x \Big|_{(1, 0, -1)} = -\frac{x + yz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{xy \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z} \Big|_{(1, 0, -1)} = 1,$$

$$z'_y \Big|_{(1, 0, -1)} = -\frac{y + xz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{xy \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z} \Big|_{(1, 0, -1)} = -\sqrt{2},$$

故

$$dz \Big|_{(1, 0, -1)} = dx - \sqrt{2} dy.$$

#### 四、基本定理

**定理 1** (可微与偏导数存在的关系定理) 若  $z = f(x, y)$  在  $P(x, y)$  点处可微, 则在该点处  $\frac{\partial z}{\partial x}$

及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  必存在, 且有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**定理 2** (偏导数存在与可微的关系定理) 若  $z = f(x, y)$  的两个偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  在  $P(x, y)$  点的

某邻域内存在, 并且在  $P(x, y)$  点处连续, 则  $z = f(x, y)$  在  $P(x, y)$  点处可微.

**定理 3** (求偏导数与次序无关的定理) 若  $z = f(x, y)$  的两个混合偏导数  $f''_{xy}(x, y)$  及  $f''_{yx}(x, y)$  在区域  $D$  内连续, 则有

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

**【例 10.7】** 二元函数  $z = f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处可微的充分条件是

(A)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

(B)  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某邻域存在.

(C)  $\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ , 当  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$  时, 是无穷小量.

(D)  $\frac{\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ , 当  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$  时, 是无穷小量.

【 】



【解】检查对照以上定理以及全微分的定义,可知应该选(D).

【例 10.8】设  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ,

则在原点(0,0)处  $f(x, y)$

(A) 偏导数不存在.

(B) 不可微.

(C) 偏导数存在且连续.

(D) 可微.

【 】

$$\begin{aligned} \text{【解】 } f'_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} = 0; \end{aligned}$$

同理  $f'_y(0, 0) = 0$ .

若(C)正确,则(D)一定正确,又因为该题是单选题.

所以(A),(C)不入选.

因为  $\Delta z = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \alpha$ , 且知  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ,

所以  $\alpha = \Delta z = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,

$$\text{因为 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\alpha}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0.$$

所以函数  $f(x, y)$  在点(0,0)处可微,而(D)入选.

【注】用全微分定义验证一个可导函数的可微性只需检验

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\rho} \neq 0. \text{ 若 } = 0, \text{ 则可微.}$$

【例 10.9】设  $\varphi(x)$  为任意一个  $x$  的可微函数,  $\psi(y)$  为任意一个  $y$  的可微函数,若已知  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \neq$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , 则  $F(x, y)$  是

(A)  $f(x, y) + \varphi(x)$ .

(B)  $f(x, y) + \psi(y)$ .

(C)  $f(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$ .

(D)  $f(x, y) + \varphi(x)\psi(y)$ .

【 】

【解】若  $F(x, y) = f(x, y) + \varphi(x)$ , 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi'(x), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi'(x)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

可知(A)不入选. 同理可验证(B),(C)也不入选. 故(D)入选.

【例 10.10】已知  $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$  为某一函数  $f(x, y)$  的全微分, 则  $a$  和  $b$  的值分别是

(A) -2 和 2.

(B) 2 和 -2.

(C) -3 和 3.

(D) 3 和 -3.

【 】

【解】由题设有

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy,$$

即

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= axy^3 - y^2 \cos x, \\f'_y(x, y) &= 1 + by \sin x + 3x^2 y^2, \\f''_{xy}(x, y) &= 3axy^2 - 2y \cos x, \\f''_{yx}(x, y) &= by \cos x + 6xy^2.\end{aligned}$$

由  $f''_{xy}(x, y)$  与  $f''_{yx}(x, y)$  的表达式可知它们均为连续函数, 由定理 3 可知

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y),$$

即

$$3axy^2 - 2y \cos x = by \cos x + 6xy^2,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{故(B) 入选.}$$

**【例 10.11】** 设函数  $z = f(x, y)$ , 有  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ , 且  $f(x, 0) = 1, f'_y(x, 0) = x$ , 则  $f(x, y)$  为

(A)  $1 - xy + y^2$ .

(B)  $1 + xy + y^2$ .

(C)  $1 - x^2 y + y^2$ .

(D)  $1 + x^2 y + y^2$ .

【    】

**【解】**  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$  的两边对  $y$  积分, 得  $f'_y(x, y) = 2y + \varphi(x)$ .

将  $f'_y(x, 0) = x$  代入上式, 得  $\varphi(x) = x$ , 于是  $f'_y(x, y) = 2y + x$ ,

该式两边再对  $y$  积分, 得  $f(x, y) = y^2 + xy + \psi(x)$ ,

将  $f(x, 0) = 1$  代入上式, 得  $\psi(x) = 1$ . 故  $f(x, y) = y^2 + xy + 1$ , 可见(B) 入选.

**【例 10.12】** 设  $z = x^{y^2}$ , 结论正确的是

(A)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} > 0$ .

(B)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} < 0$ .

(C)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \neq 0$ .

(D)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$ .

【    】

**【解】**  $z = e^{y^2 \ln x}$ , 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{y^2 \ln x} \cdot \frac{y^2}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y}{x} x^{y^2} (1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{y^2 \ln x} 2y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2y}{x} x^{y^2} (1 + y^2 \ln x);$$

故  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$ . 可见(D) 入选.

## 五、多元函数的极值

**定义 1** 设函数  $z = f(x, y)$  在  $P(x_0, y_0)$  点的某邻域内有定义, 如果对于该邻域内异于  $P(x_0, y_0)$  点的任一点  $Q(x, y)$ , 恒有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) < f(x_0, y_0)),$$

则称  $f(x_0, y_0)$  为  $f(x, y)$  的极小值(或极大值), 极大值与极小值统称极值. 使函数  $z = f(x, y)$  取极值的自变量  $x, y$  的值, 称为  $f(x, y)$  的极值点.

**定义 2** 方程组  $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$  的解, 称为函数  $z = f(x, y)$  的驻点.

**注**  $P(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的驻点  $\nRightarrow P(x_0, y_0)$  为  $f(x, y)$  的极值点.

**定理 1** (取极值的必要条件) 设  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的一阶偏导数存在, 且  $P(x_0, y_0)$  是  $z = f(x, y)$  的极值点, 则

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

**定理 2** (函数取极值的充分条件) 设  $z = f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0, \\ [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 - f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) < 0. \end{aligned}$$

则  $P(x_0, y_0)$  是  $z = f(x, y)$  的一个极值点.

1° 若  $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$  (或  $f''_{y^2}(x_0, y_0) > 0$ ), 则  $P(x_0, y_0)$  为极小值点.

2° 若  $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$  (或  $f''_{y^2}(x_0, y_0) < 0$ ), 则  $P(x_0, y_0)$  为极大值点.

## 六、条件极值与无条件极值

无条件极值问题  $\triangleq$  函数中的自变量只受定义域约束的极值问题.

条件极值问题  $\triangleq$  函数中的自变量除受定义域约束外, 还受其他条件限制的极值问题.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 简单显函数 $u = f(x, y, z)$ 的微分法

**提示** 求偏导数的方法很简单, 在求  $f'_x(x, y, z)$  时, 将  $y, z$  当做常数, 利用一元函数的求导公式和导数的运算法则即可求得, 求  $f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$  类似.

符号  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z)$ , 表示先对  $x$  求偏导, ( $y, z$  暂时当常数), 然后再对  $y$  求偏导 (此

时  $x, z$  当常数), 符号  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = f'''_{x^2 z}(x, y, z), \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = f'''_{yz^2}(x, y, z), \dots$  类似.

**【例 10.13】** 设  $u = x^{y^z}$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ .

**【解】**  $u = x^{y^z}, \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{y^z \ln x}) = e^{y^z \ln x} \cdot zy^{z-1} \ln x = zy^{z-1} x^{y^z} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(e^{y^z \ln x}) = e^{y^z \ln x} \cdot y^z \ln y \cdot \ln x = y^z \ln x \cdot \ln y x^{y^z}.$$

**【例 10.14】** 设  $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**【解】**  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{|y|}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{|y|}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{|y|}{x^2 + y^2} \right) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & y > 0 \\ -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & y < 0 \end{cases}$$

## 题型二 复合函数微分法

**提示** (1) 设  $u = \varphi(x, y)$ ,  $u = \psi(x, y)$ ,  $\omega = g(x, y)$  在点  $(x, y)$  处有连续偏导数, 而  $z = f(u, v, \omega)$  在相应点  $(u, v, \omega)$  有连续偏导数, 则复合函数  $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y), g(x, y)]$  在点  $(x, y)$  处有连续偏导数, 且

$$(A): \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{cases}$$

(2) 设  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \psi(x)$  在点  $x$  处可导,  $z = f(u, v)$  在相应点  $(u, v)$  处有连续偏导数, 则复合函数  $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$  在点  $x$  处可导, 且

$$(B): \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

(3) 设  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$  在点  $(x, y)$  处有连续的偏导数, 而  $z = f(x, u, v)$  在相应点  $(x, u, v)$  处有连续偏导数, 则

$$(C): \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

公式(A) ~ (C) 不必刻意去记, 但要彻底理解, 注意以下几点有助于理解并写出上述公式, 并在解题中自如地应用.

① 用图示法表示出函数的复合关系. 公式(A), (B), (C) 的图示分别如图 10-2(a), (b) 和 (c) 所示.

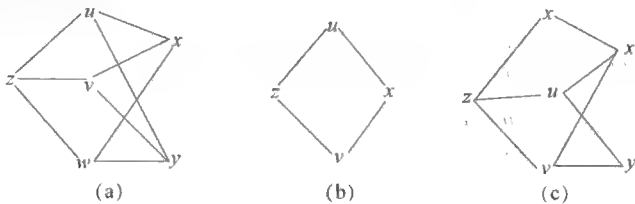


图 10-2

② 函数对某自变量的偏导数的结构:

① 项数 = 中间变量的个数.

② 每一项 = 函数对中间变量的偏导数  $\times$  该中间变量对其指定自变量的偏导数.

③ 一般而言, 函数  $z$  对中间变量  $u, v, \omega$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial \omega}$  仍然是以  $u, v, \omega$  为中间变量,  $x, y$  为自变量的复合函数, 对它们求偏导数时须重复使用复合函数求导法.

对抽象函数在求偏导数时, 一定要设中间变量. 例如:

$$z = f(e^x \sin y, x^2 - y^2), \text{ 令 } u = e^x \sin y, v = x^2 - y^2.$$

一般来讲, 抽象函数的高阶偏导数采用如下记号较为简便, 且不易出差错. 记号  $f'_1, f'_2, f'_3$  分别表示函数  $f$  对第一, 第二, 第三中间变量求偏导. 类似地, 记号  $f''_{12}, f''_{23}, f''_{31}$  分别表示  $f$  对第一、二中间变量的二阶偏导, 第二、三中间变量的二阶偏导, 第三、一中间变量的二

阶偏导.

【10.15】设  $f(x, y, z)$  是  $k$  次齐次函数, 即  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ ,  $\lambda$  为某一常数, 则结论正确的是

$$(A) x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k^\lambda f(x, y, z).$$

$$(B) x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda^k f(x, y, z).$$

$$(C) x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f(x, y, z).$$

$$(D) x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = f(x, y, z).$$

【 】

【解】令  $u = tx, v = ty, w = tz$ , 则

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z) \Rightarrow f(u, v, w) = t^k f(x, y, z),$$

上述两边对  $t$  求导, 得

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = k t^{k-1} f(x, y, z)$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} + z \frac{\partial f}{\partial w} = k t^{k-1} f(x, y, z).$$

$$\Rightarrow tx \frac{\partial f}{\partial u} + ty \frac{\partial f}{\partial v} + tz \frac{\partial f}{\partial w} = k t^k f(x, y, z) = k f(u, v, w)$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} + w \frac{\partial f}{\partial w} = k f(u, v, w),$$

故

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f(x, y, z), \text{ 即 (C) 入选.}$$

【例 10.16】设  $z = \frac{1}{x} f(xy) + y f(x+y)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

【解】令  $xy = u, x+y = v$ ,

$$\text{则} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f(u) + \frac{1}{x} f'(u) \cdot y + y f'(v) \cdot 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{1}{x^2} f(u) + \frac{y}{x} f'(u) + y f'(v) \right]$$

$$= -\frac{1}{x^2} f'(u) \cdot x + \frac{1}{x} f'(u) + \frac{y}{x} f''(u) \cdot x + f'(v) + y f''(v) \cdot 1$$

$$= y f''(u) + f'(v) + y f''(v).$$

【例 10.17】设  $z = f(2x-y) + g(x, xy)$ , 其中  $f(t)$  二阶可导,  $g(u, v)$  具有连续的二阶偏导数,

求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

$$\text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2f'(t) + g'_u + y g'_v,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2f'(t) + g'_u + y g'_v) = -2f''(t) + x g''_{uv} + g'_v + x y g''_{v^2}.$$

【例 10.18】设  $z = f(2x-y, y \sin x)$ , 其中  $f$  具有连续的二阶偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

【解】令  $u = 2x - y, v = y \sin x$ , 则  $z = f(u, v)$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + y \cos x \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial f}{\partial u} + y \cos x \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \cos x \frac{\partial f}{\partial v} + y \cos x \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2 \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \sin x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) + \cos x \frac{\partial f}{\partial v} + y \cos x \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \sin x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \\ &= -2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2 \sin x - y \cos x) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} y \sin 2x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \cos x \frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

【例 10.19】设  $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$ . 其中,  $f, \varphi$  都具有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0, \text{求 } \frac{du}{dx}.$$

【解】

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$\varphi(x^2, e^y, z) = 0$  的两边对  $x$  求偏导, 得

$$\varphi'_1 \cdot 2x + \varphi'_2 \cdot e^y \cdot \cos x + \varphi'_3 \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{2x\varphi'_1 + e^y \cos x \varphi'_2}{\varphi'_3},$$

故

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \cos x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2x\varphi'_1 + e^y \cos x \varphi'_2}{\varphi'_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}.$$

【例 10.20】设  $\omega = f(t), t = \varphi(xy, x^2 + y^2)$ , 其中  $f, \varphi$  具有连续的二阶导数及

偏导数, 求  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ .

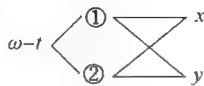


图 10-3

【解】如图 10-3 所示中, 令 ① 代表  $xy$ , ② 代表  $(x^2 + y^2)$ ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) (\varphi'_1 \cdot y + \varphi'_2 \cdot 2x),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [f'(t) (y\varphi'_1 + 2x\varphi'_2)]$$

$$= f''(t) \frac{\partial t}{\partial x} (y\varphi'_1 + 2x\varphi'_2) + f'(t) \frac{\partial}{\partial x} (y\varphi'_1 + 2x\varphi'_2)$$

$$= f''(t) (y\varphi'_1 + 2x\varphi'_2)^2 + f'(t) [y(\varphi''_{11} \cdot y + \varphi''_{12} \cdot 2x) + 2\varphi'_2 + 2x(\varphi''_{21} \cdot y + \varphi''_{22} \cdot 2x)]$$

$$= f''(t) (y\varphi'_1 + 2x\varphi'_2)^2 + f'(t) [y^2 \varphi''_{11} + 4xy \varphi''_{12} + 4x^2 \varphi''_{22} + 2\varphi'_2]$$

【例 10.21】已知函数  $u = u(x, y)$  存在二阶连续偏导数满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

(1) 试选择参数  $\alpha, \beta$ , 利用变换  $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x + \beta y}$  将原方程变形, 使新方程中不出现一阶偏导数项.

(2) 再令  $\xi = x + y, \eta = x - y$ , 使新方程变换形式.

$$\text{【解】} (1) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} e^{\alpha x + \beta y} + \alpha v e^{\alpha x + \beta y} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha v \right) e^{\alpha x + \beta y}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) e^{\alpha x + \beta y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha v \right) \alpha e^{\alpha x + \beta y} \\ &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 v \right) e^{\alpha x + \beta y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \beta v \right) e^{\alpha x + \beta y}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\beta \frac{\partial v}{\partial y} + \beta^2 v \right) e^{\alpha x + \beta y}. \quad (5)$$

将 ②, ③, ④, ⑤ 代入 ① 并消去  $e^{\alpha x + \beta y}$ , 得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (2\alpha + a) \frac{\partial v}{\partial x} + (-2\beta + a) \frac{\partial v}{\partial y} + (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + a\beta)v = 0,$$

由题意可知, 应令  $2\alpha + a = 0, -2\beta + a = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{a}{2}$ ,

$$\text{故原方程} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

(2) 令  $\xi = x + y, \eta = x - y$ , 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\text{代入 ⑥, 得} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

### 题型三 隐函数微分法

**提示** (1) 由方程  $F(x, y) = 0$  确定隐函数  $y = y(x)$ , 则

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad (F'_y(x, y) \neq 0).$$

(2) 由方程  $F(x, y, z) = 0$  确定隐函数  $z = z(x, y)$ , 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

(3) 由三个变量两个方程所构成的方程组, 一般是其中两个变量确定为第三个变量的一元函数. 例如

$$\text{方程组} \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{确定隐函数 } y = y(x), z = z(x),$$

$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$  的求法可通过解关于  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$  的线性方程组来完成. 即

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 \\ G'_x + G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = -F'_x \\ G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = -G'_x \end{cases},$$

上式中将  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$  当做未知量用克莱姆法则求解.

(4) 由四个变量两个方程所构成的方程组,一般是其中两个变量确定为另两个变量的二元函数.例如

方程组  $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$  确定隐函数  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  也可

通过解关于  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  的线性方程组来完成

$$\begin{cases} F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G'_x + G'_u \frac{\partial u}{\partial x} + G'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_u \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \frac{\partial v}{\partial x} = -F'_x \\ G'_u \frac{\partial u}{\partial x} + G'_v \frac{\partial v}{\partial x} = -G'_x \end{cases}$$

用克莱姆法则求解,同理可求出  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

**【例 10.22】** 设  $y = f(x, t)$ , 而  $t$  是由方程  $F(x, y, t) = 0$  所确定的  $x, y$  的函数, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**【解】**  $\begin{cases} y = f(x, t) \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$  确定  $y, t$  为  $x$  的一元函数.

两个方程的两边分别对  $x$  求偏导, 得

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f'_x(x, t) + f'_t(x, t) \frac{dt}{dx}, \\ F'_x(x, y, t) \cdot 1 + F'_y(x, y, t) \frac{dy}{dx} + F'_t(x, y, t) \frac{dt}{dx} = 0. \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} - f'_t \frac{dt}{dx} = f'_x(x, t), \\ F'_y \frac{dy}{dx} + F'_t \frac{dt}{dx} = -F'_x, \end{cases} \\ & \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & -f'_t \\ -F'_x & F'_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -f'_t \\ F'_y & F'_t \end{vmatrix}} = \frac{F'_t \cdot f'_x - F'_x \cdot f'_t}{F'_t + F'_y \cdot f'_t}. \end{aligned}$$

**【例 10.23】** 设  $\begin{cases} x = -u^2 + v + z \\ y = u + vz \end{cases}$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$ .

**【解】** 所给的方程组中含有五个变量  $x, y, z, u, v$ , 从所求的结果中明显看出  $u, v$  是因变量,  $x, z$  是自变量,  $y$  究竟是因变量, 还是自变量呢? 在这种所求偏导是一阶, 而又有一变量的属性不太明确的情况下, 用全微分形式不变性来处理比较简便.

对  $\begin{cases} x = -u^2 + v + z \\ y = u + vz \end{cases}$  的两边求全微分, 得

$$\begin{aligned} & \begin{cases} dx = -2udu + dv + dz, \\ dy = du + zdv + vdz, \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 2udu - dv = -dx + dz, \\ du + zdv = dy - vdz, \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Rightarrow du &= \frac{-zdx + (z-v)dz + dy}{2uz+1}, \\ dv &= \frac{2udy + dx - (1+2uz)dz}{2uz+1}, \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{z}{2uz+1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1}.\end{aligned}$$

【例 10.24】设函数  $z(x, y)$  由方程  $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$  所确定, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

【证法一】公式法: 先求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ,

$$F'_x = F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right),$$

$$F'_y = F'_1 \left(-\frac{z}{y^2}\right) + F'_2,$$

$$F'_z = F'_1 \cdot \frac{1}{y} + F'_2 \cdot \frac{1}{x},$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 F'_x}{x F'_z} = -\frac{x^2 y F'_1 - z y F'_2}{x F'_1 + y F'_2},$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 F'_y}{y F'_z} = -\frac{-xz F'_1 + y^2 x F'_2}{x F'_1 + y F'_2},$$

上面两式相加, 即得  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ .

【证法二】直接法: 方程的两边分别对  $x, y$  求偏导, 注意  $x, y$  彼此间无关,  $z$  是  $x, y$  的函数,

$$F'_1 \left(1 + \frac{1}{y} z'_x\right) + F'_2 \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} z'_x\right) = 0,$$

方程两边同乘以  $x^2 y$ , 得  $x z'_x = \frac{yz F'_2 - x^2 y F'_1}{x F'_1 + y F'_2}$ . 由于对称性, 即得

$$y z'_y = \frac{xz F'_1 - y^2 x F'_2}{y F'_2 + x F'_1},$$

上式两式相加, 便得:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ .

● 求二阶或二阶以上偏导数, 通常用直接法简便.

【例 10.25】设  $u = f(x, y)$ , 其中,  $y$  是由方程  $\varphi(x, y) = 0$  所确定的  $x$  的函数 ( $f$  及  $\varphi$  均有连续的二阶偏导数), 求  $\frac{d^2 u}{dx^2}$ .

【解】

$$\frac{du}{dx} = f'_x + f'_y \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f''_{x^2} + f''_{xy} \frac{dy}{dx} + \left(f''_{yx} + f''_{y^2} \frac{dy}{dx}\right) \frac{dy}{dx} + f'_y \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= f''_{x^2} + 2f''_{xy} \frac{dy}{dx} + f''_{y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f'_y \frac{d^2 y}{dx^2},$$

⑦

方程  $\varphi(x, y) = 0$  的两边对  $x$  求导, 得

$$\varphi'_x + \varphi'_y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \quad (8)$$

$$\varphi''_{x^2} \cdot 1 + \varphi''_{xy} \frac{dy}{dx} + \left( \varphi''_{yx} + \varphi''_{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} \right) \frac{dy}{dx} + \varphi'_y \frac{dy}{dx^2} = 0,$$

$$\varphi''_{x^2} + 2\varphi''_{xy} \frac{dy}{dx} + \varphi''_{y^2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \varphi'_y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$\text{解得} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(\varphi'_y)^3} [\varphi''_{x^2} (\varphi'_y)^2 - 2\varphi''_{xy} \varphi'_x \varphi'_y + \varphi''_{y^2} (\varphi'_x)^2]. \quad (9)$$

将式 (8) 和式 (9) 代入式 (7), 得

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\varphi_y'^2} [f''_{x^2} (\varphi'_y)^2 - 2f''_{xy} \varphi'_x \varphi'_y + f''_{y^2} (\varphi'_x)^2 - \frac{f'_y}{\varphi_y} (\varphi''_{x^2} \varphi_y'^2 - 2\varphi''_{xy} \varphi'_x \varphi'_y + \varphi''_{y^2} \varphi_x'^2)].$$

#### 题型四 空间曲线在某点处的切线和法平面方程

**提示:** (1) 设空间曲线  $\Gamma$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in T,$$

$t = t_0 \leftrightarrow$  曲线  $\Gamma$  上一点  $P(x_0, y_0, z_0)$ , 则曲线在该点的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

(2) 设空间曲线  $\Gamma$  的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

则曲线在  $P(x_0, y_0, z_0)$  处切线和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \Big|_P} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \Big|_P} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big|_P},$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \Big|_P (x-x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \Big|_P (y-y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big|_P (z-z_0) = 0,$$

其中,  $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$  为雅可比行列式.

**【例 10.26】** 求曲线  $\Gamma \begin{cases} x = \int_0^t e^u \cos u du \\ y = 2\sin t + \cos t \\ z = 1 + e^{3t} \end{cases}$  在  $t = 0$  处的切线和法平面方程.

**【解】** 当  $t = 0$  时,  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

$$x' = e^t \cos t, x'(0) = 1; y' = 2\cos t - \sin t, y'(0) = 2; z' = 3e^{3t}, z'(0) = 3,$$

$$\text{故, 切线方程为} \quad \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

法平面方程为  $x + 2(y - 1) + 3(z - 2) = 0$ ,

即  $x + 2y + 3z - 8 = 0$ .

**【例 10.27】** 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  在点  $(1, -2, 1)$  处的切线和法平面方程.

**【解】** 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6,$$

$$G(x, y, z) = x + y + z,$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{(1, -2, 1)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bigg|_{(1, -2, 1)} = 2(y - z) \bigg|_{(1, -2, 1)} = -6;$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_{(1, -2, 1)} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bigg|_{(1, -2, 1)} = 2(z - x) \bigg|_{(1, -2, 1)} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_{(1, -2, 1)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bigg|_{(1, -2, 1)} = 2(x - y) \bigg|_{(1, -2, 1)} = 6;$$

故过点  $(1, -2, 1)$  的切线方程为  $\frac{x-1}{-6} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{6}$ .

法平面方程为  $-6(x-1) + 0(y+2) + 6(z-1) = 0$ .

即  $x - z = 0$ .

### 题型五 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程

**提示** (1) 设曲面  $S$  为显式方程  $z = f(x, y)$ , 则过  $S$  上一点  $M(x_0, y_0, z_0)$  的切平面与法线方程分别为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_P (x - x_0) + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_P (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_P} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_P} = \frac{z - z_0}{-1},$$

其中,  $P(x_0, y_0)$  为与  $M(x_0, y_0, z_0)$  对应的  $xOy$  平面上的一点.

(2) 设曲面  $S$  为隐式方程  $F(x, y, z) = 0$ , 则过  $S$  上一点  $M(x_0, y_0, z_0)$  的切平面和法线方程分别为

$$F'_x|_M(x - x_0) + F'_y|_M(y - y_0) + F'_z|_M(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_M} = \frac{y - y_0}{F'_y|_M} = \frac{z - z_0}{F'_z|_M}.$$

**【例 10.28】** 求曲面  $z - e^x + 2xy = 3$  在点  $(1, 2, 0)$  处的切平面方程和法线方程.

**【解】** 令

$$F(x, y, z) = z - e^x + 2xy - 3,$$

$$F'_x|_{(1, 2, 0)} = 2y|_{(1, 2, 0)} = 4,$$

$$F'_y|_{(1, 2, 0)} = 2x|_{(1, 2, 0)} = 2,$$

$$F'_z|_{(1, 2, 0)} = 1 - e^x|_{(1, 2, 0)} = 0.$$

故, 切平面方程为  $4(x-1) + 2(y-2) + 0 \cdot (z-0) = 0$ ,

即  $2x + y - 4 = 0$ .

法线方程为  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{0},$

即 
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{0}.$$

【例 10.29】求过直线  $L: \begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ , 且与曲面  $2x^2-2y^2+2z=\frac{5}{8}$  相切的切平面方程.

【解】令 
$$F(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 2z - \frac{5}{8},$$

则 
$$F'_x = 4x, \quad F'_y = -4y, \quad F'_z = 2.$$

过直线  $L$  的平面束方程为

$$3x - 2y - z - 5 + \lambda(x + y + z) = 0,$$

即 
$$(3 + \lambda)x + (\lambda - 2)y + (\lambda - 1)z - 5 = 0,$$

其法矢量为 
$$\{3 + \lambda, \lambda - 2, \lambda - 1\},$$

设曲面与切平面的切点为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 则

$$\begin{cases} \frac{3 + \lambda}{4x_0} = \frac{\lambda - 2}{-4y_0} = \frac{\lambda - 1}{2} = t & \text{⑩} \\ (3 + \lambda)x_0 + (\lambda - 2)y_0 + (\lambda - 1)z_0 - 5 = 0 & \text{⑪} \\ 2x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0 = \frac{5}{8} & \text{⑫} \end{cases}$$

由式 ⑩ 和式 ⑪ 联立解之, 有

$$x_0 = \frac{2+t}{2t}, \quad y_0 = -\frac{2t-1}{4t}, \quad z_0 = -\frac{15}{8t^2},$$

把这些代入式 ⑫, 得  $t^2 - 4t + 3 = 0$ . 解之,  $t_1 = 1, t_2 = 3$ ,

因而 
$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7,$$

故, 所求切平面方程为

$$3x - 2y - z - 5 + 3(x + y + z) = 0,$$

或 
$$3x - 2y - z - 5 + 7(x + y + z) = 0,$$

即 
$$6x + y + 2z = 5 \text{ 或 } 10x + 5y + 6z = 5.$$

【例 10.30】试证: 曲面  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  上任意一点处的切平面在各坐标轴上截距的平方和等于常数  $a^2$ .

【证】令 
$$F(x, y, z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}},$$

$$F'_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \quad F'_y = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, \quad F'_z = \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}.$$

故, 在曲面上任一点  $(x_0, y_0, z_0)$  处切平面方程为

$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x - x_0) + y_0^{-\frac{1}{3}}(y - y_0) + z_0^{-\frac{1}{3}}(z - z_0) = 0,$$

在上式中令  $y = z = 0$  得切平面在  $x$  轴上的截距为

$$x = x_0 + x_0^{\frac{1}{3}}(y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}) = x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}) = x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},$$

由曲面方程的对称性可知, 切平面在  $y, z$  轴上的截距分别为

$$y = y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}, \quad z = z_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},$$

故

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^{\frac{2}{3}})^2 (x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}}) = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^2.$$

### 题型六 求无条件极值

**提示** 无条件极值的解法:

- (1) 利用二阶偏导数之间的关系和符号判断取不取极值及极值的类型;
- (2) 利用全微分来判断,即假设有一函数  $u = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处,如果

$df(x_0, y_0) = 0, d^2 f(x_0, y_0) < 0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  为极大值,

$df(x_0, y_0) = 0, d^2 f(x_0, y_0) > 0$ , 则  $f(x_0, y_0)$  为极小值.

$$\textcircled{4} \quad d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

- (3) 配方法:适用于多项式或类似于多项式的函数类型.

**【例 10.31】** 求由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$  确定的函数  $z = f(x, y)$  的极值.

**【解法一】** 方程的两边分别对  $x, y$  求偏导,得,

$$\begin{cases} 2x + 2zx'_x - 2 - 4z'_x = 0 \\ 2y + 2zx'_y + 2 - 4z'_y = 0 \end{cases} \quad \textcircled{13}$$

$$\text{由函数取极值的必要条件} \quad \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \textcircled{14}$$

将 ⑭ 代入 ⑬ 解得  $x = 1, y = -1, P(1, -1)$  为驻点.

将 ⑬ 的两个方程分别对  $x, y$  求偏导,得

$$A = z''_{x^2} |_P = \frac{(x-2)^2 + (1-x)^2}{(2-z)^3} \Big|_P = \frac{1}{2-z}. \quad \textcircled{15}$$

$$B = z''_{xy} |_P = 0$$

$$C = z''_{y^2} |_P = \frac{(2-z)^2 + (1+y)^2}{(2-z)^3} = \frac{1}{2-z}.$$

$$\text{因为} \quad B^2 - AC = -\frac{1}{(2-z)^2} < 0 \quad (z \neq 2),$$

所以  $z = f(x, y) |_P$  取极值.

将  $x = 1, y = -1$  代入原方程,得  $z_1 = -2, z_2 = 6$ ,

$$\text{把 } z_1 = -2 \text{ 代入 } \textcircled{15}, A = \frac{1}{2-z} \Big|_{z=-2} = \frac{1}{4} > 0,$$

故,  $z = f(1, -1) = -2$  为极小值.

$$\text{把 } z_2 = 6 \text{ 代入 } \textcircled{15}, A = \frac{1}{2-z} \Big|_{z=6} = -\frac{1}{4} < 0,$$

故  $z = f(1, -1) = 6$  为极大值.

**【解法二】** 配方法 原方程可变形为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$ ,  
于是

$$z = 2 \pm \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}.$$

显然,当  $x = 1, y = -1$  时,根号中的极大值为 4,由此可知  $z = 2 \pm 4$  为极值,  
 $z = 6$  为极大值,  $z = -2$  为极小值.

题型七 求条件极值

**提示** 条件极值的解法:

- (1) 化为无条件极值问题求解;
- (2) 更一般的是利用拉格朗日乘数法求解.

这里提醒读者注意:“乘法法”所得到的点只是“可能”的极值点,到底是否是极值点及其类型,要依据拉格朗日函数  $F(x, y, z)$  的二阶微分  $d^2F$  的符号来判断.

拉格朗日乘数法具体如下:

设目标函数为  $u = f(x, y, z)$ , 约束条件为  $\varphi(x, y, z) = 0$ , 求极值.

方法一:化为无条件极值.

- ① 由  $\varphi(x, y, z) = 0$  中解出  $z = z(x, y)$  (不一定能解出);
- ② 代入  $u = f(x, y, z)$  中, 得  $u = f[x, y, z(x, y)]$ ;
- ③ 再按无条件极值求解.

方法二:拉格朗日乘数法.

- ① 作辅助函数

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z).$$

- ② 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

求出驻点  $(x_0, y_0, z_0)$ .

(求驻点时, 先将含  $\lambda$  的项移到右边, 然后通过前三个方程得出  $x$  与  $y$  的关系式(或  $x$  与  $y, z$  的关系式),  $x$  与  $z$  的关系式(或  $x$  与  $y, z$  的关系式), 最后将关系式代入  $\varphi(x, y, z) = 0$  中解出  $x_0, y_0, z_0$ ).

- ③ 求出极值.

**注** ① 当  $f(x, y, z)$  含有绝对值符号时, 由拉格朗日乘数法所作的辅助函数为

$$F(x, y, z) = f^2(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z).$$

② 当目标函数  $f(x, y, z)$  比较复杂时, 可取在相同的约束条件  $\varphi(x, y, z) = 0$  下与  $f(x, y, z)$  具有相同驻点的简单形式  $f_*(x, y, z)$ , 作辅助函数  $F(x, y, z) = f_*(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$ .

③ 当有两个约束条件  $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$  时, 相应地辅助函数设为

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z),$$

然后解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0, \text{ 求出驻点 } (x_0, y_0, z_0). \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**【例 10.32】**求函数  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  在  $(x-y)^2 - z^2 = 1$  条件下的极值.

**【解】**为简单即求  $v = x^2 + y^2 + z^2$  在条件  $(x-y)^2 - z^2 = 1$  下的极值(注: $u$  与  $v$  在相同条件下的极值点相同). 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1],$$

$$\text{解方程组} \quad \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ F'_y = 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \\ F'_z = 2z - 2\lambda z = 0 \\ (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}, \quad (16)$$

由 (16)  $\Rightarrow (\lambda-1)z = 0 \Rightarrow \lambda = 1$  或  $z = 0$ .

当  $\lambda = 1$  时, 方程组不相容, 故  $\lambda \neq 1$ , 于是, 只有  $z = 0$ , 代入其他各式, 得驻点:

$$P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ 及 } \lambda = -\frac{1}{2},$$

又由

$$F''_{x^2} = 2(1+\lambda), F''_{xy} = -2\lambda, F''_{y^2} = 2(1+\lambda),$$

$$F''_{z^2} = 2(1-\lambda), F''_{xz} = F''_{zx} = 0,$$

$$d^2 F(x, y, z) = [2(1+\lambda)dx^2 + 2(1+\lambda)dy^2 + 2(1-\lambda)dz^2 - 4\lambda dx dy] \Big|_{\lambda = -\frac{1}{2}}$$

$$= dx^2 + dy^2 + 3dz^2 + 2dxdy > 0,$$

故  $P_1, P_2$  分别为  $v$  的极小值点, 亦即  $u$  的极小值点. 极小值为:

$$u\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = u\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### 题型八 求最值

**提示** 设函数  $z = f(x, y)$  在闭域  $D$  上连续, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上必有最大值与最小值, 求最值的程序为:

- (1) 求出  $f(x, y)$  在  $D$  内“可疑”的极值点的函数值;
- (2) 求出  $f(x, y)$  在  $D$  的边界上的最值;
- (3) 将上面所得之函数值进行比较, 最大(小)者为最大(小)值.

如果是实际应用题, 知道  $f(x, y)$  在  $D$  内只有一个驻点, 则函数在该点的值就是所求的最大(小)值, 不必再求  $f(x, y)$  在  $D$  的边界上的最值, 也无需判别函数值是极大(或极小)值.

**【例 10.33】**求二元函数  $z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$  在直线  $x + y = 6$ ,  $x$  轴和  $y$  轴所围成的闭域  $D$  上的最大值与最小值.

**【解】**(1) 先求函数在  $D$  内的驻点(如图 10-4 所示), 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = 0 \\ f'_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

得  $x = 0, (0 \leq y \leq 6)$ , 及点  $(4, 0), (2, 1)$ ; 在  $D$  内只有唯一驻点  $(2, 1)$ , 在该点处  $f(2, 1) = 4$ .

(2) 再求  $f(x, y)$  在  $D$  的边界上的最值.

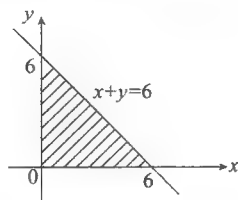


图 10-4

在边界  $x=0(0 \leq y \leq 6)$  和  $y=0(0 \leq x \leq 6)$  上  $f(x,y)=0$ ,

在边界  $x+y=6$  上,  $y=6-x$ , 代入  $f(x,y)$  中, 得

$$f(x,y) = x^2(6-x)(-2) = 2x^2(x-6),$$

$$f'_x = 4x(x-6) + 2x^2 = 6x^2 - 24x = 0$$

$$\Rightarrow x=0, x=4, \Rightarrow \text{当 } x=0 \text{ 时, } f(x,y)=0; \text{当 } x=4 \text{ 时 } y=6-x \Big|_{x=4} = 2,$$

$$f(4,2) = x^2 y(4-x-y) \Big|_{(4,2)} = -64.$$

比较后可知  $f(2,1)=4$  为最大值,  $f(4,2)=-64$  为最小值.

**【例 10.34】** 已知三角形周长为  $2p$ , 试求此三角形绕自己的一边旋转时所构成的旋转体体积的最大值.

**【解】** 设三角形的三边分别为  $x, y, z$  (如图 10-5 所示), 不妨设它绕  $AC$  边旋转,  $AC$  边上的高为  $h$ , 面积为  $s$ , 于是

$yh = 2s = 2\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ , 则旋转体体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi y h^2 = \frac{1}{3}\pi y \frac{4p(p-x)(p-y)(p-z)}{y^2}$$

$$= \frac{4}{3}\pi p \frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{y}, \text{ 其中 } x+y+z=2p.$$

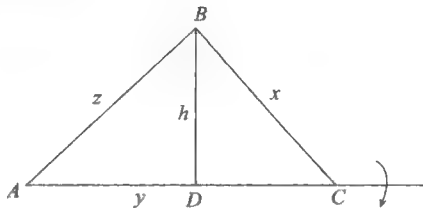


图 10-5

为简便即求  $u = \ln(p-x) + \ln(p-y) + \ln(p-z) - \ln y$  在条件  $x+y+z=2p$  之下的驻点.

令  $F(x,y,z) = \ln(p-x) + \ln(p-y) + \ln(p-z) - \ln y + \lambda(x+y+z-2p)$

$$\begin{cases} F'_x = -\frac{1}{p-x} + \lambda = 0 & (17) \\ F'_y = -\frac{1}{p-y} - \frac{1}{y} + \lambda = 0 & (18) \\ F'_z = -\frac{1}{p-z} + \lambda = 0 & (19) \\ x+y+z-2p=0 & (20) \end{cases}$$

解这类方程组通常是将含  $\lambda$  的项移到等式的右边, 然后两式相除, 消去  $\lambda$ , 得两变量之间的关系式.

$$\text{由 } (17) \Rightarrow \frac{1}{p-x} = \lambda \quad (17')$$

$$(18) \Rightarrow \frac{p}{y(p-y)} = \lambda \quad (18')$$

$$(19) \Rightarrow \frac{1}{p-z} = \lambda \quad (19')$$

$$(17') \div (18') \text{ 得: } p(p-x) = y(p-y), \quad (21)$$

$$(17') \div (19') \text{ 得: } x = z. \quad (22)$$

再将 (20), (21), (22) 联立, 解之得

$$x = z = \frac{3}{4}p, y = \frac{p}{2}, P\left(\frac{3}{4}p, \frac{p}{2}, \frac{3}{4}p\right) \text{ 为驻点.}$$

故  $V$  的最大值为  $V \Big|_P = \frac{\pi}{12}p^3$ .



**【例 10.35】** 在平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  与三坐标面所围成的四面体内(如图 10-6 所示), 作一个以该平面为顶面, 在  $xOy$  坐标面上的投影为长方形(与  $AB$  相接)的六面体中体积之最大者(其中  $a, b, c > 0$ ).

**【解】** 如图 10-6 所示, 则六面体体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D z \, dx \, dy = \iint_D c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \, dx \, dy \\ &= c \int_0^x dx \int_0^y \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \, dy, \end{aligned}$$

直线  $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

令

$$F(x, y) = c \int_0^x dx \int_0^y \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \, dy + \lambda \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right),$$

解方程

$$\begin{cases} F'_x = y - \frac{y^2}{2b} - \frac{xy}{a} + \frac{\lambda}{a} = 0 \\ F'_y = x - \frac{xy}{b} - \frac{x^2}{2a} + \frac{\lambda}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

得  $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ . 此时

$$V = c \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_0^{\frac{b}{2}} \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \, dy = \frac{1}{8} abc,$$

即所求最大体积为  $\frac{1}{8} abc$ .

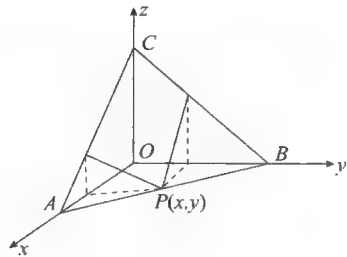


图 10-6

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 求多元对称函数的偏导数, 要想到对任一变元所得的结果, 可以经变元(或字母)的对换直接得到对其他变元的偏导.

**【例 10.36】** 设  $x + y + z = e^{xy}$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

**【解】** 方程  $x + y + z = e^{xy}$  两边微分, 得

$$dx + dy + dz = e^{xy} (y dx + x dy), \text{ 即 } dz = (ye^{xy} - 1) dx + (xe^{xy} - 1) dy,$$

故 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} - 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy},$$

因为方程关于  $x, y$  对称, 所以  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$ .

所以  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}$ .

## 二、综合题解析

【例 10.37】\* 在第 I 卦限内作椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的切平面, 使切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小, 求切点坐标.

【解】设  $P(x_0, y_0, z_0)$  为椭球面上一点, 令  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ ,

$$\text{则} \quad F'_x \Big|_P = \frac{2}{a^2}x_0, \quad F'_y \Big|_P = \frac{2}{b^2}y_0, \quad F'_z \Big|_P = \frac{2}{c^2}z_0,$$

过  $P(x_0, y_0, z_0)$  点的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

$$\text{即} \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1,$$

该切平面在  $x, y, z$  轴的截距分别为

$$x = \frac{a^2}{x_0}, y = \frac{b^2}{y_0}, z = \frac{c^2}{z_0},$$

则切平面与三坐标面所围四面体体积为

$$V = \frac{1}{6}xyz = \frac{a^2 b^2 c^2}{6x_0 y_0 z_0}.$$

现求  $V$  在条件  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$  之下的最小值.

令  $u = \ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0$ ,

$$G(x_0, y_0, z_0) = \ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0 + \lambda \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \right),$$

$$\text{解方程组} \quad \begin{cases} \frac{1}{x_0} + \frac{2\lambda x_0}{a^2} = 0 \\ \frac{1}{y_0} + \frac{2\lambda y_0}{b^2} = 0 \\ \frac{1}{z_0} + \frac{2\lambda z_0}{c^2} = 0 \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{可得} \quad x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}, y_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}, z_0 = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

故当切点坐标为  $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$  时, 切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小, 即

$$V_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

【例 10.38】\* 设有一小山, 取它的底面所在的平面为  $xOy$  坐标面, 其底部所占的区域为  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$ , 小山的高度函数为  $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ .

(1) 设  $M(x_0, y_0)$  为区域  $D$  上一点, 问  $h(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为  $g(x_0, y_0)$ , 试写出  $g(x_0, y_0)$  的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点, 也就是说, 要在  $D$  的边界线  $x^2 + y^2 - xy = 75$  上找出使 (1) 中的  $g(x, y)$  达到最大值的点, 试确定攀登起点的位置.

【解】(1) 由梯度的几何意义知,  $h(x, y)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处沿梯度  $\text{grad}h(x, y)|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)\mathbf{i} + (x_0 - 2y_0)\mathbf{j}$  方向的方向导数最大, 方向导数的最大值为该梯度的模, 所以  $g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}$ .

(2) 令  $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$ ,

由题意, 只需求  $f(x, y)$  在约束条件  $75 - x^2 - y^2 + xy = 0$  下的最大值点.

令  $L(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$ , 则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0 & \text{①} \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0 & \text{②} \\ x^2 + y^2 - xy = 75 & \text{③} \end{cases}$$

由式 ① 和式 ② 消去  $\lambda$ , 得  $y = \pm x$ , 代入式 ③, 得

$$x = \pm 5\sqrt{3}, y = \pm 5\sqrt{3}, \text{ 或 } x = \pm 5, y = \mp 5.$$

于是得到 4 个可能的极值点:  $M_1(5, -5), M_2(-5, 5), M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$ .

由于  $f(M_1) = f(M_2) = 450, f(M_3) = f(M_4) = 150$ ,

故  $M_1(5, -5)$  或  $M_2(-5, 5)$  可作为攀登的起点.

### 习 题 十

1. 设  $f, g$  为连续可微函数,  $u = f(x, xy), v = g(x + xy)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ .

2. 设  $x^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$ , 其中  $\varphi$  为可微函数, 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

3. 设  $u = f(x, y, z)$ , 又  $y = \varphi(x, t), t = \psi(x, z)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

4. 求下列方程所确定函数的全微分:

(1)  $f(x+y, y+z, z+x) = 0$ , 求  $dz$ ;

(2)  $z = f(xz, z-y)$ , 求  $dz$ .

5. 设  $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

6. 已知  $z = f\left(2x, \frac{x}{y}\right)$ , 求  $z''_{x^2}, z''_{y^2}$ .

7. 已知  $z = f(x \ln y, x-y)$ , 求  $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$ .

8. 设  $y = y(x), z = z(x)$ , 由  $\begin{cases} x+y+z+z^2=0 \\ x+y^2+z+z^3=0 \end{cases}$  确定, 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ .

9. 设  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , 求  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

10. 设  $z = f[x^2 - y, \varphi(xy)]$ , 其中  $f(u, v)$  具有二阶连续偏导数,  $\varphi(u)$  二阶可导, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

11. 已知  $z = z(u)$ , 且  $u = \varphi(u) + \int_y^x p(t) dt$ , 其中  $z(u)$  可微,  $\varphi'(u)$  连续, 且  $\varphi'(u) \neq 1$ ,  $p(t)$  连续, 试求  $p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y}$ .
12. 设  $F[x, y(x), z(x)] = P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]z(x)$ , 其中出现的函数都是连续可微的, 试计算  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)$ .
13. 设  $z = u(x, y)e^{ax+y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ , 试确定常数  $a$ , 使  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$ .
14. 若  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 其中  $f(u)$  有连续的二阶导数, 求  $z$ .
15. 求曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$  平行于平面  $x + 4y + 3z = 0$  的切平面方程.
16. 求圆周  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ ,  $2x - 3y + 5z - 4 = 0$  在  $M(1, 1, 1)$  处的切线与法平面方程.
17. 试求函数  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  在闭域  $D: x \leq 0, y \leq 0$  及  $x + y \geq -3$  上的最大值与最小值.
18. 在椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  内作内接直角平行六面体, 求其最大体积.
19. 求原点到曲面  $(x - y)^2 - z^2 = 1$  的最短距离.
20. 当  $x > 0, y > 0, z > 0$  时, 求函数  $u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$  上的最大值, 并证明对任意的正实数  $a, b, c$  成立不等式

$$ab^2c^3 \leq 108 \left( \frac{a+b+c}{6} \right)^6 \text{ 成立.}$$

### 参 考 答 案

1.  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = (1+y)g' \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial \omega} \right), (\omega = xy)$ .
2.  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - z\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz - y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}$ .
3.  $f'_x + f'_y\varphi'_x + f'_y\varphi'_i\psi'_i$ .
4. (1)  $dz = -\frac{(f'_1 + f'_3)dx + (f'_1 + f'_2)dy}{f'_2 + f'_3}$ ;  
(2)  $dz = \frac{-zf'_1dx + f'_2dy}{xf'_1 + f'_2 - 1}$ .
5.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11}e^{2x}\sin y \cos y + 2e^x(y\sin y + x\cos y)f''_{12} + 4xyf''_{22} + f'_1e^x \cos y$ .
6.  $4f''_{11} + \frac{4}{y}f''_{12} + \frac{1}{y^2}f''_{22} + \frac{x^2}{y^4}f''_{22} + \frac{2x}{y^3}f'_2$ .
7. (1)  $(\ln y)^2 f''_{11} + 2\ln y f''_{12} + f''_{22}$ ;  
(2)  $\frac{x}{y}\ln y f''_{11} + \left(\frac{x}{y} - \ln y\right)f''_{12} - f''_{22} + \frac{1}{y}f'_1$ ;

$$(3) \frac{x^2}{y^2} f''_{11} - \frac{2x}{y} f''_{12} + f''_{22} - \frac{x}{y^2} f'_u.$$

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{2z - 3z^2}{1 + 3z^2 - 2y - 4yz}, \frac{dz}{dx} = \frac{2y - 1}{1 + 3z^2 - 2y - 4yz}.$$

$$9. 0.$$

$$10. (\varphi' + xy\varphi'')f'_2 - 2xf''_{11} + (2x^2 - y)\varphi'f''_{12} + xy(\varphi')^2f''_{22}.$$

$$11. 0.$$

$$12. \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} + [z(x) - y'(x)] \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

$$13. a = 1.$$

$$14. z = c_1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数}).$$

$$15. x + 4y + 3z - 12 = 0 \text{ 及 } x + 4y + 3z + 12 = 0.$$

$$16. \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1} \text{ 及 } 16x + 9y - z - 24 = 0.$$

$$17. \text{最小值 } -1, \text{最大值 } 6.$$

$$18. \left( \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}} \right), V_{\max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

$$19. \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$20. U_{\max} = \ln(6\sqrt{3}r^6).$$

# 第十一章 重 积 分

## 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

### 一、基本概念

#### 1. 二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ ,  $d_i$  为  $\Delta\sigma_i$  的直径 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

几何意义: 当  $z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$  时, 二重积分  $I$  表示以  $z = f(x, y)$  为曲顶, 以  $D$  为底的柱体体积.

#### 2. 三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta v_i,$$

其中,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ ,  $d_i$  为  $\Delta v_i$  的直径 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

物理意义: 三重积分  $I$  表示体密度为  $\mu = f(x, y, z)$  的空间形体  $\Omega$  的质量.

### 二、性质

只叙述二重积分的性质, 三重积分类似.

$$(1) \iint_D k f(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma, k \text{ 为常数},$$

$$(2) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} f(x, y) d\sigma, \text{ 其中, } D_i \text{ 为 } D \text{ 的构成子域且任两个子域没有重叠部分} (i = 1, 2, \dots, m).$$

$$(4) \iint_D d\sigma = A, \text{ 其中 } A \text{ 为 } D \text{ 的面积}.$$

(5) (比较定理) 若在  $D$  上恒有  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(6) (估值定理) 设  $M, m$  分别为  $f(x, y)$  在闭域  $D$  上的最大值与最小值,  $A$  为  $D$  的面积, 则

$$mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA.$$

(7) (中值定理) 若  $f(x, y)$  在闭域  $D$  上连续,  $A$  为  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) A.$$

(8) 二重积分的对称性定理.

① 如果积分域  $D$  关于  $x$  轴对称,  $f(x, y)$  为  $y$  的奇偶函数, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0 & f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数, 即 } f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数, 即 } f(x, -y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中,  $D_1$  为  $D$  在上半平面部分.

这个性质的几何意义如图 11-1(a) 和图 11-1(b).

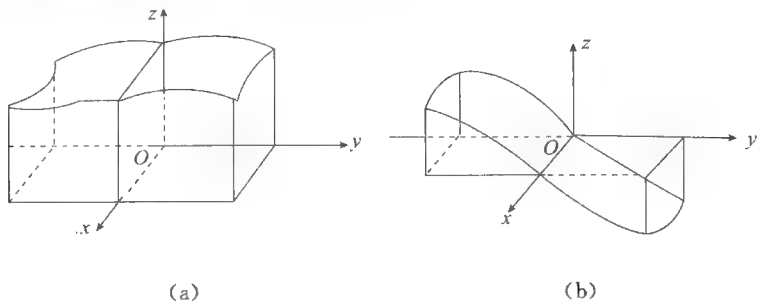


图 11-1

② 如果  $D$  关于  $y$  轴对称,  $f(x, y)$  为  $x$  的奇偶函数, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0 & f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数, 即 } f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma & f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数, 即 } f(-x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中,  $D_2$  为  $D$  在右半平面部分.

③ 轮换对称性: 设积分区域为  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$  为将积分区域中的变量  $x, y$  互换后所成的区域, 则

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{yx}} f(y, x) dx dy.$$

即将积分区域中变量  $x, y$  互换, 将被积函数中变量  $x, y$  互换得到的二重积分与原二重积分相等.

④ 设  $D$  关于原点对称,  $f(x, y)$  同时为  $x, y$  的奇函数或偶函数, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & f \text{ 关于 } x, y \text{ 的奇函数, 即 } f(-x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy & f \text{ 关于 } x, y \text{ 的偶函数, 即 } f(-x, -y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中  $D_1$  为  $D$  的右半平面部分

注意到二重积分积分域  $D$  的对称性及被积函数  $f(x, y)$  的奇偶性, 一方面可减少计算量, 另一方面可避免出差错, 要特别注意的是仅当积分域  $D$  的对称性与被积函数  $f(x, y)$  的奇偶性两者兼得时才能用性质(8).

**【例 11.1】** 下列不等式正确的是

$$(A) \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1}} (x-1) d\sigma > 0.$$

$$(B) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-x^2-y^2) d\sigma > 0.$$

$$(C) \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1}} (y-1) d\sigma > 0.$$

$$(D) \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1}} (x+1) d\sigma > 0.$$

【 】

【解】仅当被积函数  $f(x, y) \geq 0$  时,  $\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$ , 而(A)中  $f(x, y) = x-1$ , 在  $D: |x| \leq 1, |y| \leq 1$  中不总是  $f(x, y) \geq 0$ , 故(A)不正确, 同理(B), (C)也不正确, 故应选(D).

【例 11.2】设区域  $D_1: -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2; D_2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ , 又

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma, I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma, \text{则正确的是}$$

$$(A) I_1 > 4I_2.$$

$$(B) I_1 < 4I_2.$$

$$(C) I_1 = 4I_2.$$

$$(D) I_1 = 2I_2.$$

【 】

【解】由于积分域  $D_1$  关于  $x$  轴,  $y$  轴以及原点均对称, 被积函数  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3$  关于  $y, x$  为偶函数, 由性质(8)即可知(C)正确.

【例 11.3】计算  $I = \iint_D xy dx dy$ , 其中  $D$  为下列双纽线所围成: (1)  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ ;

$$(2) (x^2 + y^2)^2 = 2xy.$$

【解】(1) 由  $D$  的方程  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ ,  $x$  用  $-x$  替代不变, 可知  $D$  关于  $y$  轴对称(同理可知  $D$  关于  $x$  轴也对称) 又  $f(x, y) = xy$  关于  $x$  为奇函数, 即  $f(-x, y) = (-x)y = -xy = -f(x, y)$ , 由性质(8)可知  $I = \iint_D xy dx dy = 0$ , 其中  $D: (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ .

(2)  $D: (x^2 + y^2)^2 = 2xy$  关于原点对称, 又

$$f(-x, -y) = (-x)(-y) = xy = f(x, y),$$

所以  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D xy dx dy = 2 \iint_{D^*} xy dx dy$ ,  $D^*$  为  $D$  在第一象限部分.

用极坐标系计算, 有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\sigma \int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\rho = \frac{1}{6}.$$

● 不画图如何定义累次积分限? 可以这样处理:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \xrightarrow[y = \rho \sin \theta]{x = \rho \cos \theta} \rho^4 = 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \rho^2 = \sin 2\theta \Rightarrow \rho = \sqrt{\sin 2\theta}, (\rho = -\sqrt{\sin 2\theta} \text{ 舍去, 因为在第 I 象限})$$

$$\text{令 } \rho = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = 0 \text{ 或 } 2\theta = \pi \Rightarrow \theta = 0, \text{ 或 } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

让  $\rho = 0$ , 得出  $\theta$  的两个相邻的角度, 小角为下限, 大角为上限, 这是极坐标系中不画积分域  $D$  的草图情况下, 确定  $\theta$  角上下限的一种方法.



## 三、公式

## 1. 利用二重积分求曲面面积

设二元函数  $z = f(x, y)$  及其一阶偏导数连续, 它所对应的曲面  $\Sigma$  与平行于  $z$  轴的直线只交于一点,  $D_{xy}$  为该曲面在  $xOy$  平面上的投影, 则曲面  $\Sigma$  的面积  $A$  为

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\text{同样 } A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, A = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz.$$

分别表示曲面  $x = g(y, z)$  与  $y = h(z, x)$  在满足相应的条件下的面积.

## 2. 二、三重积分在物理上的应用

设平面薄片的面密度为  $\mu = \rho(x, y)$ , 薄片在  $xOy$  坐标面上的投影为  $D$ , 则

(1) 薄片质量,

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

(2) 薄片质心  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}.$$

**注** 若  $\mu = \rho(x, y)$  是常量, 则我们把均匀薄片的质心叫做这平面薄片所占平面图形的形心.

(3) 薄片关于  $x, y$  轴及原点的转动惯量分别为

$$J_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy.$$

\* 设空间形体  $\Omega$  的体密度为  $\mu = \rho(x, y, z)$ , 则

(4) 空间形体  $\Omega$  的质量.

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

(5) 空间形体  $\Omega$  的质心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dx dy dz}.$$

(6) 空间形体  $\Omega$  关于  $x, y, z$  轴及原点的转动惯量分别为





$$J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dx dy dz, J_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dx dy dz,$$
$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dx dy dz, J_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dx dy dz.$$

四、二重积分的解题技巧

1.  $\iint_D f(x,y)d\sigma$  的解题程序

- (1) 画出积分域  $D$  的草图.
- (2) 选择坐标系, 主要根据积分域  $D$  的形状, 有时也参看被积函数的形式, 见表 11-1.

表 11-1

坐标系	积分域 $D$ 形状	被积函数形式	面积元素 $d\sigma$	变量替换	积分表达式
直角坐标系	$D$ 为矩形、三角形或任意形	$f(x,y)$	$d\sigma = dx dy$	<div><math>\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}</math></div>	$\iint_D f(x,y)dx dy$
极坐标系	<div><math>D</math> 为圆域 </div> <div>环域 </div> <div>扇域 </div> <div>环扇域 </div>	<div><math>f(x^2 + y^2)</math></div> <div>或 <math>f(\frac{x}{y})</math></div> <div>或 <math>f(\frac{x}{y})</math></div>	$d\sigma = \rho d\rho d\theta$		<div><math>\iint_D f(m)\rho d\rho d\theta</math></div> <div>其中 <math>f(m) = f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)</math></div>

- (3) 选择积分次序
- 选序的原则: ① 先积分的容易, 并能为后积分创造条件;
- ② 对积分域  $D$  的划分, 块数越少越好.
- (4) 确定累次积分的上下限, 作定积分运算.
- 定限口诀:
- 后积先定限, (累次积分中后积变量的上下限均为常数)
- 限内划条线, (该直线平行于坐标轴且同向)
- 先交下限写, (上下限或者为常数或者后积分变量的函数)
- 后交上限见.
- 直角坐标系中积分限的确定, 如图 11-2(a)、(b) 所示.

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x). \end{cases}$$

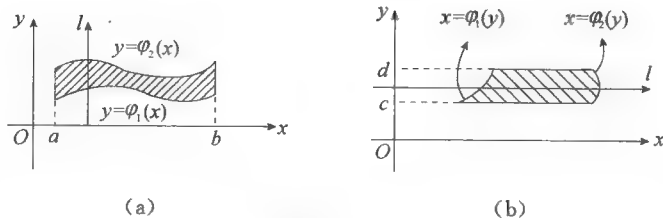


图 11-2

直线  $l \parallel y$  轴, 它先与  $D$  的边界曲线  $y = \varphi_1(x)$  相交,  $\varphi_1(x)$  取做下限, 后与  $D$  的边界曲线  $y = \varphi_2(x)$  相交,  $\varphi_2(x)$  取作上限, 故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

与以上作类似分析, 可得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx.$$

**注** 一般来讲, 后积分的变量, 积分上下限均为常数; 先积分的变量, 积分上下限或者为常数或者是后积分变量的函数.

**【例 11.4】** 设  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$ , 则改变其积分次序后为

(A)  $\int_0^1 dy \int_0^{1-x} f(x, y) dx.$

(B)  $\int_0^1 dy \int_0^{1-x} f(x, y) dx.$

(C)  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$

(D)  $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx.$

【 】

**【解】** (A) 显然是错的, 因为后积分的上、下限不能含有变量; (B) 也是错的, 因为先积分的上、下限或者为常数或者后积分变量的函数, 而 (B) 违背了此原则; (C) 也是错的, 原因是改变积分次序不会改变积分域, 由排除法可知应选 (D).

## 2. 极坐标系中积分限的确定

一般而言, 极坐标系中二重积分的积分次序是“先  $\rho$  后  $\theta$ ”.

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

积分限随极点  $O$  与积分域  $D$  的边界曲线的相对位置而定.

(1) 当极点  $O$  在域  $D$  的边界曲线

(2) 当极点  $O$  在域  $D$  的边界线

之外时 [如图 11-3(a) 所示],

上时 [如图 11-3(b) 所示],

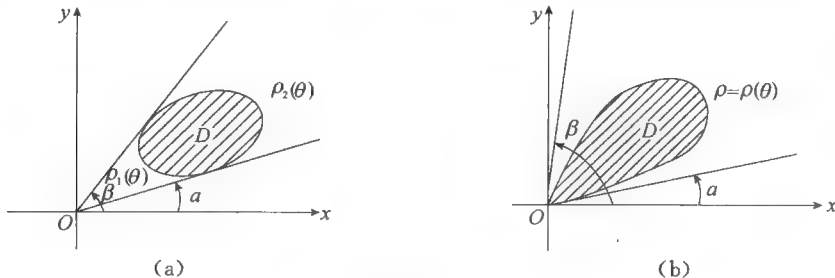
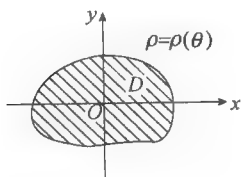


图 11-3

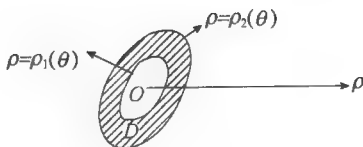
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(3) 当极点  $O$  在积分域  $D$  的边界线之内时,



(c)



(d)

图 11-3

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

## 五、三重积分的解题技巧

### 1. $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 的解题程序

在直角坐标系, 柱坐标系中三重积分化为累次积分的过程中, 不要急于求成, 而应按如下步骤处理:

$$\text{设 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv, \Omega: a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

其中,  $D_{xy}$  为  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影, 在  $D_{xy}$  内任取一点作平行于  $z$  轴的直线, 该直线与围成  $\Omega$  的边界曲面相交, 则先交者作为  $z$  的积分下限, 后交者为上限.

类似地也可考虑先对  $x$  或  $y$  积分的情形.

$$\text{设 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv, \Omega: \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y).$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}^{z_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz. \end{aligned}$$

### 2. 坐标系的选择

坐标系的选择主要取决于积分域  $\Omega$  的形状, 被积函数  $f(x, y, z)$  的形式仅作参考, 见表 11-2.

表 11-2

坐标系	积分域 $\Omega$ 形状	被积函数 $f(x, y, z)$ 形状	体积元素 $d\upsilon$	变量替换	积分形式
直角坐标系	$\Omega$ 为长方体, 四面体或任意形体	$f(x, y, z)$	$d\upsilon = dx dy dz$		$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$
柱坐标系	$\Omega$ 为柱体, 锥体, 或由柱面, 锥面, 旋转抛物面与其他曲面所围成的形体	$zf(x^2 + y^2)$ $zf\left(\frac{y}{x}\right)$ 或 $xf(y^2 + z^2)$ , $xf\left(\frac{z}{y}\right)$ 或 $yf(x^2 + z^2)$ 或 $yf\left(\frac{z}{x}\right)$	$d\upsilon = \rho d\rho d\theta dz$	$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$	$I = \iiint_{\Omega} f(m) \rho d\rho d\theta dz$ 其中 $f(m) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$
球坐标系	$\Omega$ 为球体或球体的一部分, 锥体	$f(x^2 + y^2 + z^2)$	$d\upsilon = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$	$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$	$I = \iiint_{\Omega} f(m) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ 其中 $f(m) = f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$

## 3. 球面坐标系中积分限的确定

$$I = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

积分次序:

通常是先对  $r$  积分, 把区域  $\Omega$  投影到  $r = 1$  (或常数) 的球面上, 得到投影区域  $\sigma_{\varphi\theta}$ , 它的边界曲线由  $\varphi, \theta$  的关系确定 (见图 11-4). 积分可表示为

$$\iiint_{\Omega} f(M) d\upsilon = \iint_{\sigma_{\varphi\theta}} \sin \varphi d\varphi d\theta \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r, \varphi, \theta) r^2 dr = \int_{\square} \sin \varphi d\varphi \int_{\square} d\theta \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r, \varphi, \theta) r^2 dr.$$

关于第一个积分  $\int_{\square} \sin \varphi d\varphi$ , 积分限这样确定:

(1) 若  $z$  轴从各分域  $\Omega$  中穿过

$$\text{则} \quad \int_{\square} \sin \varphi d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi d\varphi.$$

(2) 若  $z$  轴与积分域  $\Omega$  相隔或相切

则总可以找到两个锥角分别为  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) 的锥面, 把  $\Omega$  夹在其中, 于是

$$\int_{\square} \sin \varphi d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi d\varphi.$$

关于第二个积分  $\int_{\square} d\theta$  积分限的确定与极坐标系中的  $\theta$  的确定类似, 即若积分域  $\Omega$  在  $xOy$  平面上投影后区域的边界曲线包含原点在其内, 则

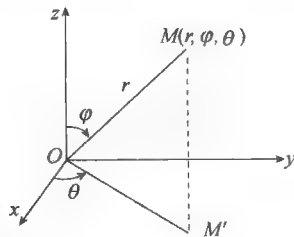


图 11-4

$$\int_{\square} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta.$$

若投影区域的边界曲线不包含原点在其内,则在  $xOy$  平面上总可作两条射线把投影域夹在其中,设两射线与  $x$  轴正向的夹角分别为  $\theta_1, \theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ) (见图 11-5),则

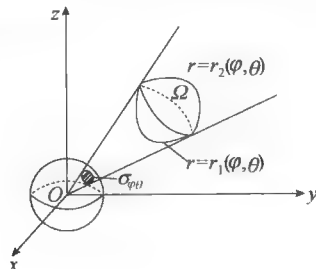


图 11-5

$$\int_{\square} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta.$$

(3) 三重积分的“先二后一”方法(见例 11.25, 例 11.27, 例 11.31)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_0}^{z_1} dz \iint_{D_{xy}} f(x, y, z) dx dy$$

其中,  $D_{xy}$  为固定  $z$  后在  $\Omega$  上所得的截面,如图 11-6 所示.

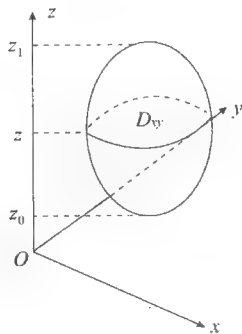


图 11-6

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 更换二重积分的积分次序

**提示** 解题程序:

- (1) 由所给累次积分的上下限写出表示积分域  $D$  的不等式组;
- (2) 依据不等式组画出积分域  $D$  的草图;
- (3) 写出新的累次积分,积分限的确定与前面所讲的相同.

**【例 11.5】** 更换下列积分次序:

$$(1) I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$(2) I = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy + \int_2^8 dx \int_x^8 f(x, y) dy;$$

$$(3) I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, (a > 0);$$

$$(4) I = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dx.$$

【解】(1) 由积分的上下限知

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases} \text{ 及 } D_2: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2-x, \end{cases}$$

由  $D_1, D_2$  作出  $D$  的图形, 见图 11-7. 于是

$$D: \begin{cases} 1 - \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2-y, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

故

$$I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

(2) 分别写出右边两个积分所确定的不等式组.

$$D_1: \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq x^2 \end{cases} \text{ 及 } D_2: \begin{cases} 2 \leq x \leq 8, \\ x \leq y \leq 8, \end{cases}$$

由  $D_1, D_2$  作出  $D$  的图形如图 11-8 所示, 于是

$$D: \begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq y \text{ 及 } \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} 2 \leq x \leq y, \\ 4 \leq y \leq 8, \end{cases}$$

$$I = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^y f(x, y) dx + \int_4^8 dy \int_2^y f(x, y) dx.$$

(3) 由  $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2a \\ \sqrt{2ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax} \end{cases}$  作出其图形,

如图 11-9 所示. 将积分域  $D$  分成  $D_1, D_2$  及  $D_3$  三部分.

$$D_1: \begin{cases} \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2} \\ 0 \leq y \leq a \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} \frac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a, \\ a \leq y \leq 2a \end{cases},$$

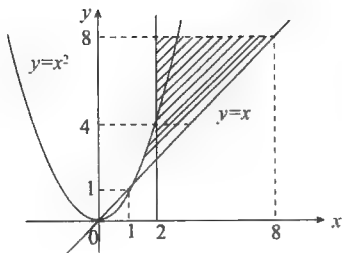


图 11-8

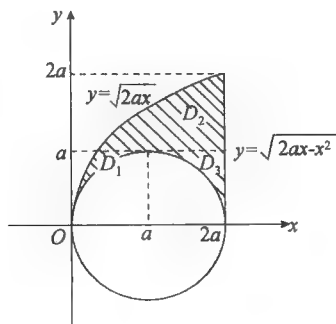


图 11-9

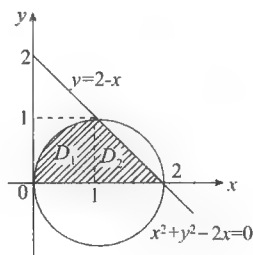


图 11-7

$$D_3: \begin{cases} a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2a \\ 0 \leq y \leq a \end{cases}$$

$$\text{故 } I = \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y) dx.$$

(4) 写出确定  $D$  的不等式组, 并作出其图形, 如图 11-10 所示.

$$D: \begin{cases} -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{故 } I = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

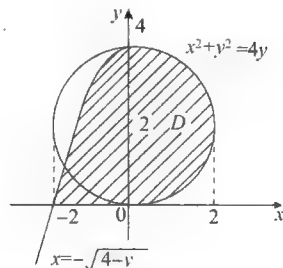


图 11-10

**【例 11.6】** 更换下列积分次序:

$$(1) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(\rho, \theta) d\rho \quad (a \geq 0)$$

$$(2) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} f(\rho, \theta) d\rho.$$

**【解】** 极坐标系中的二重积分, 若先对  $\theta$  后对  $\rho$  进行积分, 则应注意如下两点:

- (1) 积分域  $D$  的边界曲线均用极坐标表示;
- (2) 若以原点  $O$  为圆心的一系列同心圆与域  $D$  的边界曲线中的不同曲线相交, 则应在交点处把  $\rho$  的区间分开处理.

$$(1) D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq a \cos \theta \end{cases}, \text{作图(如图 11-11 所示).}$$

$$I = \int_0^a d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{a}}^{\arccos \frac{\rho}{a}} f(\rho, \theta) d\theta.$$

$$(2) D: \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta \end{cases}, \text{作图(如图 11-12 所示).}$$

$$I = \int_0^{\sqrt{2}a} d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{\rho}{2a}} f(\rho, \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}a}^{2a} d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{2a}}^{\arccos \frac{\rho}{2a}} f(\rho, \theta) d\theta.$$

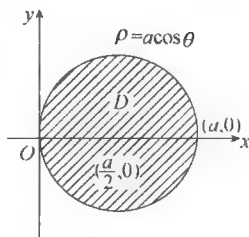


图 11-11

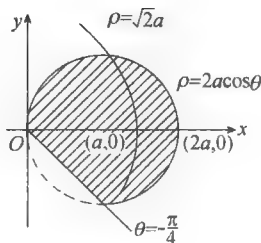


图 11-12

## 题型二 选择二重积分的积分次序

**提示** 凡遇如下形式积分:  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \sin x^2 dx$ ,  $\int \cos x^2 dx$ ,  $\int e^{-x^2} dx$ ,

$\int e^{x^2} dx$ ,  $\int e^{\frac{x}{x}} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$ , 等等, 一定要将其放在后面积分.

**【例 11.7】** 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy, D \text{ 是以 } (0, 0), (1, 1), (0, 1) \text{ 为顶点的三角形 (如图 11-13 所示).}$$

$$(2) \iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy, D \text{ 是由直线 } y = x \text{ 及抛物线 } y = x^2 \text{ 所围成的区域 (如图 11-14 所示).}$$

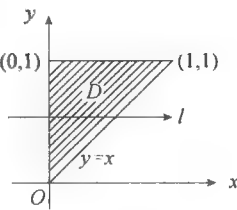


图 11-13



【解】(1) 因为  $\int e^{y^2} dy$  不能用有限形式表示出其结果, 所以它不能先积分, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^y x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 y^2 d(e^{-y^2}) \\ &= -\frac{1}{6} [y^2 e^{-y^2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 y e^{-y^2} dy] \\ &= \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{2}{e} \right) \end{aligned}$$

(2) 因为  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  不能用有限形式表示出其结果, 所以它不能先积分, 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \int_{x^2}^x dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x - x^2) dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \sin x dx = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

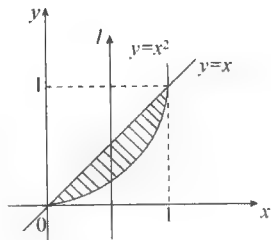


图 11-14

【例 11.8】计算  $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{2}} dx$ .

【解】因为  $\int e^{\frac{x}{2}} dx$  不能用有限形式表示出其结果, 所以  $\int e^{\frac{x}{2}} dx$  不能先计算. 为了改变积分次序, 先要写出右边两积分的积分域所对应的不等式组 ( $D_1, D_2$  所表示的区域如图 11-15 所示).

$$D_1: \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{y}, \\ \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} y \leq x \leq \sqrt{y}, \\ \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{故 } I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{x^2}^x e^{\frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

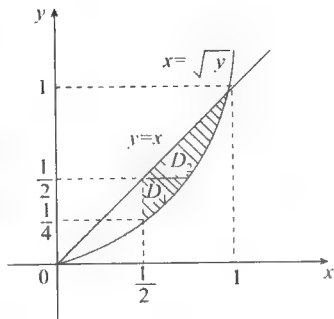


图 11-15

【例 11.9】设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 并设  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 求  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$ .

【解】因为  $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy$  中  $\int_x^1 f(y) dy$  不能直接计算出来.

所以必须考虑更换积分次序, 为此先画出积分域  $D$  的草图, 如图 11-16 所示.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y) dx = \int_0^1 f(y) dy \int_0^y f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx \int_0^x f(y) dy. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 f(x) dx \left( \int_0^x f(y) dy + \int_x^1 f(y) dy \right) \\ &= \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy = A^2, \end{aligned}$$

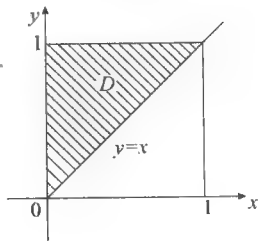


图 11-16

故

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}A^2.$$

### 题型三 二重积分坐标系的选择

**提示** 请参照表 11-1.

**【例 11.10】** 设有一曲顶柱体, 以双曲抛物面  $z = xy$  为顶, 以  $xy$  坐标面为底, 以平面  $y = 0$  为侧, 柱面  $x^2 + y^2 = 1$  为外侧, 柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  为内侧, 试求这个柱体的体积.

**【解】** 由题设可知曲顶柱体在  $xOy$  平面上的投影, 即积分域  $D$  如图 11-17 所示, 由  $D$  的形状可知用极坐标计算曲顶柱体的体积简便.

$$V = \iint_D z dx dy = \iint_D xy dx dy$$

曲线  $L_1: \rho = 2\cos\theta, L_2: \rho = 1$ , 联立解得,  $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{故 } V &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^3 \sin\theta \cos\theta d\rho \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (16\cos^4\theta - 1) \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 16\cos^4\theta) d(\cos^2\theta) = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

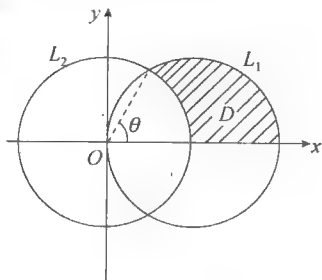


图 11-17

**【例 11.11】** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$  被平面  $z = \frac{a}{4}$  与  $z = \frac{a}{2}$  所夹部分的面积.

**【解】** 如图 11-18 所示, 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $z = \frac{a}{2}, z = \frac{a}{4}$  的交线分别为

$z = \frac{a}{4}$  的交线分别为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = \frac{a}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = \frac{a}{4} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \\ z = \frac{a}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2 \\ z = \frac{a}{4} \end{cases}$$

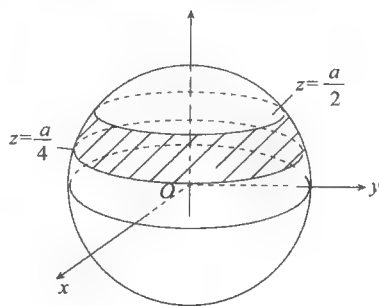


图 11-18

上半球面方程:  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

由于对称性, 只要算出第一卦限的面积再四倍之即可.

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = 4 \iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{15}}{4}a} \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho = 2\pi a \left( -\sqrt{a^2 - \rho^2} \right) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{15}}{4}a} = \frac{1}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$



$$F(t) = \iint_D 1 \cdot dx dy = 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2;$$

④ 当  $t \geq 2$  时,  $f(x, y) = 1$

$$F(t) = \iint_D 1 \cdot dx dy = 1.$$

综上所述, 可知

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}.$$

【例 11.15】计算  $I = \iint_D (x+y) \operatorname{sgn}(x-y) dx dy$ , 其中

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \operatorname{sgn}(x-y) = \begin{cases} 1, & x > y \\ 0, & x = y \\ -1, & x < y \end{cases}.$$

【解】作出积分区域, 如图 11-22 所示.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x+y)(-1) dx dy + \iint_{D_2} (x+y) dx dy \\ &= -\int_0^1 dy \int_0^y (x+y) dx + \int_0^1 dx \int_0^x (x+y) dy = 0. \end{aligned}$$

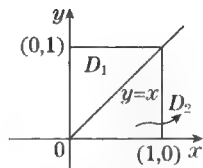
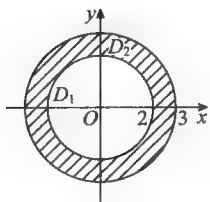


图 11-22

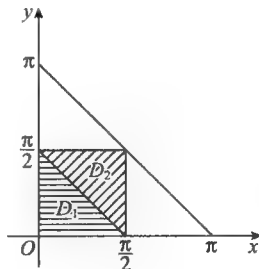
【例 11.16】计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\sigma$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 9$ . [如图 11-23(a) 所示]

(2)  $\iint_D |\cos(x+y)| d\sigma$ ,  $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . [如图 11-23(b) 所示]



(a)



(b)

图 11-23

【解】(1)  $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\sigma$

$$\begin{aligned} &= \iint_{D_1} [4 - (x^2 + y^2)] d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 4) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (\rho^2 - 4) \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[ 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 + 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} - 2\rho^2 \right]_2^3 = \frac{41}{2}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) & \iint_D |\cos(x+y)| d\sigma \\
&= \iint_{D_1} |\cos(x+y)| d\sigma + \iint_{D_2} |\cos(x+y)| d\sigma \\
&= \iint_{D_1} \cos(x+y) d\sigma - \iint_{D_2} \cos(x+y) d\sigma \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \Big|_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin x - \cos x) dx = \pi - 2.
\end{aligned}$$

**【例 11.17】** (1) 计算  $\iint_D [1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy$ , 其中  $D$  (如图 11-24 所示) 是由  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = -1$  所围成的区域,  $f(u)$  为连续函数.

(2) 设  $D$  由  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$  围成, 计算

$$\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} d\sigma.$$

**【解】** (1) 作辅助线  $y = -x^3$ , 则  $D = ABO + BOC$ .

$$\begin{aligned}
& \iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy \\
&= \iint_D x dx dy + \iint_D xyf(x^2 + y^2) dx dy \\
&= \iint_{AOB} x dx dy + \iint_{BOC} x dx dy + \iint_{AOB} xyf(x^2 + y^2) dx dy + \iint_{BOC} xyf(x^2 + y^2) dx dy \\
&= \iint_{BOC} x dx dy = \int_{-1}^0 x dx \int_{x^3}^1 dy = -2 \int_{-1}^0 x^4 dx = -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

$$(2) \text{ 设 } I = \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy$$

$$\stackrel{\text{轮换对称性}}{=} \iint_D \frac{af(y) + bf(x)}{f(x) + f(y)} dx dy,$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } 2I &= \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy + \iint_D \frac{af(y) + bf(x)}{f(y) + f(x)} dx dy \\
&= \iint_D \frac{(a+b)[f(x) + f(y)]}{f(x) + f(y)} dx dy = \iint_D (a+b) dx dy = \frac{1}{2}(a+b).
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy = \frac{1}{4}(a+b).$$

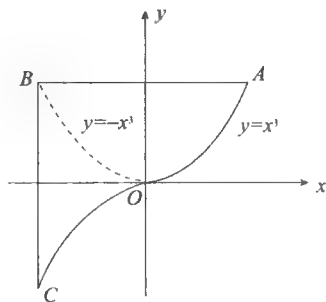


图 11-24

【例 11.18】计算下列积分:

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy, \quad D \begin{cases} |x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

【解】 $I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$  ( $D_1, D_2$  如图 11-25 所示)

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (y-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x^2}^2 + \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (x^2-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{3} |x|^3 dx = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

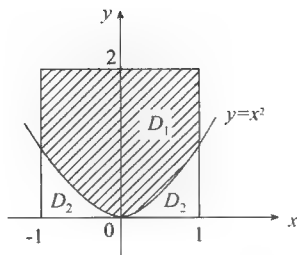


图 11-25

【例 11.19】求  $I = \iint_D \max\{x, y\} e^{-x^2-y^2} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ .

$$\begin{aligned} \text{【解】} I &= \iint_{\substack{D \\ y \geq x}} y e^{-x^2-y^2} d\sigma + \iint_{\substack{D \\ y < x}} x e^{-x^2-y^2} d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_x^{+\infty} y e^{-y^2} dy + \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_y^{+\infty} x e^{-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_x^{+\infty} y e^{-y^2} dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left( -\frac{1}{2} e^{-y^2} \right) \Big|_x^{+\infty} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{2}x)^2} d(\sqrt{2}x) \quad (\sqrt{2}x = t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

### 题型五 二重积分等式的证明

#### 1. 概念型命题的证明

**提示** 凡欲证结论:  $f(x, y) = 0$  的命题, 多数用反证法.

【例 11.20】设  $f(x, y)$  是平面域  $D$  上的连续函数, 且在  $D$  的任何一个子域  $\sigma$  上, 恒有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = 0, \text{ 则在 } D \text{ 内 } f(x, y) \equiv 0.$$

【证】用反证法. 设有一点  $P_0(x_0, y_0) \in D$ , 而  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , 不妨设  $f(x_0, y_0) > 0$ , 由  $f(x, y)$  的连续性, 可知存在一个  $P_0(x_0, y_0)$  的邻域  $\Delta(P_0, \delta) \in D$ , 使得在其中  $f(x, y) > 0$ , 于是, 由积分中值定理, 必存在  $(\xi, \eta) \in \Delta(P_0, \delta)$ , 使

$$\iint_{\Delta(P_0, \delta)} f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)s, \text{ 其中 } s \text{ 为 } \Delta(P_0, \delta) \text{ 的面积, 又因 } f(\xi, \eta) > 0$$

故

$$\iint_{\Delta(P_0, \delta)} f(x, y) d\sigma > 0,$$

与假设矛盾, 即知在  $D$  内有  $f(x, y) \equiv 0$ .

## 2. 幂次积分型的命题的证明

**提示** 证题思路: 累次积分  $\xrightarrow{\text{化为}}$  重积分  $\xrightarrow{\text{化为}}$  另一次序的累次积分.

证题过程中, 常用到重积分对积分域的可加性, 对积分变量的无关性.

**【例 11.21】** 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) 上连续, 试证:

$$2 \int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = \left[ \int_0^a f(x) dx \right]^2.$$

**【证】** 如图 11-26 所示. 设  $I = \left[ \int_0^a f(x) dx \right]^2$ .

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x) f(y) dx dy = \int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy,$$

$$I_2 = \iint_{D_2} f(x) f(y) dx dy,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \int_0^a f(x) dx \int_0^a f(y) dy = \iint_{D_1+D_2} f(x) f(y) dx dy \\ &= \iint_{D_1} f(x) f(y) dx dy + \iint_{D_2} f(x) f(y) dx dy = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但 } I_2 &= \int_0^a f(y) dy \int_y^a f(x) dx = \int_0^a \left[ f(y) \int_y^a f(x) dx \right] dy = \int_0^a \left[ f(t) \int_t^a f(y) dy \right] dt \\ &= \int_0^a f(t) dt \int_t^a f(y) dy = \int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = I_1, \end{aligned}$$

故  $I = 2I_1$ .

**【例 11.22】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 试证:

$$\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy.$$

**【证】**  $\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy$  (如图 11-27 所示)

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left[ f(y) \int_y^b (x-y)^{n-2} dx \right] dy = \int_a^b \frac{1}{n-1} (x-y)^{n-1} \Big|_y^b f(y) dy \\ &= \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy. \end{aligned}$$

## 3. 被积函数为复合函数型命题的证法

**提示** 此类命题一般是用变量替换法证.

**【例 11.23】** 设  $f(x, y)$  在单位圆上有连续的偏导数, 且在边界上取值为零, 证明:

$$f(0, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{x f'_x + y f'_y}{x^2 + y^2} dx dy,$$

其中,  $D$  为圆环域:  $\epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ .

**【证】** 采用极坐标, 令  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \\ \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} = x f'_x + y f'_y, \end{aligned}$$

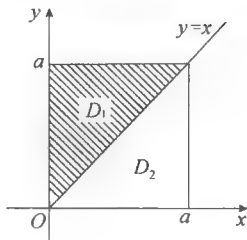


图 11-26

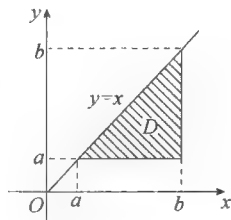


图 11-27

$$\begin{aligned}
 \text{于是} \quad I &= \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D^*} \frac{\rho}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\epsilon^1 \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho \\
 &= \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \Big|_\epsilon^1 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} f(\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta) d\theta,
 \end{aligned}$$

因为  $f(x, y)$  在单位圆的边界上取值为零, 故  $f(\cos \theta, \sin \theta) = 0$ .

再利用积分中值定理, 可知

$$I = - \int_0^{2\pi} f(\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta) d\theta = -2\pi f(\epsilon \cos \theta^*, \epsilon \sin \theta^*), \text{ 其中 } \theta^* \in [0, 2\pi], \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} (-2\pi) f(\epsilon \cos \theta^*, \epsilon \sin \theta^*) \\
 &= f(0, 0).
 \end{aligned}$$

### 题型六 二重积分不等式的证明

**提示** 常用定理和公式: 重积分的性质, 尤其是比较和估值定理以及以下公式:

$$f^2(x) + g^2(x) \geqslant 2f(x)g(x).$$

常用方法: 估值法, 判别式法, 辅助函数法.

**【例 11.24】** 设  $f(x), g(x)$  均在  $[a, b]$  上连续, 证明柯西不等式:

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leqslant \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right] \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right].$$

**【证法一】** 辅助函数法:

$$\begin{aligned}
 \text{令} \quad F(u) &= \left[ \int_a^u f(x)g(x) dx \right]^2 - \left[ \int_a^u f^2(x) dx \right] \left[ \int_a^u g^2(x) dx \right]. \\
 F'(u) &= 2f(u)g(u) \int_a^u f(x)g(x) dx - f^2(u) \int_a^u g^2(x) dx - g^2(u) \int_a^u f^2(x) dx \\
 &= \int_a^u [2f(u)f(x)g(u)g(x) - f^2(u)g^2(x) - g^2(u)f^2(x)] dx \leqslant 0.
 \end{aligned}$$

(因为  $[f(u)g(x)]^2 + [g(u)f(x)]^2 \geqslant 2f(u)g(x)g(u)f(x)$ )

所以  $F(u)$  “ $\searrow$ ”, 又因为  $F(a) = 0$ ,

故  $F(b) \leqslant F(a) = 0$ , 即

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 - \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right] \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right] \leqslant 0,$$

$$\text{亦即} \quad \left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leqslant \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right] \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right].$$

**【证法二】** 判别式法: 设  $t$  为任意实数, 则

$$[f(x) - tg(x)]^2 = f^2(x) - 2tf(x)g(x) + t^2g^2(x) \geqslant 0,$$

因而有

$$\int_a^b [f(x) - tg(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx \geqslant 0,$$

上式中间部分是关于实数  $t$  的二次三项式, 故其判别式仅当  $\Delta = B^2 - 4AC \leqslant 0$  时不等号才成立,



$$\text{即} \quad \left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right] \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right] \leq 0,$$

由此可推出命题成立.

**【证法三】**二重积分法: 令  $I = \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$ ,

则

$$I = \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)dy = \iint_D f^2(x)g^2(y)dxdy,$$

$$I = \int_a^b f^2(y)dy \int_a^b g^2(x)dx = \iint_D f^2(y)g^2(x)dxdy,$$

$$2I = \iint_D [f^2(x)g^2(y) + f^2(y)g^2(x)]dxdy \geq \iint_D [2f(x)g(x)f(y)g(y)]dxdy,$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad I &= \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dy \geq \iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)dxdy \\ &= \int_a^b f(x)g(x)dx \int_a^b f(y)g(y)dy \\ &= \int_a^b f(x)g(x)dx \int_a^b f(x)g(x)dx \\ &= \left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2, \end{aligned}$$

其中,  $D = \{x, y: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ .

**例 11.25** 凡涉及函数平方的命题均可考虑用以上三种方法之中的一种分析处理.

**【例 11.25】**设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的单调增加的连续函数, 证明

$$\frac{\int_0^1 xf^3(x)dx}{\int_0^1 xf^2(x)dx} \geq \frac{\int_0^1 f^3(x)dx}{\int_0^1 f^2(x)dx}.$$

$$\begin{aligned} \text{【证】} \quad \text{令} \quad I &= \int_0^1 xf^3(x)dx \int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 f^3(x)dx \int_0^1 xf^2(x)dx \\ &= \iint_D xf^3(x)f^2(y)dxdy - \iint_D f^3(x)yf^2(y)dxdy \\ &= \iint_D f^3(x)f^2(y)(x-y)dxdy. \end{aligned}$$

①

$$\text{类似处理, 又有} \quad I = \iint_D f^2(x)f^3(y)(y-x)dxdy,$$

②

将式 ① 和式 ② 相加, 并注意到假设即  $(x-y)[f(x)-f(y)] \geq 0$ ,

$$\text{就有} \quad 2I = \iint_D (x-y)f^2(x)f^2(y)[f(x)-f(y)]dxdy \geq 0,$$

即  $I \geq 0$ , 故命题成立.

**【例 11.26】**证明:

$$\frac{\pi}{2} \int_0^N e^{-x^2} x dx \leq \left[ \int_0^N e^{-x^2} dx \right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}N} e^{-x^2} x dx.$$

**【证】**考虑二重积分  $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ , 分别取  $D$  为

$$D_1: x^2 + y^2 \leq N^2, x \geq 0, y \geq 0,$$

$$D_2: 0 \leq x \leq N, 0 \leq y \leq N,$$

$$D_3: x^2 + y^2 \leq 2N^2, x \geq 0, y \geq 0.$$

因为  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$ , 且  $D_1 \subset D_2 \subset D_3$ ,

$$\text{所以 } \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

把左右两个二重积分化为极坐标系下的形式, 于是

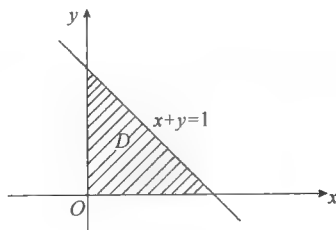
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^N e^{-\rho^2} \rho d\rho \leq \int_0^N e^{-x^2} dx \int_0^N e^{-y^2} dy \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}N} e^{-\rho^2} \rho d\rho,$$

$$\text{故 } \frac{\pi}{2} \int_0^N e^{-x^2} x dx \leq \left[ \int_0^N e^{-x^2} dx \right]^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}N} e^{-x^2} x dx.$$

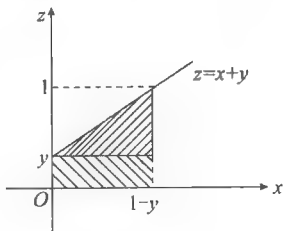
### 题型七 更换三重积分的积分次序

**提示** 计算重积分时, 一般是先画积分域, 再依图按序定出积分限, 此法很直观, 但作图并非易事, 因此通常采用这样的方法: 在交换两个变量的积分次序时, 第三个变量按常数处理, 交换次序结束后, 再恢复变量面目.

**【例 11.27】** 将  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$  按  $y, z, x$  的次序积分重新改写.



(a)



(b)

图 11-28

**【解】** 原式  $\xrightarrow{\text{见图 11-28(a)}} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$

$$\xrightarrow{\text{见图 11-28(b)}} \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_{x-y}^{1-y} f(x, y, z) dx.$$

**【例 11.28】** 将  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$  按  $x, z, y$  的次序积分改写.

**【解】** 由图 11-29, 则

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{1+x^2} dz \int_{\sqrt{x^2-z^2}}^1 f(x, y, z) dy.$$

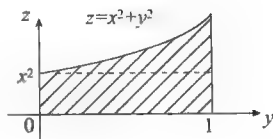


图 11-29

### 题型八 三重积分的计算

**【例 11.29】** 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z) dx dy dz$ ,  $\Omega$  为由平面  $x+y+z=1$  及三坐标面所围之区域

(如图 11-30 所示).

【解】方法一:因  $f(x, y, z) = x + y + z$  及积分域关于  $x, y, z$  均对称,

$$\text{故 } \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &= 3 \iiint_{\Omega} x dx dy dz = 3 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= 3 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x [(1-x-y)^2] \Big|_{1-x}^0 dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

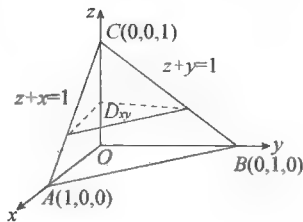


图 11-30

$$\text{方法二: (先 2 后 1)} = 3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 3 \int_0^1 z dz \iint_{D_{xy}} dx dy = 3 \int_0^1 z \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{8}.$$

【例 11.30】计算  $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ ,  $\Omega$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  与抛物面  $x^2 + y^2 = 3z$  所围形体.

【解】凡积分域是由抛物面与其他曲面所围成的形体,一般用柱坐标计算为宜. 在柱坐标系下, 球面与抛物面的交线为

$$\begin{cases} \rho^2 + z^2 = 4, \\ \rho^2 = 3z \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} z = 1 \\ \rho = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } I &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\frac{z}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left( 4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = \frac{13}{4} \pi. \end{aligned}$$

【例 11.31】计算  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲线  $y^2 = 2z, x = 0$  绕  $Oz$  轴旋转一周而成的曲面与两平面  $z = 2, z = 8$  所围之形体.

【解】曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $Oz$  轴旋转, 所得旋转面方程为  $x^2 + y^2 = 2z$ , 如图 11-31 所示.

方法一: 无论从积分域还是从被积函数均可看出本题以选柱坐标系为宜. 由于积分域  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影域的两个不同部分:

$D_1: 0 \leq \rho \leq 2, D_2: 2 \leq \rho \leq 4$  之中过任一点所作平行于  $z$  轴的直线与围成  $\Omega$  的不同曲面相交, 故原积分应视为柱坐标下两个不同的三重积分之和, 即

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \rho d\theta d\rho \int_2^8 \rho^2 dz + \iint_{D_2} \rho d\theta d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_2^8 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 \cdot 6 + 2\pi \int_2^4 \rho^3 \left( 8 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 336\pi. \end{aligned}$$

方法二: (先 2 后 1)

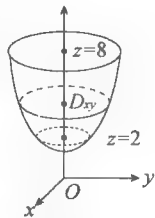


图 11-31

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_2^8 dz \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_2^8 \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{2z}} dz = \frac{\pi}{2} \int_2^8 4z^2 dz = 336\pi.
 \end{aligned}$$

**【例 11.32】** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  与平面  $z = a (a > 0)$  围成的区域, 如图 11-32 所示.

**【解】** 本题积分域为锥体, 既可用柱面坐标系, 也可用球面坐标系. 该处用球面坐标系做, 注意各面均应写成球坐标方程.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a/\cos\varphi} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \varphi \left( \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^{a/\cos\varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{5} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{2}{5} \pi a^5 \cdot \frac{1}{4} \tan^4 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{10} a^5.
 \end{aligned}$$

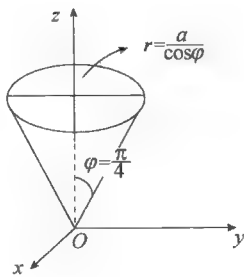


图 11-32

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 积分域关于坐标轴(或坐标面)对称, 被积函数为奇偶函数的二重积分(三重积分), 要想到利用被积函数的奇偶性简化计算.

**【例 11.33】** 设积分区域  $D$  是圆环  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , 求  $\iint_D (2x^3 + 3\sin \frac{x}{y} + 7) dx dy$ .

**【解】** 因积分域  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  关于  $x$  轴,  $y$  轴对称, 且函数  $2x^3$  及  $\sin \frac{x}{y}$  分别是  $x, y$  的奇函数,

将被积函数分项积分, 得

$$\begin{aligned}
 \iint_D (2x^3 + 3\sin \frac{x}{y} + 7) dx dy &= \iint_D 2x^3 dx dy + \iint_D 3\sin \frac{x}{y} dx dy + \iint_D 7 dx dy \\
 &= 0 + 0 + 7 \iint_D dx dy.
 \end{aligned}$$

又由二重积分的几何意义, 知  $\iint_D dx dy = 4\pi - \pi = 3\pi$ .

故  $\iint_D (2x^3 + 3\sin \frac{x}{y} + 7) dx dy = 7 \cdot 3\pi = 21\pi$ .

**【例 11.34】** 设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}$ ,  $x = \sqrt{1+y^2} - \frac{1}{2}$  与直线  $y = -x$  所围成的区域,

$D_1$  是  $D$  在第二象限的部分, 则  $\iint_{D_1} (x \sin y + y \cos x) dx dy =$

(A)  $2 \iint_{D_1} x \sin y dx dy$ .

(B)  $2 \iint_{D_1} y \cos x dx dy$ .

$$(C) 4 \iint_{D_1} (x \sin y + y \cos x) dx dy. \quad (D) 0.$$

【 】

【分析】若被积函数为关于  $x, y$  为奇或偶函数, 但积分域关于  $x, y$  轴不对称, 这时要想到做一条辅助线使积分区域对称.

【解】作出  $D$  的图形, 如图 11-33 所示.

作辅助线  $y = x$ , 则  $D$  被分成两个子区域, 而每个子区域又被坐标轴分成两个小区域, 因为  $D_1$  与  $D_2$  关于  $y$  轴对称,  $x \sin y$  关于  $x$  为奇函数,  $D_3$  与  $D_4$  关于  $x$  轴对称,  $x \sin y$  关于  $y$  为奇函数,

$$\text{所以 } \iint_{D_1+D_2} x \sin y dx dy = 0, \quad \iint_{D_3+D_4} x \sin y dx dy = 0.$$

又  $y \cos x$  关于  $x$  为偶函数, 关于  $y$  为奇函数,

$$\text{所以 } \iint_{D_1+D_2} y \cos x dx dy = 2 \iint_{D_1} y \cos x dx dy, \quad \iint_{D_3+D_4} y \cos x dx dy = 0$$

$$\text{故 } \iint_D (x \sin y + y \cos x) dx dy = 2 \iint_{D_1} y \cos x dx dy, \text{ 即选 (B).}$$

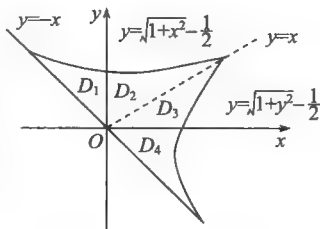


图 11-33

## 二、综合题解析

【例 11.35】设有一高度为  $h(t)$  ( $t$  为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面满足方程  $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$  (设长度单位为厘米, 时间单位为小时), 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为 130 (厘米) 的雪堆全部融化需多少小时?

【解】记  $V$  为雪堆体积,  $S$  为雪堆的侧面积, 则

$$V = \int_0^{h(t)} dz \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]} dx dy = \int_0^{h(t)} \frac{1}{2} \pi [h^2(t) - h(t)z] dz = \frac{\pi}{4} h^3(t),$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + \frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}} dx dy \\ &= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h^2(t) + 16r^2]^{\frac{1}{2}} r dr = \frac{13\pi h^2(t)}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{由题知 } \frac{dV}{dt} = -0.9S, \text{ 所以 } \frac{dh(t)}{dt} = -\frac{13}{10}, \text{ 因此 } h(t) = -\frac{13}{10}t + C.$$

$$\text{由 } h(0) = 130, \text{ 得 } h(t) = -\frac{13}{10}t + 130. \quad \text{令 } h(t) = 0, \text{ 得 } t = 100 (\text{小时}).$$

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时.

【例 11.36】设  $a = \iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 求:

(1)  $a$  的值;

$$(2) \text{ 常数 } b \text{ 的值, 其中 } b \text{ 满足 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^{\frac{2x}{\sin 1}} = \frac{1}{3} \int_b^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

【分析】(1) 由于  $D$  是角域的一部分, 因此采用极坐标计算表示  $a$  的二重积分.

(2) 先将(1)算得的  $a$  代入  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^{\frac{2x}{\sin 1}}$ , 计算它的值, 然后计算  $\frac{1}{3} \int_b^{+\infty} x e^{-x} dx$ , 令两者相等即可确定  $b$  的值.

【解】(1) 在极坐标下,

$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$  (图 11-34), 所以,

$$a = \iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \cos \left( \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right) r dr$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left( \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) \cdot \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{1}{2 \cos^2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)} d \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] d \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \sin \left[ \tan \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin 1.$$

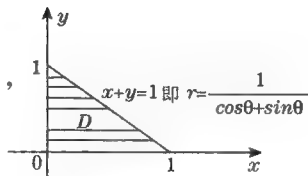


图 11-34

(2) 对于(1)的  $a = \frac{1}{2} \sin 1$  得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^{\frac{2x}{\sin 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left( 1 - \frac{a}{x} \right)^x}{\left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x} \right]^{\frac{2}{\sin 1}} = \left( \frac{e^{-a}}{e^a} \right)^{\frac{2}{\sin 1}} = (e^{-2 \cdot \frac{1}{2} \sin 1})^{\frac{2}{\sin 1}} = e^{-2}.$$

此外,  $\frac{1}{3} \int_b^{+\infty} x e^{-x} dx = -\frac{1}{3} (x+1) e^{-x} \Big|_b^{+\infty} = \frac{1}{3} (b+1) e^{-b}.$

于是由题设得

$$e^{-2} = \frac{1}{3} (b+1) e^{-b}, \text{ 即 } b = 2.$$

### 习 题 十 一

1. 将二重积分  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$  化为累次积分(两种形式), 其中积分区域  $D$  给定如下:

(1)  $D$ : 由  $y^2 = 8x$  与  $x^2 = y$  所围之区域;

(2)  $D$ : 由  $x = 3, x = 5, x - 2y + 1 = 0$  及  $x - 2y + 7 = 0$  所围之区域;

(3)  $D$ : 由  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x$  及  $x > 0$  所围之区域;

(4)  $D$ :  $|x| + |y| \leq 1.$

2. 改变下列积分次序.

(1)  $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy;$

(2)  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy;$

(3)  $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy.$

3. 将二重积分  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$  化为极坐标形式的累次积分, 其中:

(1)  $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, y \geq 0, (b > a > 0)$ ;

(2)  $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$ ;

(3)  $D: 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ .

4. 求解下列二重积分:

(1)  $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$ ;

(2)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ ;

(3)  $\iint_D \frac{\sin xy}{x} dx dy$ ,  $D$ : 由  $x = y^2$  及  $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$  所围成;

(4)  $\iint_D \frac{y}{x^5} dx dy$ ,  $D$ : 为  $y = x^4 - x^3$  的上凸弧段部分与  $x$  轴所围成的曲边梯形;

(5)  $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $D: y \geq x$  及  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ .

5. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D: \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ , 并求上述二重积分当  $\epsilon \rightarrow 0^+$  时的极限;

(2)  $\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy$ ;

(3)  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$  及  $y \geq 0$ .

6. 设  $f(t)$  是半径为  $t$  的圆的周长, 试证:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^a f(\rho) e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho.$$

7. 设  $p(x)$  是  $[a, b]$  上非负连续函数,  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续且单调递增, 证明:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

8. 设  $m, n$  均为正整数, 且其中至少有一个是奇数, 证明:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

9. 设函数  $f(x)$  在  $[0, t]$  上连续, 令  $F(t) = \int_0^t dz \int_0^z dy \int_0^y (y-z)^2 f(x) dx$ ,

证明:  $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{3} \int_0^t (t-x)^3 f(x) dx$ .

10. 计算  $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{1-z} dz$ .

11.  $\iiint_{\Omega} (2y + \sqrt{x^2 + z^2}) dx dy dz$ ,  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  及  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$  ( $y \geq 0, a > 0$ ) 所围之区域.

12. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} (1+x+y+z)^{-3} dv$ ,  $\Omega$ : 由  $x+y+z=1, x=0, y=0$  及  $z=0$  所围形体;

(2)  $\iiint_{\Omega} e^{x+y+z} dv$ ,  $\Omega$ :  $y=1, y=-x, x=0, z=0$  及  $z=-x$  所围形体;

(3)  $\iiint_{\Omega} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} dv$ ,  $\Omega$ : 由  $yOz$  面上的区域  $D$  绕  $z$  轴旋转一周而成的空间区域, 其中

$$D = \{(x, y) \mid y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 2y - 1, y \geq 0, z \geq 0\};$$

(4)  $\iiint_{\Omega} xy dv$ ,  $\Omega$ : 由  $z=xy, x+y=1$ , 及  $z=0$  所围形体;

(5)  $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$ ,  $\Omega$ : 由  $x^2+y^2+z^2=1$  与  $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$  围成的空间区域;

(6)  $\iiint_{\Omega} r^2 dv$ ,  $\Omega$  为底面是单位正方形, 高为  $h$  的正四棱锥体, 而  $r$  为锥体中任一点到顶点  $P$  的距离.

13. 求由下列曲线所围图形的面积.

(1)  $xy=a^2, x+y=\frac{5}{2}a (a>0)$ ;

(2)  $x+y=a, x+y=b, y=ax, y=\beta x (0<a<b, 0<\alpha<\beta)$ ;

(3)  $(x^2+y^2)^2=2a^2xy (a>0)$ ;

(4)  $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2) (a>0)$ .

14. 求曲面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  夹在两曲面  $x^2+y^2=y, x^2+y^2=2y$  之间的部分的面积.

15. 求下列曲面所围形体的体积.

(1)  $z=xy, x+y+z=1, z=0$ ;

(2)  $z=x^2+y^2, x^2+y^2=x, x^2+y^2=2x, z=0$ ;

(3)  $z=8-x^2-y^2, z=x^2+y^2$ .

16. 将三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  化为柱面坐标的累次积分, 其中  $\Omega$  是由  $x^2+y^2=z^2, z=1$  及  $z=4$  所围成.

17. 改变下列三重积分的积分次序:

(1)  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$ ;

(2)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$ .

18. 已知质量为  $M$ , 半径为  $a$  的球上任一点的密度与该点到球心的距离成正比, 求球关于切线的转动惯量.

19. 有一半半径为  $R$ , 高为  $H$  的均匀圆柱体, 其中心轴上低于下底为  $a$  处有一质量为  $m$  的质点, 试求此柱体对该点的引力.

20. 设半径为  $R$  的球面  $\Sigma$  的球心在定球面  $x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0)$  上, 问当  $R$  为何值时, 球面  $\Sigma$  在定球面内部的那部分面积最大?



## 参 考 答 案

1. (1)  $I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x, y) dy;$   
 (2)  $I = \int_2^3 dy \int_3^{2y-1} f(x, y) dx = \int_3^5 dy \int_3^5 f(x, y) dx = \int_5^6 dy \int_{2y-7}^5 f(x, y) dx = \int_3^5 dx \int_{\frac{x+1}{2}}^{\frac{x+7}{2}} f(x, y) dy;$   
 (3)  $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$   
 (4)  $I = \int_{-1}^0 dy \int_{-y-1}^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx$   
 $= \int_{-1}^0 dx \int_{-x-1}^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy.$
2. (1)  $I = \int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx = \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx;$   
 (2)  $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx;$   
 (3)  $I = \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$
3. (1)  $I = \int_0^\pi d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$   
 (2)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$   
 (3)  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$
4. (1)  $\frac{4}{\pi^3}(\pi + 2);$   
 (2)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  (提示: 先交换次序, 对  $\int_0^1 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = -\int_0^1 y de^{-\frac{y^2}{2}}$  分部积分);  
 (3) 0 (提示: 利用对称性);  
 (4)  $-\frac{7}{48}$  (提示: 先求上凸区间,  $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^4-x^3}^{\frac{1}{x^6}} \frac{y}{x^6} dy$ );  
 (5) 0 (提示: 利用对称性).
5. (1)  $\pi[\epsilon^2 - \epsilon^2 \ln \epsilon^3 - 1], -\pi;$  (2)  $\pi[f(a) - f(0)];$  (3)  $\frac{\pi}{8}(\pi - 2).$
6. 略.
7. 提示: 作辅助函数.  

$$F(x) = \int_a^x p(t)f(t)dt \int_a^x p(t)g(t)dt - \int_a^x p(t)dt \int_a^x p(t)f(t)g(t)dt, \text{利用单调性证明.}$$
8. 利用对称性性质.
9. 提示: 先求导, 再交换积分次序.
10.  $\frac{1}{2}(1 - \sin 1)$  (提示: 化为先对  $y$ , 后对  $x$ , 再对  $z$  积分).
11.  $\frac{15\pi}{16}(2 + \pi)a^4$  (提示: 令  $x = r \sin \varphi \cos \theta, z = r \sin \varphi \sin \theta, y = r \cos \varphi$ ).

12. (1)  $\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8})$ ; (2)  $3 - e$ ; (3)  $\frac{89}{75}\pi$ ; (4)  $\frac{1}{180}$ ; (5)  $\frac{\pi}{20}$ ; (6)  $\frac{h}{30}(6h^2 + 1)$ .

13. (1)  $\frac{a^2}{8}(15 - 16\ln 2)$ ; (2)  $\frac{(b^2 - a^2)(\beta - \alpha)}{2(\beta + 1)(\alpha + 1)}$  (提示: 作换元  $u = x + y, D = \frac{y}{x}$ );

(3)  $a^2$  (提示: 化为极坐标  $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ ); (4)  $\frac{\pi}{4}a^2$  (提示: 化为极坐标,  $r = a \cos 3\theta$ ).

14.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$ .

15. (1)  $\frac{17}{12} - 2\ln 2$ ; (2)  $\frac{45}{32}\pi$ ; (3)  $16\pi$ .

16.  $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_1^4 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 \rho d\rho \int_\rho^4 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz$ .

17. (1)  $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{x-x^2}}^1 f(x, y, z) dy$

或  $I = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_{\sqrt{x-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_{\sqrt{x}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx +$

$\int_1^2 dz \int_{\sqrt{x-1}}^1 dy \int_{\sqrt{x-y^2}}^1 f(x, y, z) dx$ .

(2)  $I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_{x-x}^{1-x} f(x, y, z) dy$

或  $I = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{x-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx$ .

18.  $J = \frac{13}{9}Ma^2$ .

19.  $F = 2\pi\mu\rho m[H - \sqrt{R^2 + (a+H)^2} + \sqrt{R^2 + a^2}]$ ,

其中  $\mu$  为比例系数,  $\rho$  为柱体的密度.

20.  $R = \frac{4}{3}a$ .

## 第十二章 曲线、曲面积分及场论初步

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、曲线积分的概念和性质

##### (一) 对弧长的曲线积分

###### 1. 定义

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x, y) dl = \lim_{\|\Delta l\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

物理意义: 线密度为  $\mu = f(x, y)$  的弧段  $L_{\widehat{AB}}$  的质量, 即

$$M = \int_{L(\widehat{AB})} f(x, y) dl.$$

###### 2. 性质

(1) 与积分路径的方向无关, 即

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x, y) dl = \int_{L(\widehat{BA})} f(x, y) dl.$$

(2) 对路径具有可加性, 即若  $\widehat{AB}$  由  $C_1, C_2, \dots, C_k$  所组成, 且任何两线段之间无重叠部分, 则

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x, y) dl = \int_{C_1} f(x, y) dl + \int_{C_2} f(x, y) dl + \dots + \int_{C_k} f(x, y) dl.$$

##### (二) 对坐标的曲线积分

###### 1. 定义

$$\begin{aligned} \int_{L(\widehat{AB})} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ = \lim_{\|\Delta l\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]. \end{aligned}$$

物理意义: 变力  $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  沿  $\widehat{AB}$  所做的功

$$\begin{aligned} W &= \int_{L(\widehat{AB})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(\widehat{AB})} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_{L(\widehat{AB})} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

###### 2. 性质

(1) 与积分路径的方向有关, 若路径的方向改变, 则积分变号, 即

$$\int_{L(\widehat{AB})} Pdx + Qdy = - \int_{L(\widehat{BA})} Pdx + Qdy.$$

(2) 对路径具有可加性. 若  $\widehat{AB}$  由  $C_1, C_2, \dots, C_k$  所组成, 且任何两线段之间无重叠部分, 则

$$\begin{aligned} & \int_{L(\widehat{AB})} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy + \dots + \int_{C_k} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

以上两种曲线积分可分别推广到空间中去, 即

$$\begin{aligned} & \int_{L(\widehat{AB})} f(x, y, z) dl = \lim_{\|\Delta l\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta l_i. \\ & \int_{L(\widehat{AB})} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \lim_{\|\Delta l\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta z_i]. \end{aligned}$$

### (三) 两种曲线积分之间的关系

$$\begin{aligned} \int_{L(\widehat{AB})} P dx + Q dy + R dz &= \int_{L(\widehat{AB})} \left( P \frac{dx}{dl} + Q \frac{dy}{dl} + R \frac{dz}{dl} \right) dl \\ &= \int_{L(\widehat{AB})} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl \end{aligned}$$

其中,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲线弧  $\widehat{AB}$  方向的切线的方向余弦, 对坐标的曲线积分有时写成“点积”形式.

$$\int_{L(\widehat{AB})} P dx + Q dy + R dz = \int_{L(\widehat{AB})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \text{ 其中 } \mathbf{F} = \{P, Q, R\}, d\mathbf{l} = \{dx, dy, dz\}.$$

## 二、曲线积分的基本定理

**定理 1 (格林定理)** 设函数  $P(x, y), Q(x, y)$  以及它们的一阶偏导数在闭域  $D$  上连续, 则有公

$$\text{式} \quad \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中,  $L$  是闭区域  $D$  的边界曲线,  $L$  是按正向取定的. (所谓  $L$  的方向是指有人沿  $L$  的某方向前进时, 区域  $D$  始终在它的左手一边)

应用格林定理时易出的差错:

- 1° 忽视  $P(x, y), Q(x, y)$  在闭域  $D$  上一阶偏导数的连续性;
- 2° 忘记曲线  $L$  是封闭的, 并且是取正向.

**定理 2 (曲线积分与路径无关的条件)**

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \text{ 与路径无关} \Leftrightarrow \oint_{L'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

其中  $L'$  为  $D$  中任一闭曲线.

**定理 3** 设  $P(x, y), Q(x, y)$  在单连通域  $D$  内有一阶连续偏导数, 则

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ 与路径无关} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D, \\ & P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ 为 } u(x, y) \text{ 的全微分} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D. \end{aligned}$$

**定理 4** 设函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在域  $\Omega$  内有连续的一阶偏导数, 则  $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  为某函数  $u(x, y, z)$  的全微分  $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**定理 5** 设  $P(x, y), Q(x, y)$  在域  $D$  内有一阶连续的偏导数, 且恒有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $L_1$  与  $L_2$  为  $D$  内任意两条同向闭曲线, 且各自所围的区域中有相同的不属于  $D$  的点, 则

$$\oint_{L_1} Pdx + Qdy = \oint_{L_2} Pdx + Qdy.$$

### 三、曲面积分的概念和性质

#### (一) 对面积的曲面积分

##### 1. 定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta s_i.$$

物理意义: 面密度为  $u = f(x, y, z)$  的曲面  $\Sigma$  的质量, 即  $M = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ .

##### 2. 性质

(1) 与曲面  $\Sigma$  的侧面选择无关, 即  $\iint_{\Sigma} = \iint_{-\Sigma}$  其中  $-\Sigma$  为曲面  $\Sigma$  的另一侧.

(2) 对曲面具有可加性, 若  $\Sigma$  由  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  组成, 并且任意两块子曲面没有重叠部分, 则

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \dots + \iint_{\Sigma_k}.$$

#### (二) 对坐标的曲面积分

##### 1. 定义

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P_i \Delta \sigma_{i, yz} + Q_i \Delta \sigma_{i, zx} + R_i \Delta \sigma_{i, xy}).$$

物理意义: 流体密度  $\rho = 1$ , 速度场为  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , 单位时间内流过曲面  $\Sigma$  一侧的流量

$Q$ , 即 
$$Q = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

##### 2. 定义

(1) 若  $\Sigma$  由  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  组成, 并且任意两块子曲面没有重叠部分, 则

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \dots + \iint_{\Sigma_k}.$$

(2) 积分与曲面的侧有关, 即

$$\iint_{\Sigma} = -\iint_{-\Sigma}, \quad \text{其中, } -\Sigma \text{ 表示曲面 } \Sigma \text{ 的另一侧.}$$

#### (三) 两种曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} \left( P \frac{dydz}{dS} + Q \frac{dzdx}{dS} + R \frac{dxdy}{dS} \right) dS$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

其中,  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  为曲面  $\Sigma$  在  $P(x, y, z)$  点处的法线的方向余弦. 对坐标的曲面积分经常写成点积形式

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \{dydz, dzdx, dxdy\} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

其中,  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ ,  $d\mathbf{S} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$ .

#### 四、曲面积分的基本定理

**定理 1 (奥—高公式)** 设  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在闭域  $\Omega$  上具有连续的一阶偏导数, 则

$$\oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

其中,  $\Sigma$  是闭域  $\Omega$  的边界曲面的外侧.

应用奥—高公式时易出的差错:

- (1) 搞不清  $P, Q, R$  是对什么变量求偏导;
- (2) 不满足奥—高公式的条件, 用公式计算;
- (3) 忽略了  $\Sigma$  的取向, 注意是取闭曲面的外侧.

**定理 2 (斯托克斯公式)** 设  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  所张成的空间域  $\Omega$  内有一阶连续的偏导数,  $L$  为曲面  $\Sigma$  的边界曲线, 则

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

其中, 曲线  $L$  的方向与曲面  $\Sigma$  所取侧的法线方向满足右手法则, 即用右手四指表示  $L$  的方向, 则拇指的指向就是曲面  $\Sigma$  所取侧的法线方向, 如图 12-1 所示.

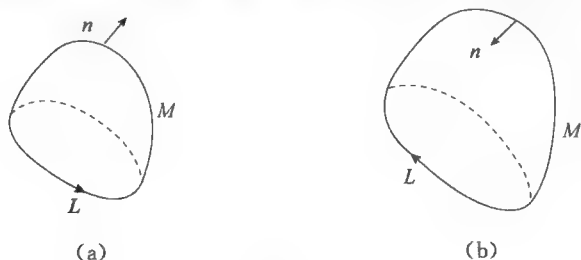


图 12-1

#### 五、场论初步

##### 1. 方向导数

设  $u = f(x, y, z)$  为定义于空间域  $\Omega$  的一个三元函数,  $P(x, y, z)$  为  $\Omega$  内一点,  $l$  为过  $P$  点的任一有向线段,  $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  为  $l$  上与  $P$  点邻近的另一点, 若  $P'$  沿  $l$  趋于  $P$  时极限 (见图 12-2):

$$\lim_{P' \rightarrow P} \frac{f(P') - f(P)}{|PP'|}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\rho}$$

存在, 则此极限就称为  $f(x, y, z)$  在  $P$  点沿  $l$  方向的方向导数, 记为  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P$ , 或  $\left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l} \right|_P$ .

方向导数的计算公式:

设三元函数  $u = f(x, y, z)$  在  $P(x, y, z)$  点可微, 过  $P(x, y, z)$  点的有向线段  $l$  的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_P.$$

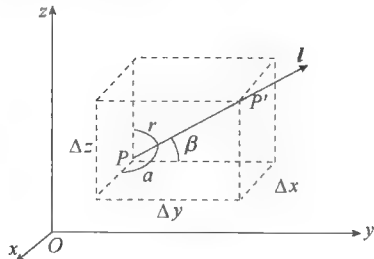


图 12-2

## 2. 梯度 (grad $u$ )

设有一数量场  $u = u(x, y, z)$ , 在场中  $P$  点处存在一个矢量, 若其方向为  $u$  在该点处方向导数取最大值的方向, 其大小为该点处方向导数的最大值, 则该矢量称为数量场  $u(x, y, z)$  在该点处的梯度, 记作  $\text{grad } u$ .

梯度  $\text{grad } u$  的计算公式:

设数量场  $u = u(x, y, z)$  具有连续的偏导数, 则

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

## 3. 通量

设有一矢量场  $\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ , 则称沿场中有向曲面  $\Sigma$  某一侧的曲面积分

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{为 } \mathbf{A} \text{ 穿过曲面 } \Sigma \text{ 这一侧的通量.}$$

通量的计算公式:

$$\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

$$d\mathbf{S} = dydz\mathbf{i} + dzdx\mathbf{j} + dxdy\mathbf{k},$$

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

## 4. 散度 (div $\mathbf{A}$ )

设有一矢量场  $\mathbf{A}(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$  为场中任一点, 在  $P$  点的某邻域内作一包含  $P$  点在其内的闭曲面  $\Delta\Sigma$ , 它所围成的小区域及其体积记为  $\Delta v$ , 以  $\Delta\Phi$  表示从  $\Delta\Sigma$  内穿出的通量, 若当  $\Delta v \rightarrow 0$ , 即  $\Delta v$  缩成  $P$  点时, 极限

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

存在, 则该极限值就称为矢量场  $\mathbf{A}$  在  $P$  点的散度, 记为  $\text{div } \mathbf{A}$ , 即

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}.$$

散度的计算公式:

设  $\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ ;  $P, Q, R$  均可导, 则  $\mathbf{A}$  在  $P(x, y, z)$  点处的

散度为 
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

### 5. 旋度 ( $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ )

定义略, 其计算公式:

设有矢量场  $\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ , 其中  $P, Q, R$  均有连续的一阶偏导数, 则旋度  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  为

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

#### 【例 12.1】填空题.

- (1) 设  $\mathbf{n}$  是曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  在点  $P(1, 1, 1)$  处指向外侧的法矢量, 则  $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$  在  $P$  点处沿  $\mathbf{n}$  方向的方向导数 = \_\_\_\_\_.
- (2) 矢量场  $\mathbf{A} = xy^2\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + x\ln(1 + z^2)\mathbf{k}$  在点  $P(1, 1, 0)$  处的散度  $\operatorname{div} \mathbf{A} =$  \_\_\_\_\_.
- (3) 函数  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  在点  $M(1, 2, -2)$  处的梯度为  $\operatorname{grad} u|_M =$  \_\_\_\_\_.
- (4) 设数量场  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 则  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$  \_\_\_\_\_.

【解】(1) 令  $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$ ,

因为  $F'_x|_P = 4x|_P = 4, F'_y|_P = 6y|_P = 6, F'_z|_P = 2z|_P = 2$ ,

所以  $\mathbf{n} = \{4, 6, 2\}$ , 其方向余弦分别为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = \left. \frac{6x}{z \sqrt{6x^2 + 8y^2}} \right|_P = \frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = \left. \frac{8y}{z \sqrt{6x^2 + 8y^2}} \right|_P = \frac{8}{\sqrt{14}},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = \left. -\frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z^2} \right|_P = -\sqrt{14},$$

故 
$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_P = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_P = \frac{11}{7}.$$

(2)  $P(x, y, z) = xy^2, Q(x, y, z) = ye^z, R(x, y, z) = x\ln(1 + z^2)$ ,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_P = y^2 \Big|_P = 1, \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_P = e^z \Big|_P = 1, \left. \frac{\partial R}{\partial z} \right|_P = \frac{2xz}{1 + z^2} \Big|_P = 0,$$

故 
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_P = 2.$$

(3)  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \left. \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \right|_M = \frac{2}{9}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = \left. \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \right|_M = \frac{4}{9},$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = \left. \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \right|_M = -\frac{4}{9}.$$



$$\text{故 } \operatorname{grad} u \Big|_M = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) \Big|_M = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \right\}.$$

$$(4) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2),$$

先求梯度  $\operatorname{grad} u$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{x\mathbf{i}}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y\mathbf{j}}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

再求  $\operatorname{grad} u$  的散度.

$$P = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Q = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad R = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\text{故 } \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

【例 12.2】已知数量场  $v(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ , 求沿  $v(x, y, z)$  的梯度方向的方向导数.

【解】 $\operatorname{grad} v = \frac{2x}{a^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{b^2} \mathbf{j} + \frac{2z}{c^2} \mathbf{k}$ , 其方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x}{a^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

$$v'_x = \frac{2x}{a^2}, \quad v'_y = \frac{2y}{b^2}, \quad v'_z = \frac{2z}{c^2}.$$

$$\text{故 } \frac{\partial v}{\partial (\operatorname{grad} u)} = \frac{2x}{a^2} \frac{x}{a^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} + \frac{2y}{b^2} \frac{y}{b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} + \frac{2z}{c^2} \frac{z}{c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

【例 12.3】设函数  $u(x, y, z) = \cos^2(xy) + \frac{y}{z^2}$ , 直线  $l$  是直线  $L: \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}z = 1 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$  在平面  $x + y -$

$z = 5$  上的投影, 求函数  $u(x, y, z)$  在  $M(0, 0, 1)$  点沿直线  $l$  的方向导数 (规定  $l$  与  $z$  轴正向夹角为锐角).

【解】方法一:  $u'_x \Big|_M = -2\cos(xy)\sin(xy)y \Big|_M = 0,$

$$u'_y \Big|_M = \left[ -2\cos(xy)\sin(xy)x + \frac{1}{z^2} \right] \Big|_M = 1,$$

$$u'_z \Big|_M = -\frac{2y}{z^3} \Big|_M = 0.$$

设  $\mathbf{n}_\pi, \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_l$  分别为平面  $x + y - z = 5$  的法向量, 直线  $L$ , 直线  $l$  的方向向量.

由于  $l$  在平面上, 所以  $\mathbf{n}_\pi \cdot \mathbf{n}_l = 0$ , 设  $\mathbf{n}_l = \{l, m, n\}$  而  $\mathbf{n}_\pi = \{1, 1, -1\}$ , 于是有

$$l + m - n = 0,$$

①

$$\mathbf{n}_L = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\},$$

$$\cos(\mathbf{n}_{\pi}, \mathbf{n}_L) = \frac{\mathbf{n}_{\pi} \cdot \mathbf{n}_L}{|\mathbf{n}_{\pi}| |\mathbf{n}_L|} = \frac{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{29}{36}}} = \frac{5}{\sqrt{3} \sqrt{29}},$$

$$\sin(\mathbf{n}_{\pi}, \mathbf{n}_L) = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3} \sqrt{29}},$$

$$\cos(\mathbf{n}_l, \mathbf{n}_L) = \frac{\frac{1}{2}l + \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{\frac{29}{36}}} = \frac{3l + 4m + 2n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{29}},$$

$$\text{因为 } \cos(\mathbf{n}_l, \mathbf{n}_L) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\mathbf{n}_{\pi}, \mathbf{n}_L)\right] = \sin(\mathbf{n}_{\pi}, \mathbf{n}_L),$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3} \sqrt{29}} = \frac{3l + 4m + 2n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{29}} \Rightarrow (3l + 4m + 2n)^2 = \frac{62}{3}(l^2 + m^2 + n^2).$$

$$\text{再由 } ① \Rightarrow (7l - 4m)^2 = 0 \Rightarrow l = \frac{4}{7}m, n = \frac{11}{7}m,$$

$$\text{所以 } \mathbf{n}_L = \left\{ \frac{7}{4}, 1, \frac{11}{7} \right\}, \text{其方向余弦分别为}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{186}}, \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{186}}, \cos\gamma = \frac{11}{\sqrt{186}},$$

$$\text{故 } \frac{\partial u}{\partial l} = 0 \times \cos\alpha + 1 \times \cos\beta + 0 \times \cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{186}}.$$

方法二: 投影平面:  $\lambda(2x - 3z - 6) + y - 2z + 4 = 0$ ,

$$\text{即 } 2\lambda x + y - (3\lambda + 2)z - 6\lambda + 4 = 0.$$

投影平面法向量:  $\mathbf{n}_{\text{投}} = \{2\lambda, 1, -3\lambda - 2\}$ ,

① 与平面  $x + y - z = 5$  的法向量  $\mathbf{n} = \{1, 1, -1\}$  互相垂直.

$$\text{所以 } 2\lambda + 1 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5}.$$

投影平面方程为:  $-6x + 5y - z + 38 = 0$ ,

$$l \text{ 的方程为: } \begin{cases} x + y - z = 5, \\ -6x + 5y - z + 38 = 0. \end{cases}$$

$$l \text{ 的方向向量: } \mathbf{l} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{186}}, \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{186}}, \cos\gamma = \frac{11}{\sqrt{186}},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 1, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial l} = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \gamma = \frac{7}{\sqrt{186}}.$$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 对弧长的曲线积分的计算

**提示** 解法:化为参变量的定积分计算.

**解题程序:**

(1) 画出积分路径的图形.

(2) 把路径  $\widehat{AB}$  的参数式写出来:  $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$ .

(3) 将  $dl$  写成参变量的微分式, 并计算

$$\int_{L(\widehat{AB})} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} dt.$$

(注: 参数大的作为上限  $\beta$ , 小的为下限  $\alpha$ )

**【例 12.4】** 计算  $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$ ,  $L$  为由圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 直线  $y = x$  及  $x$  轴在第一象限中所围图形的边界(如图 12-3 所示).

$$\text{【解】} \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_{\overline{OA}} + \int_{\widehat{AB}} + \int_{\overline{BO}},$$

$$\overline{OA}: y = 0, 0 \leq x \leq a,$$

$$\int_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

$$\widehat{AB}: x = \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a dt = \frac{\pi}{4} a e^a.$$

$$\overline{BO}: y = x, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} a,$$

$$\int_{\overline{BO}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2} a} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = e^a - 1.$$

$$\text{故 } \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = 2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a.$$

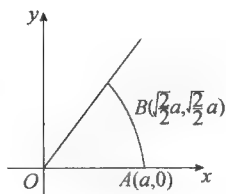


图 12-3

**【例 12.5】** 计算  $I = \int_L |y| dl$ , 其中  $L: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ , 其中  $a > 0$ .

**【解】** 由  $L$  的表达式可知用极坐标简便, 令  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ,

$$\text{则 } L: \rho^4 = a^2 \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Rightarrow \rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

因为路径和被积函数  $f(x, y) = |y|$  均关于  $x$  轴、 $y$  轴、原点对称, 所以只要算出第一象限

的曲线积分再 4 倍即可.

$$\text{令 } \rho^2 = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}. \text{ 又 } dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho \sin \theta \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin \theta \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = 4a^2 \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

【例 12.6】计算曲线积分  $I = \int_L \sqrt{2y^2 + z^2} dl$ ,  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x = y$  相交的圆周, 其中  $a > 0$ .

【解】 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$ , 于是

$$I = \int_L \sqrt{a^2} dl = a \int_L dl = al = a \cdot (2\pi a) = 2\pi a^2.$$

曲线积分可以将曲线  $L$  的表达式直接代入积分式, 而对曲面积分也可以作类似处理, 这一点与重积分是完全不同的, 请读者注意.

## 题型二 对坐标的曲线积分的计算

提示: 解法有四种:

(1) 化为参数的定积分求解.

曲线  $L(\widehat{AB})$ :  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ,  $\begin{matrix} \alpha \leftrightarrow \widehat{AB} \text{ 的起点 } A \\ \beta \leftrightarrow \widehat{AB} \text{ 的终点 } B \end{matrix}$  ( $\beta$  不一定比  $\alpha$  大!), 则

$$\int_{L(\widehat{AB})} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t)), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)] dt.$$

特例  $L: y = \varphi(x)$  把  $x$  作为参数.  $L: x = \psi(y)$  把  $y$  作为参数.

(2) 利用格林公式求解  $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ , 注意条件!

(3)  $L$  不闭合 + 边  $L^*$ , 使  $L + L^*$  闭合, 再用格林公式

$$\begin{aligned} \int_L Pdx + Qdy &= \oint_{L+L^*} Pdx + Qdy - \int_{L^*} Pdx + Qdy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{L^*} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

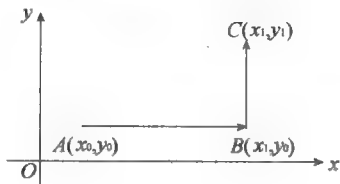


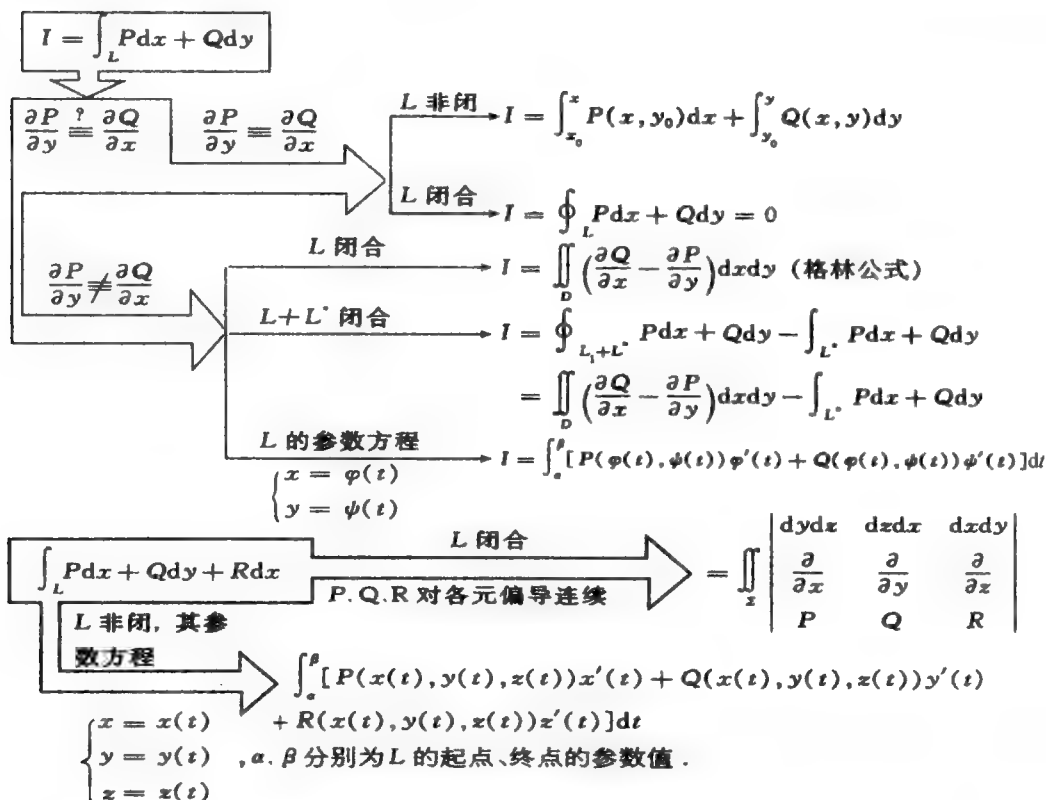
图 12-4

(4) 利用与路径无关条件求解 (见图 12-4)

若  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$  (与路径无关条件)

$$\text{则 } \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy.$$

解题程序(流程图)



**【例 12.7】** 计算  $I = \int_L (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy$ , 其中  $L$  为由点  $(0,0)$  到点  $B(1,1)$  的曲线

$$y = \sin \frac{\pi}{2}x.$$

**【解】**  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy) = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^4) = 2x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$

所以  $\int_L Pdx + Qdy$  与路径无关.

$$\text{故 } \int_L (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (1 + y^4)dy = \frac{23}{15}.$$

**【例 12.8】** 计算曲线积分  $I = \int_L \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy,$

其中  $L$  分别为: (1) 圆  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$  的正向;

(2) 沿曲线  $y = x^2$  从点  $O(0,0)$  到点  $A(\pi, \pi^2)$  的一段弧.

**【解】**  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x},$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

(1) 显然, 在  $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$  内, 有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$

故

$$I = \int_L P dx + Q dy = 0.$$

(2)  $y$  轴 ( $x=0$ ) 上的点除外, 均有  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故  $\int_{L(\varepsilon, 0)}^{(\pi, \pi^2)} P dx + Q dy$  与路径无关, 而

$$\int_{L(\varepsilon, 0)}^{(\pi, \pi^2)} P dx + Q dy = \int_{\varepsilon}^{\pi} dx + \int_0^{\pi^2} \left( \sin \frac{y}{\pi} + \frac{y}{\pi} \cos \frac{y}{\pi} \right) dy = \pi - \varepsilon,$$

故 
$$\int_{L(0, 0)}^{(\pi, \pi^2)} P dx + Q dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon, 0)}^{(\pi, \pi^2)} P dx + Q dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi - \varepsilon) = \pi.$$

【例 12.9】计算曲线积分  $I = \oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$ , 其中

(1)  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  的正向; (2)  $L$  为椭圆  $4x^2 + y^2 - 8x = 0$  的正向.

【解】 
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} \right) = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} \right) = \frac{(x-1)^2 - y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2}.$$

(1) 在圆  $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$  中,  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故  $I = \oint_L P dx + Q dy = 0$ .

(2) 在椭圆  $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$  中除椭圆中心  $(1, 0)$  外恒有  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 于是由定理 5 有

$$I = \oint_L P dx + Q dy = \oint_{L_*} P dx + Q dy,$$

其中  $L_*$  为  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  的正向, 令  $x-1 = \cos \theta, y = \sin \theta$ , 则

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta (-\sin \theta) - \cos \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$

【例 12.10】计算曲线积分

$$I = \oint_L \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy, \text{ 其中 } L \text{ 为沿椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 的正方向 (见图 12-5).}$$

【解】

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x+y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因为在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  内,  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,

例如在  $(0, 0)$  处  $\frac{\partial P}{\partial y}$  与  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  均无意义.

所以曲线积分不仅与路径有关, 且不能用格林公式, 由定理 5 有

$$I = \oint_L \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy = \oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy,$$

其中,  $0 < \varepsilon < 1$ , 令  $x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t$ , 于是

$$I = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\varepsilon(\cos t - \sin t)}{\varepsilon^2} \cdot (-\varepsilon \sin t) + \frac{\varepsilon(\cos t + \sin t)}{\varepsilon^2} \cdot (\varepsilon \cos t) \right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

【例 12.11】计算曲线积分  $I = \int_{AMB} [\varphi(y) \cos x - \pi y] dx + [\varphi'(y) \sin x - \pi] dy,$

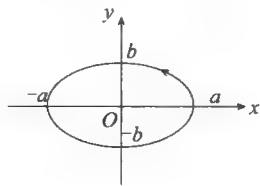


图 12-5

其中,  $\widehat{AMB}$  为连接点  $A(\pi, 2)$  与点  $B(3\pi, 4)$  的线段  $\overline{AB}$  之下方的任意路线 (见图 12-6), 且该路线与线段  $\overline{AB}$  所围图形面积为 2.

$$\text{【解】} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(y) \cos x - \pi y] = \varphi'(y) \cos x - \pi,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi'(y) \sin x - \pi] = \varphi'(y) \cos x.$$

因为  $\varphi(y)$  是抽象函数,

所以碰到这类问题一般是加边使曲线封闭, 再用格林公式, 为此

$$I = \int_{\widehat{AMB}} + \int_{\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = \oint_{\widehat{AMBA}} - \int_{\overline{BA}}.$$

$$\oint_{\widehat{AMBA}} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \pi \iint_D dx dy = 2\pi \text{ (由题设)}.$$

因为  $\overline{BA}$ :  $y = \frac{x}{\pi} + 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以} \int_{\overline{BA}} &= \int_{3\pi}^{\pi} \left[ \varphi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \cos x - \pi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \right] dx + \left[ \varphi'\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \sin x - \pi \right] \cdot \frac{1}{\pi} dx \\ &= \int_{3\pi}^{\pi} \left[ \varphi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \cos x dx + \int_{3\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \varphi'\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \sin x dx - \int_{3\pi}^{\pi} (\pi + 1 + x) dx \right] \\ &= \int_{3\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \cos x dx + \varphi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \sin x \Big|_{3\pi}^{\pi} - \int_{3\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \cos x dx - \\ &\quad \left[ (\pi + 1)x + \frac{1}{2}x^2 \right]_{3\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi(1 + 3\pi), \end{aligned}$$

故

$$I = 2\pi - 2\pi(1 + 3\pi) = -6\pi^2.$$

**【例 12.12】** 计算  $I = \int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ ,  $L$  为由点  $(a, 0)$  到点  $(0, 0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = ax, y \geq 0$  (见图 12-7).

$$\text{【解】} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y - my) = e^x \cos y - m,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y - m) = e^x \cos y,$$

$$I = \int_{L+OA} - \int_{OA} = \oint_{\widehat{AMOA}} - \int_{OA}.$$

$$\oint_{\widehat{AMOA}} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = m \iint_D dx dy = \frac{m}{8} \pi a^2,$$

$$\int_{OA} = \int_0^a 0 \cdot dx + (e^x - m) \cdot 0 = 0,$$

$$\text{故} \quad I = \frac{m}{8} \pi a^2.$$

**【例 12.13】** 计算空间曲线积分

$$I = \oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

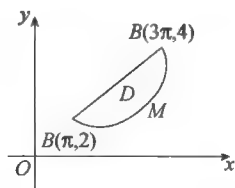


图 12-6

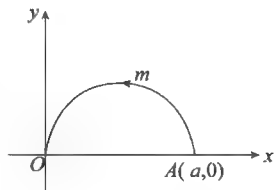


图 12-7

其中, 曲线  $L$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  与平面  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$  的交线, 从  $x$  轴正向看去, 曲线是逆时针方向 (见图 12-8).

**【解法一】** 化为参数的定积分计算, 对于这种封闭的曲线要充分利用  $[0, 2\pi]$  上三角函数簇的正交性.

令  $x = acost, y = asint$ , 则

$$z = h\left(1 - \frac{x}{a}\right) = h\left(1 - \frac{acost}{a}\right) = h(1 - cost),$$

于是  $I = \int_0^{2\pi} [asint - h(1 - cost)] \cdot (-asint) + [h(1 - cost) - acost] \cdot acost + (acost - asint) \cdot h\sin t dt = -2\pi a(a + h).$

**【解法二】** 
$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

$$= -2 \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -2 \iint_{D_{xy}} \{1, 1, 1\} \cdot \left\{\frac{h}{a}, 0, 1\right\} dxdy$$

$$= -2 \iint_D \left(\frac{h}{a} + 1\right) dxdy = -2\pi a(a + h).$$

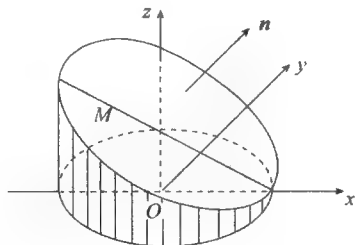


图 12-8

**【例 12.14】** 选择  $a, b$  使  $\frac{(y^2 + 2xy + ax^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$  为某一函数  $u = u(x, y)$  的

全微分, 并求  $u(x, y)$ .

**【解】**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y + 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{4y(y^2 + 2xy + ax^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y + 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x(x^2 + 2xy + by^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

由全微分条件  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故

$$(a + 1)x^2y + (b + 1)xy^2 = 0.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = -1,$$

所以 
$$du = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

选折线  $(1, 1) \rightarrow (x, 1) \rightarrow (x, y)$  为积分路径, 则

$$u = \int_1^x \frac{1 + 2x - x^2}{(1 + x^2)^2} dx - \int_1^y \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$= \int_1^x \frac{d(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} + 2 \int_1^x \frac{dx}{(1 + x^2)^2} - \int_1^x \frac{dx}{1 + x^2} + \int_1^y \frac{dy}{x^2 + y^2} - 2x \int_1^y \frac{(x + y)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{1 + x^2} \Big|_1^x + \frac{x}{1 + x^2} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{dx}{1 + x^2} - \int_1^x \frac{dx}{1 + x^2} + \int_1^y \frac{dy}{x^2 + y^2} -$$

$$2x^2 \int_1^y \frac{dy}{(x^2 + y^2)^2} - 2x \int_1^y \frac{ydy}{(x^2 + y^2)^2}$$



$$= \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x-y}{x^2+y^2},$$

故

$$u(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C.$$

【例 12.15】设曲线  $L$  是正向圆周  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ ,  $\varphi(x)$  是连续的正函数, 证明:

$$\oint_L \frac{x}{\varphi(y)} dy - y\varphi(x) dx \geq 2\pi.$$

【解】设  $L$  所围成的闭区域为  $D$ , 由格林公式得

$$\oint_L \frac{x}{\varphi(y)} dy - y\varphi(x) dx = \iint_D \left[ \frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(x) \right] dx dy.$$

因为区域  $D$  关于直线  $y = x$  对称, 所以

$$\iint_D \varphi(x) dx dy = \iint_D \varphi(y) dx dy.$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{x}{\varphi(y)} dy - y\varphi(x) dx &= \iint_D \left[ \frac{1}{\varphi(y)} + \varphi(y) \right] dx dy \\ &\geq 2 \iint_D \sqrt{\varphi(y) \cdot \frac{1}{\varphi(y)}} dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

### 题型三 对面积的曲面积分的计算

**提示** 解法: 化为投影域上的二重积分的计算.

**解题程序:**

(1) 画出曲面  $\Sigma$ ;

(2) 由曲面  $\Sigma$  的方程, 例如  $z = z(x, y)$ , 写出其曲面微分

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy;$$

(3) 计算在投影面上的二重积分.

【例 12.16】在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上取  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  三点为顶点的球面

三角形 ( $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$  均为大圆弧), 若球面密度为  $\rho = x^2 + z^2$ , 求此球面三角形块的质量 (见图 12-9).

【解】设此球面三角形块的质量为  $M$ , 于是

$$M = \iint_{\Sigma} \rho dS = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) dS.$$

由被积函数  $f(x, y, z) = x^2 + z^2$  可知, 取  $\Sigma$  在  $xOz$  平面上投影合适.

因为  $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ ,

$$dS = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz = \frac{dx dz}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}},$$

$$\text{所以 } M = \iint_{D_{xz}} \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} dx dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho$$

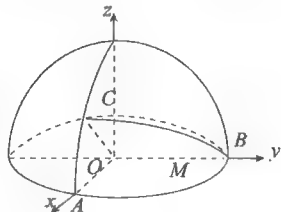


图 12-9

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{1-\rho^2}=u} \frac{\pi}{4} \int_1^0 \frac{u(1-u^2)}{u} du \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-u^2) du = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

【例 12.17】计算曲面积分  $F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z) dS$ ,

$$\text{其中, } f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (\text{见图 12-10})$$

【解】球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  被上半锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$  分成两部分:

$$\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = t^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = t^2, z < \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$F(t) = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} 0 \cdot dS = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS,$$

用球面坐标  $dS = t^2 \sin\varphi d\theta d\varphi$ ,  $x^2 + y^2 = t^2 \sin^2\varphi$ ,

$$\text{于是 } F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \sin^2\varphi \cdot t^2 \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{6}(8 - 5\sqrt{2})\pi t^4.$$

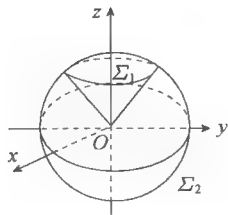


图 12-10

【例 12.18】计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS$ , 其中  $\Sigma$  是球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{【解】由于对称性有 } \iint_{\Sigma} x^2 dS &= \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS, \\
 \iint_{\Sigma} x dS &= \iint_{\Sigma} y dS = \iint_{\Sigma} z dS = 0, \\
 \iint_{\Sigma} xy dS &= \iint_{\Sigma} xz dS = \iint_{\Sigma} yz dS = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } I &= \iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS = \iint_{\Sigma} (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + d^2 + 2abxy + 2acxz + \\
 &\quad 2bcyz + 2adx + 2bdy + 2cdz) dS \\
 &= d^2 \iint_{\Sigma} dS + (a^2 + b^2 + c^2) \iint_{\Sigma} x^2 dS = 4\pi R^2 d^2 + (a^2 + b^2 + c^2) \iint_{\Sigma} x^2 dS \\
 &= 4\pi R^2 d^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = 4\pi R^2 d^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) R^2 \iint_{\Sigma} dS \\
 &= 4\pi R^2 d^2 + \frac{4\pi}{3}(a^2 + b^2 + c^2) R^4.
 \end{aligned}$$

#### 题型四 对坐标的曲面积分的计算

**提示** 解法有三种:

(1) 利用奥-高公式:

① 若  $P, Q, R$  在闭曲面  $\Sigma$  所围成的空间域  $\Omega$  中有连续的一阶偏导数, 则

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \text{ 其中, } \Sigma \text{ 取外侧.}$$

② 若  $\Sigma$  非闭而  $P, Q, R$  比较复杂,  $P, Q, R$  在  $\Sigma$  加面  $\Sigma^*$  后 ( $\Sigma + \Sigma^*$  为闭) 所构成的空间域  $\Omega$  中有一阶连续偏导, 则

$$I = \iint_{\Sigma + \Sigma^*} - \iint_{\Sigma^*} = \iiint_{\Omega} - \iint_{\Sigma^*}.$$

(2) 通过投影化为二重积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} dydz + \iint_{\Sigma} Qdzdx + \iint_{\Sigma} Rdx dy \\ &= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dzdx \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

“ $\pm$ ”号的确定:

若  $\Sigma$  的法矢量  $\mathbf{n}$  与  $x$  轴的夹角  $(\mathbf{n}, \hat{x})$  为锐角, 则右边第一个积分前取“+”, 否则取“-”;

若  $\Sigma$  的法矢量  $\mathbf{n}$  与  $y$  轴的夹角  $(\mathbf{n}, \hat{y})$  为锐角, 则右边第二个积分前取“+”, 否则取“-”;

若  $\Sigma$  的法矢量  $\mathbf{n}$  与  $z$  轴的夹角  $(\mathbf{n}, \hat{z})$  为锐角, 则右边第三个积分前取“+”, 否则取“-”.

曲面的前侧取“+”, 后侧取“-”; 右侧“+”, 左侧“-”; 上侧“+”, 下侧“-”; 外侧取“+”, 里侧取“-”.

(3) 矢量的点积法

设曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = f(x, y)$ , 规定  $\Sigma$  的法矢量方向为  $\{-f'_x, -f'_y, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \{dydz, dzdx, dxdy\} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 \cdot dS \\ &= \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \left\{ \frac{-f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \frac{-f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}} \right\} \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y} dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \{-f'_x, -f'_y, 1\} dx dy \\ &\quad \xrightarrow{\text{将 } \Sigma \text{ 在 } xOy \text{ 面投影}} \pm \iint_{D_{xy}} \{P, Q, R\} \cdot \{-f'_x, -f'_y, 1\} dx dy. \end{aligned}$$

“+”, “-”号的确定: 若题设中曲面  $\Sigma$  的侧与  $\{-f'_x, -f'_y, 1\}$  相同, 取“+”, 否则取“-”.

同样, 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $x = \varphi(y, z)$  [或  $y = \psi(x, z)$ ] 有类似的公式.

1° 若曲面  $\Sigma$  在  $xOy$  平面上投影为一个区域, 则用方法(3)简便.

2° 若曲面  $\Sigma$  在  $xOy$  平面上的投影为一条线, 且  $P, Q, R$  具有一阶连续的偏导, 则通常是加曲面  $\Sigma_*$ , 使  $\Sigma + \Sigma_*$  封闭, 用奥高公式.

3° 若曲面  $\Sigma$  在  $xOy$  平面上的投影为一条线,  $P, Q, R$  以及它们的一阶偏导数不连续情况下, 用方法(2)处理.

【例 12.19】计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} (8y+1)x dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yz dx dy$ , 其中,  $\Sigma$  是由曲线

$$\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases} \quad (1 \leq y \leq 3) \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与 } y \text{ 轴正向的夹}$$

角恒大于  $\frac{\pi}{2}$ .

【解】 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转的旋转面方程为  $y-1 = z^2 + x^2$ , 见

图 12-11.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_*} - \iint_{\Sigma_*}, \\ \iint_{\Sigma+\Sigma_*} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (8y+1-4y-4y) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dz \int_{1+z^2+x^2}^3 dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_{1+\rho^2}^3 dy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) d\rho = 2\pi, \\ \iint_{\Sigma_*} &= 2 \iint_{\Sigma_*} (1-3^2) dz dx = -32\pi. \\ \text{故 } I &= 2\pi - (-32\pi) = 34\pi. \end{aligned}$$

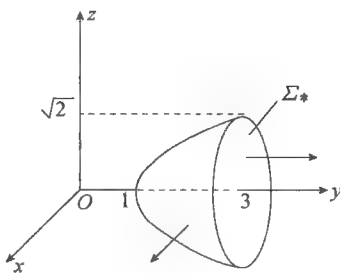


图 12-11

【例 12.20】计算  $I = \iint_{\Sigma} -y dz dx + (z+1) dx dy$ , 其中,  $\Sigma$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = 4$  被平面  $x+z=2$  和  $z=0$  所截出部分的外侧(见图 12-12).

【解】 $\Sigma_1: x+z=2$ ,

$\Sigma_2: x^2 + y^2 = 4, \Sigma_3: z=0$ ,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_3}, \\ \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} &= \oint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} -y dz dx + (z+1) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} (-1+1) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma_1} -y dz dx + (z+1) dx dy = \iint_{\Sigma_1} \{0, -y, z+1\} \cdot \{1,$$

$0, 1\} dx dy$

$$= \iint_{\Sigma_1} (z+1) dx dy = \iint_{D_{xy}} (3-x) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (3-\rho \cos \theta) \rho d\rho = 12\pi.$$

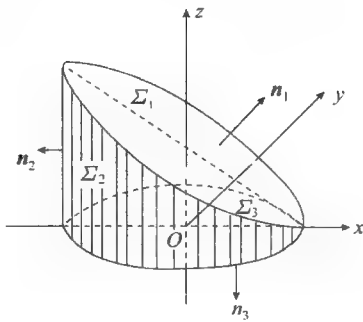


图 12-12

$$\iint_{\Sigma_3} -ydzdx + (z+1)dxdy = \iint_{\Sigma_3} dxdy = -4\pi.$$

$$\text{故 } I = 0 - 12\pi + 4\pi = -8\pi.$$

**【例 12.21】** 计算曲面积分

$$I = \iiint_{\Sigma} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dxdy,$$

其中,  $\Sigma$  为上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧.

**【解】**  $I = \iint_{\Sigma+\Sigma_*} - \iint_{\Sigma_*}$ , 其中  $\Sigma_*$  为  $z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ , 取下侧.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+\Sigma_*} &= \oint_{\Sigma+\Sigma_*} = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dxdydz = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \end{aligned}$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{6}{5} \pi a^5.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_*} &= \iint_{\Sigma_*} ay^2 dxdy = -a \iint_{D_{xy}} y^2 dxdy \\ &= -a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho d\rho = -a \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^a = -\frac{1}{4} \pi a^5. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \frac{6}{5} \pi a^5 + \frac{1}{4} \pi a^5 = \frac{29}{20} \pi a^5.$$

**【例 12.22】** 计算曲面积分

$$I = \oint_{\Sigma} 2xz dydz + yz dzdx - z^2 dxdy,$$

其中,  $\Sigma$  是由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  所围立体表面外侧.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } I &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint_{\Omega} (2z + z - 2z) dxdydz = \iiint_{\Omega} z dxdydz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**【例 12.23】** 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + z^2 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$ , 其中,  $\Sigma$  是由曲面  $x^2 + y^2 = R^2$  及两平面  $z = R, z = -R (R > 0)$  所围立体表面的外侧 (见图 12-13).

**【解】** 曲面  $\Sigma$  是封闭的, 但  $P, Q, R$  及其一阶偏导数在曲面  $\Sigma$  所围成的区域中不连续, 所以奥一高公式不能用!

$$I = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + z^2 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{R^2}{R^2 + x^2 + y^2} dxdy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{D_{xy}} \frac{R^2}{R^2 + x^2 + y^2} dx dy, \\
 I_2 &= \iint_{\Sigma_2} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_2} \frac{R^2}{R^2 + x^2 + y^2} dx dy \\
 &= - \iint_{D_{xy}} \frac{R^2}{R^2 + x^2 + y^2} dx dy, \\
 I_1 + I_2 &= 0. \\
 I_3 &= \iint_{\Sigma_3} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_3 \text{前}} + \iint_{\Sigma_3 \text{后}} \left( \begin{array}{l} \Sigma_3 \text{前}: x = \sqrt{R^2 - y^2} \\ \Sigma_3 \text{后}: x = -\sqrt{R^2 - y^2} \end{array} \right) \\
 &= \iint_{\Sigma_3 \text{前}} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, 0, \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right\} \cdot \left\{ 1, \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, 0 \right\} dy dz, \\
 &= \iint_{\Sigma_3 \text{前}} \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} dy dz = \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz, \\
 &= \iint_{\Sigma_3 \text{后}} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, 0, \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right\} \cdot \left\{ 1, \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, 0 \right\} dy dz \\
 &= - \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } I_3 &= 2 \int_{-R}^R \frac{dz}{R^2 + z^2} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = 8 \int_0^R \frac{dz}{R^2 + z^2} \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \\
 &= 8 \frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \Big|_0^R \cdot \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{1}{2} R \pi^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = \frac{1}{2} R \pi^2.$$

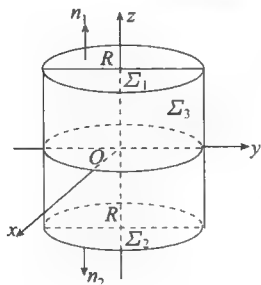


图 12-13

【例 12.24】计算  $I = \iint_{\Sigma} y dy dz - x dz dx + z^2 dx dy$ .

Σ: 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被  $z = 1, z = 2$  所截部分的外侧 (见图 12-14).

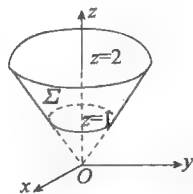


图 12-14

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} I &= \iint_{\Sigma} \{y, -x, z^2\} \cdot \left\{ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right\} dx dy \\
 &= \iint_{\Sigma} z^2 dx dy = - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 \rho d\rho = -\frac{15}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

【例 12.25】计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 4xz dy dz - 2z dz dx + (1 - z^2) dx dy,$$

其中, Σ 为曲线  $\begin{cases} z = a^y \\ x = 0 \end{cases}$  ( $0 \leq y \leq 2, a > 0, a \neq 1$ ) 绕 z 轴旋转一周所成曲面的下侧.

【解法一】Σ 的方程:  $z = a^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , ( $x^2 + y^2 \leq 4$ ), 添加一个平面  $\Sigma_1: z = a^2$ , 则 Σ 与  $\Sigma_1$  构成闭曲面  $\Sigma_*$ , 其所围区域记为 Ω, 于是

$$I = \iint_{\Sigma+z_1} - \iint_{\Sigma_1} = \oiint_{\Sigma_+} - \iint_{\Sigma_1}$$

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma_+} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_{\Omega} (4z - 2z) dx dy dz \\ &= 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz \xrightarrow{\text{柱坐标}} 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{a^2}^{a^2} z dz \\ &= 4\pi \int_0^2 \frac{1}{2} (a^4 - a^{2\rho}) \rho d\rho = 2\pi \int_0^2 (a^4 \rho - a^{2\rho} \rho) d\rho \\ &= 4\pi a^4 - 2\pi \int_0^2 \rho a^{2\rho} d\rho = 4\pi a^4 - 2\pi \left[ \frac{a^4}{\ln a} - \frac{a^4}{(2\ln a)^2} + \frac{1}{(2\ln a)^2} \right], \\ \iint_{\Sigma_1} \frac{\Sigma_1: z = a^2}{dz = 0} &= \iint_{D_{xy}} (1 - a^4) dx dy = (1 - a^4) \iint_{x^2+y^2 \leq 2^2} dx dy = 4\pi(1 - a^4), \\ \text{故} \quad I &= 4\pi(2a^4 - 1) - 2\pi \left[ \frac{a^4}{\ln a} - \frac{a^4}{(2\ln a)^2} + \frac{1}{(2\ln a)^2} \right]. \end{aligned}$$

【解法二】  $z = a^{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_x = a^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \ln a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = a^{\sqrt{x^2+y^2}} \ln a \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$$n = \left\{ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \ln a \cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \ln a \cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\}.$$

$$I = \iint_{\Sigma} \{4zx, -2z, 1 - z^2\} \cdot \left\{ -\frac{x \ln a \cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y \ln a \cdot a^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\} dx dy$$

$$\xrightarrow{\text{因为 } z = a^{\sqrt{x^2+y^2}}} \iint_{x^2+y^2 \leq 2^2} \left[ \frac{(4x^2 - 2y) \ln a \cdot a^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} + a^{2\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \right] dx dy$$

$$\xrightarrow{\text{化为极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left[ \frac{(4\rho^2 \cos^2 \theta - 2\rho \sin \theta) \ln a \cdot a^{2\rho}}{\rho} + a^{2\rho} - 1 \right] \rho d\rho$$

$$\xrightarrow{\text{由三角函数族的正交性}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 4\rho^2 \cos^2 \theta \cdot \ln a \cdot a^{2\rho} d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (a^{2\rho} - 1) \rho d\rho$$

$$= \pi \int_0^2 4\rho^2 \ln a \cdot a^{2\rho} d\rho + 2\pi \int_0^2 (a^{2\rho} - 1) \rho d\rho$$

$$= 4\pi(2a^4 - 1) - 2\pi \left[ \frac{a^4}{\ln a} - \frac{a^4}{(2\ln a)^2} + \frac{1}{(2\ln a)^2} \right].$$

### 题型五 曲面面积的计算

计算方法	适用范围	基本形式
利用二重积分	已知曲面 $\Sigma$ 的方程及其在坐标面上的投影域	设 $\Sigma: z = f(x, y)$ (与平行于 $z$ 轴的直线只交于一点) 在 $xOy$ 平面上的投影域为 $D_{xy}$ , 则 $\Sigma$ 的面积 $A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$ $\Sigma$ 的其他形式有类似公式

【例 12.26】求曲面  $x^2 = y^2 + z^2$  包含在  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$  内的面积.

【解】两曲面的交线为

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \end{cases}$$

它在  $yOz$  平面上的投影曲线方程为 
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x, \\ x = 0. \end{cases}$$

曲面  $x^2 = y^2 + z^2$  在  $yOz$  平面上的投影域为  $y^2 + z^2 \leq z$ .

$$x'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad x'_z = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

由图形的对称性,故所求面积为

$$\begin{aligned} A &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} dydz = 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{2} dydz = 2\sqrt{2} \iint_{D_{yz}} dydz \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

【例 12.27】求曲线  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$  由  $x = 0$  至  $x = a$  的一段曲线绕  $y$  轴旋转所得旋转面面积.

【解】旋转面方程:

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}} + e^{-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}} \right),$$

该曲面在  $xOz$  平面上的投影域  $D_{xz}: x^2 + z^2 \leq a^2$ ,

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{x}{2\sqrt{x^2+z^2}} \left( e^{\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}} \right), \\ y'_z &= \frac{z}{2\sqrt{x^2+z^2}} \left( e^{\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}} - e^{-\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{a}} \right), \end{aligned}$$

无论从  $D_{xz}$  的表达式,还是从  $dS = \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} dx dz$  的形式都可看出用极坐标较方便,令  $x = \rho \cos \theta, z = \rho \sin \theta$ ,

于是 
$$\sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \frac{1}{2} (e^{\frac{\rho}{a}} + e^{-\frac{\rho}{a}}),$$

故 
$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{1}{2} (e^{\frac{\rho}{a}} + e^{-\frac{\rho}{a}}) \rho d\rho = 2\pi a^2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right).$$

### 第 3 节 思维定势及综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 曲线积分的积分曲线  $L$  关于坐标轴对称,要立刻想到利用被积函数的对称性简化积分.

【例 12.28】设  $l$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长记为  $a$ , 则  $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

【分析】利用曲线积分的概念及积分曲线的对称性化简曲线积分后再进行计算.



$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad \oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds &= \oint_l \left( 2xy + 12 \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \right) \right) ds \\
 &= 2 \oint_l xy ds + 12 \oint_l ds,
 \end{aligned}$$

因为  $l$  关于  $x$  轴对称, 而且  $xy$  关于  $y$  为奇函数, 所以  $\oint_l xy ds = 0$ .

此外,  $12 \oint_l ds = 12a$ , 因此  $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = 12a$ .

**【例 12.29】** 计算  $\int_L (x^2 + y^3) ds$ , 其中  $L: x^2 + y^2 \leq a^2$ .

$$\text{【解】} \quad \int_L (x^2 + y^3) ds = \int_L x^2 ds + \int_L y^3 ds.$$

由于  $L$  的“轮换对称性”, 有  $\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds$ .

又  $L$  关于  $x$  轴对称, 且  $f(x, y) = y^3$  关于  $y$  为奇函数, 所以  $\int_L y^3 ds = 0$ .

$$\text{故} \int_L (x^2 + y^3) ds = \frac{1}{2} \int_L (x^2 + y^2) ds = \frac{a^2}{2} \int_L ds = \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi a = \pi a^3.$$

## 二、综合题解析

**【例 12.30】** 设曲线积分  $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$  与路径无关, 其中  $\varphi$  具有连续的导数, 且  $\varphi(0) = 0$ .

$$\text{计算 } I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy.$$

$$\text{【解】} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy, \frac{\partial Q}{\partial x} = y\varphi'(x),$$

因为  $\int_L P dx + Q dy$  与路径无关, 所以  $y\varphi'(x) = 2xy \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + C$ ,

又  $\varphi(0) = 0$ , 所以  $C = 0$ , 故  $\varphi(x) = x^2$ .

$$\text{于是} \quad I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yx^2 dy = \int_0^1 0 dx + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

**【例 12.31】** 在过点  $O(0,0)$  和  $A(\pi,0)$  的曲线簇  $y = a \sin x (a > 0)$  中, 求一条曲线  $L$ , 使沿该曲线从  $O$  到  $A$  的积分  $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$  的值最小.

$$\text{【解】} \quad I(a) = \int_0^\pi [1 + a^3 \sin^3 x + (2x + a \sin x) a \cos x] dx = \pi - 4a + \frac{4}{3} a^3.$$

$$\text{令} \quad I'(a) = 4(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = 1, (a = -1 \text{ 舍去})$$

$a = 1$  是  $I(a)$  在  $(0, +\infty)$  内唯一的驻点. 又因为  $I''(a) \Big|_{a=1} = 8 > 0$ , 所以  $I(a)$  在  $a = 1$  处取得最小值, 故所求曲线为  $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ .

**【例 12.32】** 设  $f(\pi) = 1$ , 试求  $f(x)$ , 使曲线积分

$$\int_{AB} [\sin x - f(x)] \frac{y}{x} dx + f(x) dy$$

与路径无关, 并求当  $A, B$  两点坐标分别为  $(1,0), (\pi, \pi)$  时曲线积分值.

【解】

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\sin x - f(x)) \frac{y}{x} \right] = (\sin x - f(x)) \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f(x)] = f'(x).$$

因为曲线积分与路径无关, 所以  $f'(x) \equiv (\sin x - f(x)) \frac{1}{x}$ .

整理得一阶线性方程  $f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}\sin x$ ,

解之得  $f(x) = \frac{1}{x}(C - \cos x)$ .

把  $f(\pi) = 1$  代入上式, 得  $C = \pi - 1$ .

故  $f(x) = \frac{1}{x}(\pi - 1 - \cos x)$ .

$$\begin{aligned} & \int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} \left[ \sin x - \frac{1}{x}(\pi - 1 - \cos x) \right] \frac{y}{x} dx + \frac{1}{x}(\pi - 1 - \cos x) dy \\ &= \int_1^\pi 0 \cdot dx + \int_0^\pi \frac{1}{\pi}(\pi - 1 - \cos \pi) dy = \int_0^\pi dy = \pi. \end{aligned}$$

## 习 题 十 二

1. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有连续的导函数, 求  $I = \int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$ ,

其中  $L$  是从点  $A(3, \frac{2}{3})$  到点  $B(1, 2)$  的直线段.

2. 计算  $I = \int_{L(0,0)}^{(1,2)} (e^y + x) dx + (xe^y - 2y) dy$ , 其中  $L$  为过  $(0,0), (0,1), (1,2)$  三点的圆周.

3. 计算  $I = \int_{L(\widehat{AMB})} (e^x \sin y + 8y) dx + (e^x \cos y - 7x) dy$ ,  $L(\widehat{AMB})$  是上半圆周,  $A, B$  的坐标分别为  $(1,0)$  和  $(7,0)$ .

4. 计算  $\int_{\widehat{ABC}} (a_1 x + a_2 y + a_3) dx + (b_1 x + b_2 y + b_3) dy$ , 其中  $a_i, b_i (i=1,2,3)$  为常数,  $A(-1,0), B(0,1), C(1,0)$ ,  $AB$  为  $x^2 + y^2 = 1$  上的一段弧,  $BC$  为  $y = 1 - x^2$  上的一段弧.

5. 计算  $I = \int_{L(A)}^{L(B)} (\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}) dx - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y} dy$ , 其中  $L$  为连接  $A(\pi, 1)$  与  $B(\pi, 2)$  的曲线弧段.

6. 计算  $I = \int_{\widehat{AB}} \frac{(x-c)dx + ydy}{[(x-c)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} (c > 0)$ , 其中  $\widehat{AB}$  是沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的正向从  $A(a, 0)$  到  $B(0, b)$  的一段弧.

7. 计算  $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_L (e^{y^2 - x^2} \cos 2xy - 3y) dx + (e^{y^2 - x^2} \sin 2xy - b^2) dy (b > 0)$ , 其中  $L$  是依次连接  $A(a, 0), B(a, \frac{\pi}{a}), E(0, \frac{\pi}{a}), O(0, 0)$  的有向折线 (已知  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ).

8. 设平面  $z = y$  与圆柱面  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$  相截, 求其在  $z \geq 0, y \geq 0$  及  $xOy$  平面之间的圆柱面

的侧面面积.

9. 计算  $I = \int_{\widehat{AB}} [\Phi(y)e^x - my]dx + [\Phi'(y)e^x - m]dy$ , 其中  $\Phi(y)$  和  $\Phi'(y)$  为连续函数,  $\widehat{AB}$  为连接点  $A(x_1, y_1)$  和点  $B(x_2, y_2)$  的任何路径, 但与直线段  $AB$  围成的图形有定面积  $S$ .

10. 计算  $I = \int_{\widehat{AMB}} (e^x \sin y - ay)dx + (e^x \cos y - bx)dy$ , 其中  $\widehat{AMB}$  是通过点  $A(a, 0)$ ,  $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ ,  $B(b, 0)$  的半圆周 ( $a > b > 0$ ).

11.  $\oint_L 3ydx - xzdy + yz^2dz$ , 其中  $L$  是圆周  $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ , 若从  $z$  轴正向看去, 这个圆周取逆时针方向.

12. 计算  $I = \iint_{\Sigma} z dS, \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

13. 计算  $I = \iint_{\Sigma} \frac{e^x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dydz$ ,  $\Sigma$  为锥面  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$  及平面  $x = 1, x = 2$  所围立体的外侧.

14. 求  $u = u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  在  $P(3, 4, 5)$  处沿曲线

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

在  $P(3, 4, 5)$  处的切线方向的方向导数.

### 参 考 答 案

1.  $-4$ .    2.  $e^2 - \frac{7}{2}$ .    3.  $\frac{135}{2}\pi$ .    4.  $(a_2 - b_1)\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\right) + 2a_3$ .    5.  $\pi$ .

6.  $\frac{1}{|a-c|} - \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} (a \neq c)$ .    7.  $3\pi - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .    8.  $9 + \frac{15}{4}\ln 5$ .

9.  $ms + \Phi(y_2)e^{x_2} - \Phi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(y_2 - y_1) \cdot (x_2 + x_1) - m(y_2 - y_1) + (mx_1y_2 - my_1x_2)$ .

10.  $\frac{\pi}{8}(a-b)^3$     11.  $-20\pi$     12.  $0$     13.  $2\pi e^2$ .

14. 略.

## 第十三章 函数方程与不等式证明

### 第1节 函数方程

#### 一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程

【例 13.1】设  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$  ( $x \neq 0$ ), 求  $f(x)$ .

【解】令  $\frac{1}{x} = t, x = \frac{1}{t}$ , 则  $f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$ .

故 
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

【例 13.2】设  $f(x)$  满足方程  $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$ , 其中  $a, b, c$  为常数, 且  $|a| \neq |b|$ , 求解  $f(x)$  并证明它是奇函数.

【解】 
$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$$

令  $x = \frac{1}{t}$ , 则原式  $\Rightarrow af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct$ ,

即 
$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx.$$

由上述联立的方程组, 得

$$f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left( \frac{a}{x} - bx \right).$$

又因为  $f(-x) = -\frac{c}{a^2 - b^2} \left( \frac{a}{x} - bx \right) = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为奇函数.

【例 13.3】设  $f(x)$  满足关系式

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x), (a^2 \neq 1)$$

其中  $\varphi(x)$  当  $x \neq 1$  时是有定义的已知函数, 求  $f(x)$ .

【解】 
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x),$$

令  $t = \frac{x}{x-1}$ , 则  $x = \frac{t}{t-1}$

$$\Rightarrow f(t) = af\left(\frac{t}{t-1}\right) + \varphi\left(\frac{t}{t-1}\right),$$

即 
$$f(x) = af\left(\frac{x}{x-1}\right) + \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

解由上述等式联立的方程组, 得

$$f(x) = \frac{1}{1-a^2} \left[ a\varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) \right].$$

## 二、利用极限求解函数方程

**【例 13.4】** 设  $f(x)$  在  $x=0$  附近有界, 且满足方程  $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$ , 求  $f(x)$ .

**【解】**

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) &= x^2, \\ \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2, \\ \frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right) - \frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right) &= \frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2^2}\right)^2, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}}f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)^2, \end{aligned}$$

将以上诸式相加, 得

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) &= x^2 \left[ 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{3(n-1)}} \right] \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) + x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2^3}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ , 又  $f(x)$  在  $x=0$  附近有界,

所以 
$$f(x) = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{8}{7}x^2.$$

**【例 13.5】** 设  $f(x)$  为多项式, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ , 求  $f(x)$ .

**【解】** 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 1$ , 可知应设  $f(x) = 2x^3 + x^2 + bx + c$ .

又由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ , 可知  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + x^2 + bx + c) = 0$ ,

可得  $c = 0$ .

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + x^2 + bx}{x} = b = 3,$$

故

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x.$$

**【例 13.6】** 已知函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内可导,  $f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , 且满足  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$ , 求  $f(x)$ .

**【解】** 由 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{f(x+hx)}{f(x)} - 1 \right]} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hx) - f(x)}{hf(x)}} = e^{\frac{x}{f(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hx) - f(x)}{hx}} = e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}},$$

得  $e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = e^{\frac{1}{x}},$

$$\text{即} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2}, \ln f(x) = -\frac{1}{x} + \ln C,$$

得  $f(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$ , 又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , 得  $C = 1$ , 故  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ .

### 三、利用导数的定义求解方程

**【例 13.7】** 已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义,  $f'(0)$  存在, 且对任意的  $x, y \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ , 求  $f(x)$ .

**【解】** 由于  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ , ①

令  $y = 0$ , 则  $f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ . 由 ① 可得

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + 2x,$$

对  $y \rightarrow 0$  时, 对上式取极限, 于是有

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} + 2x \right) = f'(0) + 2x,$$

即  $f'(x) = f'(0) + 2x$ .

积分得  $f(x) = f'(0)x + x^2 + C$ .

将  $f(0) = 0$  代入上式  $\Rightarrow C = 0$ , 故  $f(x) = f'(0)x + x^2$ .

### 四、利用变上限积分的可导性求解方程

**【例 13.8】** 求满足下列方程

$$\int_0^x f(t) dt = x + \int_0^x t f(x-t) dt \text{ 的可微函数 } f(x).$$

**提示** 对抽象的复合函数, 在运算之前一定要做变量替换使其成为  $f(u)$  这种形式.

**【解】** 因为  $\int_0^x t f(x-t) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^0 (x-u) f(u) (-du) = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$ ,

所以原方程  $\Rightarrow \int_0^x f(t) dt = x + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$ ,

两边对  $x$  求导, 得

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du + x f(x) - x f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du, \quad ②$$

再对  $x$  求导, 得  $f'(x) = f(x)$ , 积分得  $f(x) = Ce^x$ .

又由 ② 可得,  $f(0) = 1$ , 代入上式  $\Rightarrow C = 1$ , 于是所求函数为  $f(x) = e^x$ .

**【例 13.9】** 已知  $\int_0^1 f(ax) da = nf(x)$ , 且  $f'(x)$  存在, 求解  $f(x)$ .

**【解】** 因为  $\int_0^1 f(ax) da \xrightarrow{\text{令 } u = ax} \int_0^x f(u) \frac{du}{x}$ , 所以原方程  $\Rightarrow \int_0^x f(u) du = nx f(x)$ .

两边对  $x$  求导, 得  $f(x) = nf(x) + nx f'(x)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-n}{nx}, \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1-n}{n} \ln x + \ln C,$$

故

$$f(x) = Cx^{\frac{1-n}{n}}.$$

**【例 13.10】** 设对于在  $x > 0$  上可微的函数  $f(x)$  及其反函数  $g(x)$ , 满足方程

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8),$$

求解  $f(x)$ .

【解】方程两边对  $x$  求导, 得  $g[f(x)] \cdot f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ , 即

$$xf'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

当  $x > 0$  时, 有  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , 积分得

$$f(x) = \sqrt{x} + C,$$

又当  $f(x) = 0$  时,  $x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0, x = 4$ , 即  $f(4) = 0, C = -2$ , 所以  $f(x) = \sqrt{x} - 2$ .

【例 13.11】设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有连续导数, 且满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + t^4, \text{ 求 } f(x).$$

【解】显然  $f(0) = 0$ , 因为  $f(t)$  为偶函数, 因此只需求出  $t > 0$  时  $f(t)$  的表达式.

$$\text{当 } t \geq 0 \text{ 时, } f(t) = 2 \int_0^t d\theta \int_0^\theta \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4 = 4\pi \int_0^t \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4,$$

$$f'(t) = 4\pi t^3 f(t) + 4t^3.$$

解出满足初值条件  $f(0) = 0$  的一阶线性方程, 得

$$f(t) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi t^4} - 1)(t \geq 0),$$

$$\text{故在 } (-\infty, +\infty) \text{ 内, } f(x) = \frac{1}{\pi}(e^{x^4} - 1).$$

## 五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解

【例 13.12】已知  $f(x)$  是连续函数且满足方程

$$f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx, \text{ 求 } f(x).$$

【解】令  $\int_0^1 f^2(x) dx = l$ , 则  $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} l$ ,

$$f^2(x) = 9x^2 + l^2 - 6lx \sqrt{1-x^2},$$

$$\text{于是 } l = \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (9x^2 + l^2 - 6lx \sqrt{1-x^2}) dx = 3 + \frac{2}{3}l^2 - 2l$$

$$\Rightarrow 2l^2 - 9l + 9 = 0 \Rightarrow l_1 = 3, l_2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2} \quad \text{及} \quad f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

【例 13.13】设  $f(u)$  在  $(-\infty < u < +\infty)$  内可导, 且  $f(0) = 0$ ,

$$\text{又 } f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}, \text{ 求 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上的表达式.}$$

【解】令  $\ln x = t$ , 则  $x = e^t$ ,

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & 0 < e^t \leq 1 \\ e^{\frac{1}{2}t}, & e^t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ e^{\frac{1}{2}t}, & t > 0 \end{cases}$$

当  $t \leq 0$  时,  $f(t) = t + C_1$ , 当  $t > 0$  时,  $f(t) = 2e^{\frac{1}{2}t} + C_2$ ,

由原函数的连续性有

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = C_1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2e^{\frac{1}{2}t} + C_2) = 2 + C_2,$$

又  $f(0) = 0$ , 所以  $C_1 = 0 = 2 + C_2 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -2$ ,

故 
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 2e^{\frac{1}{2}x} - 2, & x > 0. \end{cases}$$

## 六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$

### 1. 含有导数条件的函数方程的求解

**【例 13.14】** 设函数  $y = f(x)$  由  $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$  确定, 其中  $\psi(t)$  具有二阶导数,

且  $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ , 求函数  $\psi(t)$ .

**【分析】** 根据参数方程的求导公式和已知条件联立建立微分方程, 然后求解即得.

**【解】** 由题设可得  $\begin{cases} x' = 2 + 2t \\ y' = \psi'(t) \end{cases}$ ,

于是 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2+2t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)(2+2t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

又  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ , 所以

$$\frac{3}{4(1+t)} = \frac{\psi''(t)(2+2t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3},$$

即  $\frac{\psi''(t)(1+t) - \psi'(t)}{(1+t)^2} = 3$ , 即  $\left[ \frac{\psi'(t)}{1+t} \right]' = 3$ , 两边积分得

$$\frac{\psi'(t)}{1+t} = 3t + C_1 \Rightarrow \psi'(t) = 3t(1+t) + C_1(1+t),$$

两边再次积分得 
$$\psi(t) = t^3 + \frac{1}{2}(3+C_1)t^2 + C_1 t + C_2.$$

将  $\psi(1) = \frac{5}{2}, \psi'(1) = 6$  代入上两式得  $C_1 = 0, C_2 = 0$ , 于是

$$\psi(t) = t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

### 2. 含有偏导数条件的函数方程的求解

**【例 13.15】** 设  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + 2yf\left(\frac{x}{y}\right)$ ,  $f$  二阶可导, 且  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} = -by^2$ , 求  $f(x)$  (其中  $a > 0, b > 0$ ).

**【解】**  $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + xf'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2yf'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + 2f'\left(\frac{x}{y}\right)$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + 2f'\left(\frac{x}{y}\right) \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x} f' \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{x} f' \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{y}{x} f'' \left( \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} + 2 f'' \left( \frac{y}{x} \right) \cdot \left( -\frac{x}{y^2} \right) \\
 &= -\frac{y}{x^2} f'' \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{2x}{y^2} f'' \left( \frac{y}{x} \right).
 \end{aligned}$$

因为  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a} = -by^2$ , 所以  $-\frac{y}{a^2} f'' \left( \frac{y}{a} \right) - \frac{2a}{y^2} f'' \left( \frac{a}{y} \right) = -by^2$ .

令  $\frac{y}{a} = u$ , 则

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{u}{a} f''(u) + \frac{2}{au^2} f'' \left( \frac{1}{u} \right) = a^2 bu^2, \\
 &u^3 f''(u) + 2 f'' \left( \frac{1}{u} \right) = a^3 bu^4.
 \end{aligned} \tag{3}$$

再令  $\frac{1}{u} = t$ , 即  $u = \frac{1}{t}$ ,

$$\frac{1}{t^3} f'' \left( \frac{1}{t} \right) + 2 f''(t) = a^3 b \frac{1}{t^4}, \Rightarrow 2u^3 f''(u) + f'' \left( \frac{1}{u} \right) = \frac{a^3 b}{u}. \tag{4}$$

解联立方程组 (3), (4) 得

$$\begin{aligned}
 f''(u) &= -\frac{1}{3} a^3 bu + \frac{2}{3} a^3 b \frac{1}{u^4}, \\
 f'(u) &= -\frac{1}{6} a^3 bu^2 - \frac{2}{9} a^3 bu^{-3} + C_1, \\
 f(u) &= -\frac{1}{18} a^3 bu^3 + \frac{1}{9} a^3 bu^{-2} + C_1 u + C_2, \\
 \text{故} \quad f(x) &= -\frac{1}{18} a^3 bx^3 + \frac{1}{9} a^3 bx^{-2} + C_1 x + C_2.
 \end{aligned}$$

**【例 13.16】** 设  $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$  具有连续的二阶偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$ , 试求函数  $u$  的表达式.

**【解】** 令  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则  $u = u(r)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{x}{r} \right)^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{r-x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} \frac{du}{dr} = \left( \frac{x}{r} \right)^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{y^2}{r^3} \frac{du}{dr},$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( \frac{y}{r} \right)^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{x^2}{r^3} \frac{du}{dr}.$$

于是

$$\text{左式} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = \frac{d^2 u}{dr^2} + u,$$

$$\text{原方程} \Rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} + u = r^2, \tag{5}$$

特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$ ,

非齐次方程的一个特解  $u^* = \frac{1}{D^2+1}r^2 = (1-D^2)r^2 = r^2 - 2$ ,

故,方程⑤的通解为

$$\begin{aligned} u &= C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2 \\ &= C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2. \end{aligned}$$

3. 满足全微分方程(或曲线积分与路径无关)条件(即  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ )的函数方程求解\*

【例 13.17】设函数  $Q(x, y)$  在  $xOy$  平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分  $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$  与路径无关, 并对任意  $t$  恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy, \text{ 求 } Q(x, y).$$

【解】由曲线积分与路径无关的条件有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 即 } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,$$

$\Rightarrow Q(x, y) = x^2 + C(y)$ , 其中  $C(y)$  为待定函数.

$$\begin{aligned} \text{又 } \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy &= \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + [x^2 + C(y)] dy \\ &= \int_0^t 2x \cdot 0 dx + \int_0^1 [t^2 + C(y)] dy = t^2 + \int_0^1 C(y) dy, \end{aligned}$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_0^t [1^2 + C(y)] dy = t + \int_0^t C(y) dy,$$

由题设条件有

$$t^2 + \int_0^1 C(y) dy = t + \int_0^t C(y) dy,$$

两边对  $t$  求导, 得

$$2t = 1 + C(t), \Rightarrow C(t) = 2t - 1, \text{ 从而 } C(y) = 2y - 1,$$

故

$$Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

【例 13.18】设  $f(x)$  具有二阶连续导数,  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 且  $[xy(x+y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$  为一个全微分方程, 求  $f(x)$  及此全微分方程的通解.

【解】方程为全微分方程的充要条件  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,

$$\text{即 } x^2 + 2xy - f(x) = f''(x) + 2xy \Rightarrow f''(x) + f(x) = x^2,$$

特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$ , 非齐次方程的一个特解为

$$f^*(x) = \frac{1}{D^2+1}x^2 = (1-D^2)x^2 = x^2 - 2,$$

故

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2.$$

将

$$f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ 代入求出 } C_1 = 2, C_2 = 1,$$

于是

$$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2.$$

原方程  $\Rightarrow [xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y]dx + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2y)dy = 0$ , 利用分项组合法

$$(xy^2 dx + x^2 y dy) + d[(-2\sin x + \cos x)y] + 2(x dy + y dx) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2}d(x^2y^2) + d[(-2\sin x + \cos x)y] + 2d(xy) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x^2y^2 + (-2\sin x + \cos x)y + 2xy = C. \end{aligned}$$

【例 13.19】求具有连续二阶导数的函数  $f(x)$ , 使

$$\oint_L (\ln x - f'(x)) \frac{y}{x} dx + f'(x) dy = 0,$$

其中  $L$  为  $xOy$  平面上第一象限内任一光滑闭曲线, 且  $f(1) = f'(1) = 0$ .

【解】因为  $L$  为  $xOy$  平面上第一象限内的任一光滑闭曲线, 又

$$\oint_L (\ln x - f'(x)) \frac{y}{x} dx + f'(x) dy = 0,$$

于是, 该曲线积分与路径无关, 因而

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ [\ln x - f'(x)] \frac{y}{x} \right\} \equiv \frac{\partial}{\partial x} (f'(x)),$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\ln x - f'(x)}{x} &\equiv f''(x), \\ \Rightarrow x f''(x) &= \ln x - f'(x), \\ \Rightarrow x^2 f''(x) + x f'(x) &= x \ln x \quad \text{—— 欧拉方程.} \end{aligned}$$

于是, 令  $x = e^t, t = \ln x$ , 有

$$\begin{aligned} [D(D-1) + D]f &= te^t, \\ D^2 f &= te^t, \end{aligned}$$

特征方程为  $\lambda^2 = 0, \lambda_{1,2} = 0$ .

设  $f^*$  为非齐次方程的一个特解, 则

$$f^* = \frac{1}{D^2} te^t = (t-2)e^t,$$

故, 欧拉方程的通解为  $f = C_1 + C_2 t + (t-2)e^t$ ,

于是

$$f(x) = C_1 + C_2 \ln x + (\ln x - 2)x,$$

将  $f(1) = f'(1) = 0$  代入, 得  $C_1 = 2, C_2 = 1$ , 故

$$f(x) = 2 + \ln x + (\ln x - 2)x.$$

## 第 2 节 不等式的证明

不等式的证明方法很多, 这里仅讲几种常用的方法.

### 一、引入参数法

#### 1. 判别式法 (适用于积分式中含有 $f^2(x)$ 或 $f'^2(x)$ 的情形)

【例 13.20】设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续导数,  $f(a) = f(b) = 0$ , 且  $\int_a^b f^2(x) dx = 1$ , 证明

$$\left\{ \int_a^b [f'(x)]^2 dx \right\} \left[ \int_a^b x^2 f^2(x) dx \right] > \frac{1}{4}.$$

【证】引入参数  $t$ , 考查  $f'(x) + tx f(x)$ .

由题设知, 上式在  $[a, b]$  上对任何实数  $t$  都不能恒为“0”, 事实上, 若不然, 假设有实数  $t$ ,

使得

$$f'(x) + tx f(x) \equiv 0,$$

于是求得方程的通解为

$$f(x) = C e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

由  $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ , 因此,  $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ .

与假设  $\int_a^b f^2(x) dx = 1$  矛盾, 故  $[f'(x) + tx f(x)^2] > 0$ ,

于是  $\int_a^b [f'(x) + tx f(x)]^2 dx > 0$ ,

即  $t^2 \int_a^b x^2 f^2(x) dx + 2t \int_a^b x f(x) f'(x) dx + \int_a^b [f'(x)]^2 dx > 0$ .

因为  $t^2$  的系数  $\int_a^b x^2 f^2(x) dx \neq 0$ , 所以关于  $t$  的二次三项式的判别式必小于零. 即

$$4 \left[ \int_a^b x^2 f^2(x) dx \right] \left\{ \int_a^b [f'(x)]^2 dx \right\} - \left[ 2 \int_a^b x f(x) f'(x) dx \right]^2 > 0,$$

亦即  $\left\{ \int_a^b [f'(x)]^2 dx \right\} \left[ \int_a^b x^2 f^2(x) dx \right] > \left[ \int_a^b x f(x) f'(x) dx \right]^2$   
 $= \left\{ \frac{1}{2} \int_a^b x d[f^2(x)] \right\}^2 = \left[ \frac{x}{2} f^2(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx \right]^2 = \left( -\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$

## 2. 利用三角函数法(适用于函数的绝对值小于1的情形)

**【例 13.21】** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  内可积, 且  $|f(x)| < 1, |g(x)| < 1$ , 试证

$$\int_a^b \{f(x)g(x) \pm \sqrt{[1-f^2(x)][1-g^2(x)]}\} dx \leq b-a.$$

**【解】** 因为  $|f(x)| < 1, |g(x)| < 1$ ,

所以可令  $f(x) = \sin u, g(x) = \sin v$ , 于是

$$\begin{aligned} & |f(x)g(x) \pm \sqrt{(1-f^2(x))(1-g^2(x))}| \\ &= |\sin u \sin v \pm \sqrt{(1-\sin^2 u)(1-\sin^2 v)}| \\ &= |\sin u \sin v \pm \cos u \cos v| = |\cos(u \pm v)| \leq 1, \\ & \int_a^b [f(x)g(x) \pm \sqrt{(1-f^2(x))(1-g^2(x))}] dx \\ \text{故} \quad & \leq \int_a^b |f(x)g(x) \pm \sqrt{(1-f^2(x))(1-g^2(x))}| dx \\ & \leq \int_a^b dx = b-a. \end{aligned}$$

## 二、利用微分中值定理

**提示** 该法适用于: 经过简单变形, 不等式的一端可写成  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  或  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ , 或欲证

命题是区间内“至少”一点  $\xi$  (或  $x_0$ ) 使命题成立.

**证题程序:**

(1) 在  $[a, b]$  上由题意作两函数  $f(t), g(t)$ ;

(2) 写出微分中值公式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \quad \text{或} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};$$

(3) 根据需要对  $f'(\xi), g'(\xi)$  进行放缩.

**【例 13.22】** 设不恒为常数的函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b)$ , 证明在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f'(\xi) > 0$ .

**【证】** 因为  $f(a) = f(b)$  且  $f(x)$  不恒为常数,

所以至少存在一点  $c \in (a, b)$  使得  $f(c) \neq f(a) = f(b)$ .

不妨设  $f(c) > f(a) = f(b)$ , 显然  $f(x)$  在  $[a, c]$  上满足拉格朗日定理条件, 于是至少存在一个  $\xi \in (a, c) \subset (a, b)$  使

$$f'(\xi) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0.$$

同理可证  $f(c) < f(a) = f(b)$  的情形.

**【例 13.23】** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f(a) = f(b) = 0, f(c) > 0$ ,  $a < c < b$ , 则至少存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f''(\xi) < 0$ .

**【证】** 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足拉格朗日定理条件, 可知存在一个  $\eta_1 \in (a, c)$  使得

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\eta_1),$$

又因为  $f(c) > 0, f(a) = 0, c-a > 0$ , 所以  $f'(\eta_1) > 0, \eta_1 \in (a, c)$ ,

同理有  $f'(\eta_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ .

因为  $f(c) > 0, f(b) = 0, b-c > 0$ , 所以  $f'(\eta_2) < 0, \eta_2 \in (c, b)$

又因为  $f'(x)$  在  $[\eta_1, \eta_2]$  上连续, 在  $(\eta_1, \eta_2)$  可导, 再由拉格朗日定理知存在一个  $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ , 使

$$\frac{f'(\eta_2)-f'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=f''(\xi),$$

因为  $f'(\eta_2) - f'(\eta_1) < 0, \eta_2 - \eta_1 > 0$ , 所以  $f''(\xi) < 0$ .

**【例 13.24】** 证明: 当  $x > 0$  时, 证明:  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .

**【分析】** 因为  $x > 0$ , 所以  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1} < 1$ . 因此可用拉格朗日中值定理证.

**【证】** 令  $f(x) = \ln x$ , 当  $x > 0$  时, 显然它在  $[1, 1+x]$  满足拉格朗日中值定理的条件, 于是  $\exists \xi \in (1, 1+x)$  使

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1} = \frac{1}{\xi}, 1 < \xi < 1+x,$$

因为  $\ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x), \frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi} < 1$ ,

所以  $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$ , 即  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .

**【例 13.25】** 设  $a > e, 0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ , 求证:  $a^y - a^x > (\cos x - \cos y)a^x \ln a$ .

**【分析】** 原不等式等价于

$$\frac{a^y - a^x}{\cos y - \cos x} < -a^x \ln a,$$

由不等式左端的形式可知,用柯西中值定理证明命题可能会成功.

【证】令  $f(t) = a^t, g(t) = \cos t$ , 由题设条件可知,  $f(t), g(t)$  在  $[x, y] (0 < x < y)$  上满足柯西中值定理条件, 于是有

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即 
$$\frac{a^x - a^y}{\cos x - \cos y} = \frac{a^\xi \ln a}{-\sin \xi}, 0 < x < \xi < y < \frac{\pi}{2},$$
 故

$$a^y - a^x = (\cos x - \cos y) a^\xi \ln a \cdot \frac{1}{\sin \xi} > (\cos x - \cos y) a^\xi \ln a > (\cos x - \cos y) a^x \ln a.$$

【例 13.26】设  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ , 且  $|f(x)| \leq |\sin x|, a_1, a_2, \cdots, a_n$  为实常数, 试证:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

【证】  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx, f(0) = 0,$

$$f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx.$$

显然  $f(x)$  在  $[0, x]$  或  $[x, 0]$  上满足拉格朗日定理的条件, 于是有  $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$ ,  $\xi$  在 0 与  $x$  之间.

因此,  $|f(x)| = |x| |f'(\xi)|$

$$= |x| |a_1 \cos \xi + 2a_2 \cos 2\xi + \cdots + na_n \cos n\xi|,$$

即 
$$|a_1 \cos \xi + 2a_2 \cos 2\xi + \cdots + na_n \cos n\xi| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|},$$

两边取  $x \rightarrow 0$  的极限, 因为  $\xi$  在 0 与  $x$  之间, 所以当  $x \rightarrow 0$  时,  $\xi \rightarrow 0$ , 故

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

【例 13.27】设  $f''(x) < 0, f(0) = 0$ , 证明: 对任何  $x_1 > 0, x_2 > 0$  有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

【分析】因为  $f(x)$  可导, 又  $f(0) = 0$ , 可知一定可用拉格朗日中值定理证明.

【证】由拉格朗日中值定理有

$$f(x_1) = f(x_1) - f(0) = x_1 f'(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < x_1,$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = x_1 f'(\xi_2), \quad x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2,$$

不妨设  $x_1 \leq x_2$ , 从而  $\xi_1 < \xi_2$ , 因为  $f''(x) < 0$ , 所以  $f'(x)$  “ $\searrow$ ”, 又因为  $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$ ,

故 
$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) < x_1 f'(\xi_1) = f(x_1),$$

即 
$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

### 三、利用函数的单调增减性(重点)

**提示** 该法适用于某区间上成立的函数不等式, 对于数值不等式通常是通过做辅助函数完成的.

**证题程序:**

(1) 移项(有时需要作简单的恒等变形), 使不等式一端为“0”, 另一端即为所作辅助函数  $f(x)$ ;

(2) 求  $f'(x)$  并验证  $f(x)$  在指定区间的增减性;

(3) 求出区间端点的函数值(或极限值),作比较即得所证.

### 文字不等式的证明方法:

将其转化为函数不等式,然后再利用函数的单调增减性证明.

转为函数不等式的具体作法如下:

利用观察法,观察文字(如  $a, b$ ) 出现的次数,若哪个大于或等于 2,则将该文字设为  $x$ ,则文字不等式就转化为了函数不等式.

**【例 13.28】** 证明:当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ .

**【证】** 只证  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ . 显然  $\sin x > \frac{2}{\pi}x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$ . 令  $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$ .

因为  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$ , (因为  $\tan x > x$ )

所以  $f(x)$  “ $\searrow$ ”, 又  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = 0$ ,

故,当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

即  $\frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} > 0$ . 于是  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ .

**【例 13.29】** 已知  $\alpha \in (-1, +\infty)$ ,  $t$  在 0 与  $\alpha$  之间,求证:  $\left| \frac{\alpha-t}{1+t} \right| \leq |\alpha|$ .

**【证】** 令  $f(t) = \frac{\alpha-t}{1+t} - \alpha$ ,

因为  $f'(t) = \frac{-1-\alpha}{(1+t)^2} < 0$ , 所以  $f(t)$  “ $\searrow$ ”. 且  $f(0) = 0, f(\alpha) = -\alpha$ ,

所以  $-\alpha \leq \frac{\alpha-t}{1+t} - \alpha \leq 0$ , 或  $0 \leq \frac{\alpha-t}{1+t} - \alpha \leq -\alpha$ .

即  $0 \leq \frac{\alpha-t}{1+t} \leq \alpha$ , 或  $\alpha \leq \frac{\alpha-t}{1+t} \leq 0$ , 故  $\left| \frac{\alpha-t}{1+t} \right| \leq |\alpha|$ .

**【例 13.30】** 设  $f(x), g(x)$  二阶可导, 当  $x > 0$  时,  $f''(x) > g''(x)$  且  $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0)$ , 证明: 当  $x > 0$  时,  $f(x) > g(x)$ .

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

**【证】** 令

$$F'(x) = f'(x) - g'(x),$$

$$F''(x) = f''(x) - g''(x).$$

因为当  $x > 0$  时,  $f''(x) > g''(x)$ , 所以当  $x > 0$  时,  $F''(x) > 0$ , 即  $F'(x)$  单调递增.

又  $f'(0) = g'(0)$ , 即  $F'(0) = 0$ . 所以  $F'(x) > F'(0) = 0$ , 因之  $F(x)$  单调递增.

又因为  $f(0) = g(0)$ , 即  $F(0) = 0$ , 故  $F(x) > F(0) = 0$ .

即  $f(x) - g(x) > 0$ , 亦即  $f(x) > g(x)$ .

**【例 13.31】** 证明: 当  $x > 0$  时,  $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$ .

**【证】** 令  $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$ . 因为  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} < 0$ , 所以  $f(x)$  单调递减.

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} \right) = 0$ ,

所以当  $x > 0$  时,  $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} > 0$ , 即  $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$ .

**【例 13.32】** 设  $b > a > 0$ , 证明:  $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$ .

**提示** 一般地讲, 文字不等式的证明是化为函数不等式, 通过函数的单调性来得出结果.

**【分析】** 当  $b > a > 0$  时,  $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b} \Leftrightarrow (\ln b - \ln a)(a+b) > 2(b-a)$ . 令  $b = x$ .

**【证】** 令  $f(x) = (\ln x - \ln a)(a+x) - 2(x-a)$ , ( $x \geq a$ ).

因为  $f'(x) = \frac{1}{x}(a+x) + (\ln x - \ln a) - 2$ ,  $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2} \geq 0$ , ( $x \geq a$ )

所以  $f'(x)$  “↗”. 又  $f'(a) = 0$ , 于是  $f'(x) \geq 0$ , ( $x \geq a$ ).

因而  $f(x)$  “↗”, 又  $f(a) = 0$ , 故当  $b > a > 0$  时, 有  $f(b) > f(a) = 0$ .

即  $(\ln b - \ln a)(a+b) - 2(b-a) > 0$ ,

亦即  $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$ .

凡涉及积分不等式的命题, 读者可见第四章.

**【例 13.33】** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

**【证】** 令  $b = x$ , 作辅助函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt - (x-a)^2$ , 于是

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt + \frac{1}{f(x)} \int_a^x f(t) dt - 2(x-a) \\ &= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)} dt + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)} dt - \int_a^x 2 dt \\ &= \int_a^x \left[ \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2 \right] dt \geq 0. \quad \left[ \text{因为 } f(x) > 0, \text{ 所以 } \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geq 2 \right]. \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  单调增加, 于是,

当  $b \geq a$  时, 有  $F(b) \geq F(a) = 0$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

#### 四、利用函数的极值与最值

**提示** 适用范围也是在某区间上成立的不等式, 证明的方法基本上与第三部分所讲相似, 不过

这里与所作的辅助函数  $F(x)$  比较的不是函数的端点值, 而是极值与最值.

**【例 13.34】** 设  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p > 1$ , 证明不等式:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

**【证】** 令  $F(x) = x^p + (1-x)^p$ ,

$$F'(x) = px^{p-1} + p(1-x)^{p-1}(-1) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}],$$



$$F''(x) = p(p-1)x^{p-2} + p(p-1)(1-x)^{p-2}.$$

令  $F'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2}$ ,

$$F''\left(\frac{1}{2}\right) = p(p-1)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}\right] > 0, (\text{因为 } p > 1)$$

故,  $F(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处取极小值.

因为 
$$F(1) = F(0) = 1, F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}},$$

所以  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上最大值为 1, 最小值为  $\frac{1}{2^{p-1}}$ ,

故 
$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

**【例 13.35】** 试证: 若  $m > 0, n > 0$ , 则

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n},$$

**【证】** 令  $F(x) = x^m(a-x)^n$ ,

$$F'(x) = mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1},$$

$$F''(x) = m(m-1)x^{m-2}(a-x)^n - 2mnx^{m-1}(a-x)^{n-1} + n(n-1)x^m(a-x)^{n-2}.$$

令  $F'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{ma}{m+n}$ ,

$$\begin{aligned} \text{因为 } F''\left(\frac{ma}{m+n}\right) &= m(m-1)\left(\frac{ma}{m+n}\right)^{m-2}\left(\frac{na}{m+n}\right) - 2mn\left(\frac{ma}{m+n}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{m+n}\right)^{n-1} + \\ &\quad n(n-1)\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m\left(\frac{na}{m+n}\right)^{n-2} \\ &= \frac{-m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}} < 0, \end{aligned}$$

所以  $F\left(\frac{ma}{m+n}\right)$  是  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的极大值, 因为  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上只有唯一的一个极大值, 所以  $F\left(\frac{ma}{m+n}\right)$  最大.

故,  $F(x) \leq F\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ , 即  $x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$

**【例 13.36】** 求证: 若  $x, y, z$  为满足  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  的正数, 则

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

**【证】** 令  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 8)$ ,

$$\text{解联立方程组} \begin{cases} F'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 3y^2 + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 3z^2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8, \end{cases}$$

得  $x = y = z = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ , 由题意可知驻点为  $P\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ ,

$$F''_{x^2}|_P = (6x + 2\lambda)|_P = 3x|_P = 2\sqrt{6},$$

$$F''_{y^2}|_P = 2\sqrt{6}, F''_{z^2}|_P = 2\sqrt{6}, F''_{xy} = F''_{xz} = F''_{yz} = 0,$$

因为  $d^2F|_P = F''_{x^2}|_P dx^2 + F''_{y^2}|_P dy^2 + F''_{z^2}|_P dz^2 > 0$ ,

所以  $W = x^3 + y^3 + z^3$  在  $P\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$  处取极小值, 由于极小值唯一, 即为最小值

$$\text{故 } (x^3 + y^3 + z^3)|_P = 3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = 16\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x^3 + y^3 + z^3.$$

## 五、利用函数图形的凹凸性

**【例 13.37】** 利用函数图形的凹凸的定义, 证明下列不等式:

$$(1) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y);$$

$$(2) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

**【证】** (1) 令  $f(t) = e^t$ ,

因为  $f''(t) = e^t > 0$ ,

所以  $f(t) = e^t$  在  $(x, y)$  或  $(y, x)$  区间内是凹的,

于是  $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ , 即  $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ .

(2) 令  $f(t) = t \ln t, (t > 0)$

$$f'(t) = \ln t + 1, f''(t) = \frac{1}{t} > 0.$$

故  $f(t) = t \ln t$  在  $(x, y)$  或  $(y, x), x > 0, y > 0$  是凹的, 于是

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即

$$\frac{1}{2}[x \ln x + y \ln y] > \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2},$$

亦即

$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

## 六、利用泰勒展开式

**提示** 该法适用于题设中函数  $f(x)$  具有二阶和二阶以上可导, 且最高阶导数的大小或上下界可知的命题.

**证题程序:**

(1) 写出比最高阶导数低一阶的函数的泰勒展开式;

(2) 恰当选择等式两边  $x$  与  $x_0$  (不要认为展开点一定以  $x_0$  为最合适, 有时以  $x$  为佳);

(3) 根据所给的最高阶导数的大小或界对展开式进行放缩.

**【例 13.38】** 设  $\varphi(x)$  在区间  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $\varphi''(x) \geq 0$ , 则

$$\varphi\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right) \leq \frac{p_1 \varphi(x_1) + p_2 \varphi(x_2) + \cdots + p_n \varphi(x_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n},$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  均为正数,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ .

【证】令  $x_0 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$ ,

由于  $\varphi(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 因此  $\varphi(x)$  在  $x = x_0$  处可展成一阶泰勒公式:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

因为  $\varphi''(x) \geq 0, x \in (a, b)$ , 所以  $\varphi''(\xi) \geq 0$ ,

于是  $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0)$ .

分别令  $x$  为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 同时分别乘以正数  $p_1, p_2, \dots, p_n$  得

$$p_1 \varphi(x_1) \geq p_1 \varphi(x_0) + p_1 \varphi'(x_0)(x_1 - x_0),$$

$$p_2 \varphi(x_2) \geq p_2 \varphi(x_0) + p_2 \varphi'(x_0)(x_2 - x_0),$$

$\vdots$

$$p_n \varphi(x_n) \geq p_n \varphi(x_0) + p_n \varphi'(x_0)(x_n - x_0).$$

将以上几个不等式左右分别相加得

$$\begin{aligned} p_1 \varphi(x_1) + p_2 \varphi(x_2) + \cdots + p_n \varphi(x_n) &\geq (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) [(p_1 x_1 + \\ p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n) - x_0 (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)] &= (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \varphi(x_0), \text{ (因为 } x_0 = \\ \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \text{ 最后一项为零).} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \varphi\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right) \leq \frac{p_1 \varphi(x_1) + p_2 \varphi(x_2) + \cdots + p_n \varphi(x_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

【例 13.39】设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 且  $f''(x) > 0$ , 证明  $f(x) > x$  ( $x \neq 0$ )

【证】由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 可知  $f(0) = 0$ . 又  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ .

因为  $f(x)$  二阶可导, 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处可展成一阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!} f''(\xi),$$

由于  $f''(x) > 0$ , 所以  $f''(\xi) > 0$ , 于是

$$f(x) > f(0) + f'(0)x = x,$$

即  $f(x) > x$ .

【例 13.40】设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶导数连续,  $f(0) = f(1) = 0$ , 并且当  $x \in (0, 1)$  时,  $|f''(x)| \leq$

$$A, \text{ 求证: } |f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1].$$

【证】因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶连续导数, 所以  $f(x)$  可展成一阶泰勒公式.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2, \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间,}$$

取  $x = 0, x_0 = x$ , 则泰勒公式为

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + \frac{(0 - x)^2}{2!} f''(\xi_1), 0 < \xi_1 < x \leq 1 \quad ①$$

取  $x = 1, x_0 = x$ , 则泰勒公式为

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + \frac{(1 - x)^2}{2!} f''(\xi_2), 0 < \xi_2 < x \leq 1 \quad ②$$

② - ① 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2] \\ &= \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2] \quad [\text{因为 } f(1) = f(0) = 0], \end{aligned}$$

又因为  $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$ ,

所以  $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1),$

但当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$ , 故  $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}.$

## 七、杂例

**【例 13.41】** 证明不等式:  $\ln(\prod_{i=1}^{n-1} i^i) \leq \int_2^n x \ln x dx \leq \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + 1.$

**【证】** 先证  $\int_2^n x \ln x dx \leq \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + 1.$

由分部积分法有

$$\begin{aligned} \int_2^n x \ln x dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_2^n - \int_2^n \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_2^n = \frac{n^2}{2} \ln n - 2 \ln 2 - \frac{n^2}{4} + 1 < \frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + 1. \end{aligned}$$

再证  $\ln(\prod_{i=1}^{n-1} i^i) \leq \int_2^n x \ln x dx.$

因为  $\ln(\prod_{i=1}^{n-1} i^i) = \ln[1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot (n-1)^{n-1}]$

$$= 2 \ln 2 + 3 \ln 3 + \cdots + (n-1) \ln(n-1),$$

又  $\int_2^n x \ln x dx = \int_2^3 x \ln x dx + \int_3^4 x \ln x dx + \cdots + \int_{n-1}^n x \ln x dx,$

令  $f(x) = x \ln x, f'(x) = \ln x + 1 > 0$  (当  $x \geq 2$  时),

可知在  $[2, n]$  内,  $f(x)$  单调递增, 于是有

$$\begin{aligned} \int_2^3 x \ln x dx &> 2 \ln 2, \\ \int_3^4 x \ln x dx &> 3 \ln 3, \\ &\vdots \\ \int_{n-1}^n x \ln x dx &> (n-1) \ln(n-1), \end{aligned}$$

故  $\int_2^n x \ln x dx \geq \ln(\prod_{i=1}^{n-1} i^i)$ , (等号仅当  $n = 2$  时成立). 综上所述命题得证.

**【例 13.42】** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0, \int_0^1 f(x) dx = 1$ , 求证:  $\exists c, 0 \leq c \leq 1$ , 使得  $|f(c)| \geq 4.$

**【分析】**  $|f(c)| \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} |f(c)| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} |f(c)| \geq \int_0^1 x f(x) dx.$

**【证】**  $1 = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$  (因为  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ )

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \\
 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) |f(x)| dx,
 \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 所以  $|f(x)|$  在  $[0, 1]$  上连续, 于是必存在一个  $c, 0 \leq c \leq 1$ , 使

$$|f(c)| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

$$\begin{aligned}
 \text{因此} \quad 1 &\leq |f(c)| \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right] \\
 &= |f(c)| \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right] = \frac{1}{4} |f(c)|,
 \end{aligned}$$

故  $|f(c)| \geq 4$ .

**【例 13.43】** 设  $P, Q, R$  在  $L$  上连续,  $L$  为光滑弧段, 弧长为  $l$ , 证明:

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leq Ml, \text{ 其中 } M = \max_{(x, y, z) \in L} \{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\}.$$

**提示** 凡涉及弧的长度的曲线积分一定要化为对弧长的曲线积分.

$$\text{令 } \frac{dx}{dl} = \cos \alpha, \frac{dy}{dl} = \cos \beta, \frac{dz}{dl} = \cos \gamma, \text{ 则 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是} \quad \int_L P dx + Q dy + R dz &= \int_L \left( P \frac{dx}{dl} + Q \frac{dy}{dl} + R \frac{dz}{dl} \right) dl \\
 &= \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl \\
 &= \int_L \{P, Q, R\} \cdot \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} dl \\
 &= \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \cos \theta dl,
 \end{aligned}$$

其中,  $\theta$  为矢量  $\{P, Q, R\}$  与  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  的夹角.

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad \left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| &= \left| \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \cos \theta dl \right| \\
 &\leq \int_L \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} |\cos \theta| dl \leq M \int_L dl = Ml,
 \end{aligned}$$

其中,  $|\cos \theta| \leq 1, M = \max_{(x, y, z) \in L} \{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\}.$

### 习 题 十 三

1. 证明不等式

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2} \quad (a > 1, n \geq 1).$$

2. 若  $a \geq 0, b \geq 0, 0 < p < 1$ , 证明:

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

3. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续导数, 满足  $0 < f'(x) < 1$ , 并且  $f(0) = 0$ , 求证:

$$\left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

4. 求证:  $|a|^p + |b|^p \leq 2^{1-p} (|a| + |b|)^p, (0 < p < 1).$

5. 求证: 若  $x + y + z = 6$ , 则  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ , 其中  $x, y, z$  皆非负.

6. 证明:

(1) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是增加的, 且其上  $f''(x) > 0$ , 则

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

(2) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是增加的, 且其上  $f''(x) < 0$ , 则

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x)dx < (b-a)f(b).$$

7. 证明:

$$(1) \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} < \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}};$$

$$(2) \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

8. 设  $f''(x) \in C[a, b]$ , 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 求证:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a < x < b} |f''(x)|.$$

9. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且当  $x \in [a, b]$  时,  $f''(x) < 0$ , 试证:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx > \frac{1}{2} |f(a) + f(b)|.$$

10. 设  $x > 0$ . 证明:  $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$

11. 若  $f'(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上连续, 且  $f'(x) \geq 0$ , 则对任意正整数  $n$ , 有

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{2[f(2\pi) - f(0)]}{n}.$$

12. 设在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 试证:

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) > f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2].$$

13. 设函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在光滑曲线  $c$  上可积,  $L$  为曲线弧  $c$  的弧长,

$$\text{而 } M = \max_{(x,y) \in c} \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ 试证: } \left| \int_c Pdx + Qdy \right| \leq LM.$$

14. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $f(0) = 3$ , 且对于  $[0, 1]$  上的一切  $x$  和  $y$   $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

$$\text{成立, 试证: } \frac{5}{2} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{7}{2}.$$

## 参 考 答 案

1. 对  $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$  在  $[n, n+1]$  上利用拉氏定理.

2. 作  $f(x) = x^p, f(0) = 0, f''(x) < 0$ , 利用拉氏定理.

3. 作  $F(x) = \left[ \int_0^x f(t)dt \right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt.$

$$F'(x) = f(x)[2 \int_0^x f(t)dt - f^2(t)], \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > 0,$$

$$\text{令 } g(x) = 2 \int_0^x f(t)dt - f^2(t), \text{ 利用导数证明: 当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) > 0.$$

4. 利用凹凸性证明: 作  $f(t) = t^p (t > 0), f''(t) = p(p-1)t^{p-2} < 0$ ,

$$\text{有 } \frac{f(|a|) + f(|b|)}{2} \leq f\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right).$$

5. 利用多元条件极值证明.

6. 利用泰勒公式证明.

7. 利用结论: 如  $f''(x) > 0$ , 则  $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) > f(\sum_{i=1}^n p_i x_i)$ ;

如  $f''(x) < 0$ , 则  $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) < f(\sum_{i=1}^n p_i x_i)$ , 其中  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

(1) 令  $f(x) = x^2$ ,  $p_i = \frac{1}{n}$ ; (2) 令  $f(x) = \ln x$ ,  $p_i = \frac{1}{n}$ , 再去掉对数即可.

8. 先证明  $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b) dx$ , 或利用泰勒公式证明.

9. 利用泰勒公式, 有

$$f(b) = f(x) + f''(x)(b-x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(b-x)^2 < f(x) + f'(x)(b-x),$$

$$\begin{aligned} \text{两边对 } x \text{ 积分, } \quad (b-a)f(b) &< \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x)(b-x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + f(x)(b-x) \Big|_a^b + \int_a^b f(x) dx \\ &= 2 \int_a^b f(x) dx - f(a)(b-a), \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right| > (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

10. 令  $x = \frac{1}{t}$ , 原不等式化为:  $\frac{2t}{t+2} < \ln(t+1) < \frac{t}{\sqrt{t+1}}$  ( $t > 0$ ), 作辅助函数利用单调性证明.

11. 利用分部积分有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx &= -\frac{1}{n} f(x) \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= \frac{f(0) - f(2\pi)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx, \end{aligned}$$

因为,  $f'(x) \geq 0$ , 所以,  $f(2\pi) \geq f(0)$ , 有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| &\leq \frac{f(2\pi) - f(0)}{n} + \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx \right| \\ &\leq \frac{f(2\pi) - f(0)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |f'(x) \cos nx| dx \\ &\leq \frac{f(2\pi) - f(0)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = \frac{2[f(2\pi) - f(0)]}{n}. \end{aligned}$$

12. 利用拉氏定理证明,  $f'(x)$  单调增加,  $x_1 < \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 < x_2$ ;

$$(1) f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] - f(x_1) = (1-\alpha)(x_2 - x_1)f'(\xi_1),$$

$$(2) f(x_2) - f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha(x_2 - x_1)f'(\xi_2),$$

$$\xi_2 > \xi_1, \quad f'(\xi_2) > f'(\xi_1),$$

则(2)式左边乘以  $(1-\alpha)$  大于(1)式左边乘以  $\alpha$ , 整理即得要证明的结论.

13. 略.

14. 令  $y = 0$ , 得  $3-x \leq f(x) \leq 3+x$ , 两边积分即可.

## 第二篇 线性代数

### 第一章 行 列 式

#### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

##### 一、排列与逆序

###### 1. $n$ 级排列

由  $n$  个自然数  $1, 2, \dots, n$  组成的一个无重复的有序数组  $i_1 i_2 \cdots i_n$  称为一个  $n$  级排列.  $n$  级排列共有  $n!$  个.

###### 2. 逆序

在一个  $n$  级排列中, 如果一个较大数排在一个较小数之前, 就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 用  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$  或  $\tau$  表示排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  的逆序数.

如果排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  的逆序数为偶数, 则称它为偶排列; 如果排列的逆序数为奇数, 则称它为奇排列.

###### 3. 对称

排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  中, 交换任意两数  $i_i$  与  $i_j$  的位置, 称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性. 任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序, 并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

**提示** 任一排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  的逆序数可如下计算:

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1 \text{ 后边比 } i_1 \text{ 小的数的个数} + i_2 \text{ 后边比 } i_2 \text{ 小的数的个数} + \cdots + i_{n-1} \text{ 后边比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}.$$

**【例 1.1】** 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

$$(1) 5 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4; \quad (2) n(n-1) \cdots 3 \times 2 \times 1; \quad (3) 135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n).$$

**【解】** (1)  $\tau(5 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4) = 4 + 2 + 1 + 0 = 7$  为奇排列.

$$(2) \tau[n(n-1) \cdots 2 \times 1] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

由于  $\frac{n(n-1)}{2}$  的奇偶性需根据  $n$  而定, 故讨论如下:

当  $n = 4k$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$  是偶数;

当  $n = 4k+1$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$  是偶数;

当  $n = 4k+2$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$  是奇数;



当  $n = 4k + 3$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$  是奇数.

综上所述, 当  $n = 4k$  或  $4k+1$  时, 此排列为偶排列; 当  $n = 4k+2$  或  $4k+3$  时, 此排列为奇排列, 其中  $k$  为任意非负整数.

(3) 该排列中前  $n$  个数  $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$  之间不构成逆序, 后  $n$  个数  $2, 4, 6, \dots, (2n)$  之间也不构成逆序, 只有前  $n$  个数与后  $n$  个数之间才构成逆序.

$$\tau(135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n)) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

奇偶性情况与(2)完全一致.

**【例 1.2】** 设排列  $x_1 x_2 \cdots x_n$  的逆序数为  $k$ , 则  $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$  的逆序数为\_\_\_\_\_.

**【解】** 设  $x_1 x_2 \cdots x_n$  的关于  $x_1$  的逆序为  $m_1$ , 则其顺序有  $(n-1) - m_1$ ;  $x_1 x_2 \cdots x_n$  的关于  $x_2$  的逆序为  $m_2$ , 则其顺序有  $(n-2) - m_2$ ;  $\dots$ ;  $x_1 x_2 \cdots x_n$  的关于  $x_n$  的逆序为  $m_n$ , 则其顺序有  $(n-n) - m_n$ , 而  $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$ , 于是

$$\begin{aligned} \tau(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1) &= [(n-1) - m_1] + [(n-2) - m_2] + \cdots + [(n-n) - m_n] \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 - (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - k \end{aligned}$$

**【例 1.3】** 选择  $i, j, k$  使  $21i36jk97$  为偶排列.

**【解】**  $i, j, k$  可供选择的数字为  $4, 5, 8$ , 设  $i = 4, j = 5, k = 8$

则  $\tau(214\ 365\ 897) = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5$  为奇排列, 由交换一个  $n$  级排列中的任何两个数字, 则改变一个排列的奇偶性可知:  $i = 5, j = 4, k = 8; i = 4, j = 8, k = 5; i = 8, j = 5, k = 4$  都是偶排列.

## 二、 $n$ 阶行列式的定义

由  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为  $n$  阶行列式. 其值是所有取自不同行不同列的  $n$  个元素的乘积  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的代数和, 各项的符号由  $n$  级排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  决定. 当  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为偶排列时, 对应项取正号; 当  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为奇排列时, 对应项取负号, 即

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中,  $D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对所有  $n$  级排列求和;  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  为排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数.

**注**  $n$  阶行列式  $D = |a_{ij}|$  的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中,  $i_1 i_2 \cdots i_n$  和  $j_1 j_2 \cdots j_n$  都是  $n$  级排列.

**【例 1.4】** 填空题.

(1) 在五阶行列式中, 项  $a_{12} a_{31} a_{54} a_{43} a_{25}$  的符号应取\_\_\_\_\_;

- (2) 四阶行列式中,带负号且包含因子  $a_{23}$  和  $a_{31}$  的项为\_\_\_\_\_;
- (3) 如果  $n$  阶行列式中,负项的个数为偶数,则  $n \geq$  \_\_\_\_\_;
- (4) 如果  $n$  阶行列式中等于零的元素个数大于  $n^2 - n$ ,那么此行列式的值为\_\_\_\_\_;
- (5) 在函数

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中,  $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_.

【解】(1) 正, (2)  $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ , (3) 3, (4) 0 (5) -1.

【分析】(1) 适当调整该项元素位置,使第一个下标按自然顺序排列,则第二个下标排列为 25134,其逆序数为 4,故取正号.或由  $\tau(13542) + \tau(21435) = 6$  也知该项符号为正.

(2) 由行列式的定义可知,包含因子  $a_{23}$  和  $a_{31}$  的项必为  $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$ ,其中  $i, j$  为 2, 4 或 4, 2,又此项符号为负,所以  $i31j$  为奇排列,从而  $i = 4, j = 2$ .

(3)  $n$  阶行列式中,共有  $n!$  项,其中正、负项各占一半,若负项的个数为偶数,必有  $n \geq 4$ .

(4)  $n$  阶行列式中,共有  $n^2$  个元素,若等于零的元素个数大于  $n^2 - n$ ,那么不等于零的元素个数就小于  $n$ ,又  $n$  阶行列式的每一项是  $n$  个不同元素的乘积,所以必定为零,从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义,仅当  $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$  四个元素相乘才能出现  $x^3$  项,这时该项排列的逆序数为  $\tau(2134) = 1, (-1)^{\tau(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -x^3$ ,故含  $x^3$  的项系数为 -1.

【例 1.5】选择题.

(1) 若  $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}$  是五阶行列式中带有正号的一项,则  $i, j$  之值为

(A)  $i = 1, j = 3$ . (B)  $i = 2, j = 3$ .

(C)  $i = 1, j = 2$ . (D)  $i = 2, j = 1$ . 【 】

(2) 下列各项中,为某五阶行列式中带有正号的项是

(A)  $a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$ . (B)  $a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$ .

(C)  $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$ . (D)  $a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$ . 【 】

(3) 设  $D = |a_{ij}|$  为  $n$  阶行列式,则第二对角线上元素的乘积  $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$  在行列式中的符号为

(A) 正. (B) 负. (C)  $(-1)^n$ . (D)  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ . 【 】

【解】(1) C, (2) D, (3) D.

【分析】(1) 由行列式的定义知,每一项应取自不同行不同列的五个元素之积,因此  $i, j$  只能取 1, 2,故可立即排除(A), (B),当  $i = 1, j = 2$  时,  $a_{11}a_{23}a_{35}a_{42}a_{54} = a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$ ,且  $\tau(13542) = 4$  为偶排列,故(C) 为正确答案.当  $i = 2, j = 1$  时,此项应取负号,不正确.

(2) (A) 中有取自同一行的元素  $a_{44}, a_{41}$ ; (B) 中有取自同一列的元素,均不是行列式的项, (C), (D) 虽均为五阶行列式的一项,但(C) 应取负号,故只有(D) 正确.

(3) 因为  $\tau[n(n-1)\cdots 21] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ ,故(D) 为正确答案.

## 三、行列式的基本性质

性质 1 行列式的行和列互换后,行列式的值不变.

性质 2 行列式的两行(列)互换,行列式改变符号.

推论 如果行列式有两行(或两列)完全相同,则行列式的值等于零.

性质 3 数乘行列式等于用这个数乘该行列式中的某一行(或列).

推论 若行列式中有一行(或列)元素全为零,则该行列式的值为零.

性质 4 行列式中若有两行(或两列)元素对应成比例,则该行列式的值为零.

性质 5 如果行列式的某一行(或列)的所有元素都可表示为两项之和,则该行(或列)等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(或列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式某行(或列)的  $k$  倍加到另一行(或列),其值不变.

注 (1) 设  $A, B$  均为  $n$  阶矩阵,一般地

$$|A \pm B| \neq |A| \pm |B|.$$

(2) 设  $A, B$  均为  $n$  阶矩阵,一般地  $AB \neq BA$ , 但  $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$ .

(3) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,则  $|kA| = k^n |A|$ , 请特别注意  $|kA| \neq k |A|$ .

(4)  $|A^T| = |A|$ , 特别地,若  $A$  为  $n$  阶反对称矩阵,即  $A^T = -A$ , 则当  $n$  为奇数时,  $|A| = 0$ .

【例 1.6】填空题.

(1) 设  $A$  为  $3 \times 3$  矩阵,  $B$  为  $4 \times 4$  矩阵, 且  $|A| = 1, |B| = -2$ , 则  $||B|A| =$  \_\_\_\_\_.

(2) 设  $A$  为  $3 \times 3$  矩阵,  $|A| = -2$ , 把  $A$  按列分块为  $A = (A_1, A_2, A_3)$ , 其中  $A_j (j = 1, 2, 3)$  是  $A$  的第  $j$  列, 则  $|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设  $\alpha, \beta, \gamma$  是方程  $x^3 + px + q = 0$  的三个根, 则行列式  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

【解】(1)  $-8$ , (2)  $6$ , (3)  $0$ .

【分析】(1)  $||B|A| = |B|^3 |A| = (-2)^3 \cdot 1 = -8$ .

注意  $||B|A| = |B||A| = (-2) \cdot 1 = -2$  是错误的.

(2) 此题需要综合应用行列式的性质.

$|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| = |A_3, 3A_2, A_1| + |-2A_1, 3A_2, A_1|$ , 对于  $|-2A_1, 3A_2, A_1|$ , 第一列和最后一列对应元素成比例, 故其值为零, 而

$$|A_3, 3A_2, A_1| = -|A_1, 3A_2, A_3| = -3|A_1, A_2, A_3| = -3|A| = 6.$$

(3) 由根与系数的关系知  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , 于是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

【例 1.7】选择题.

(1) 设四阶矩阵  $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ ,  $B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  均为 4 维列向量, 且已知行列式  $|A| = 4$ ,  $|B| = 1$ , 则行列式  $|A+B|$  等于

(A) 5. (B) 4. (C) 50. (D) 40. 【 】

(2) 设  $A$  为四阶矩阵, 且  $|A| = 2$ , 把  $A$  按列分块为  $A = [A_1, A_2, A_3, A_4]$ , 其中  $A_j (j = 1, 2, 3, 4)$  是  $A$  的第  $j$  列, 则  $|-A_2, -A_1, -A_4, -A_3|$  等于

(A) -2. (B) 2. (C) 1. (D) 0. 【 】

(3) 设  $|A|$  是三阶矩阵  $A$  的行列式,  $A$  中 3 个列向量以  $A_1, A_2, A_3$  表示, 即  $|A| = |A_1, A_2, A_3|$ , 则  $|A|$  等于

(A)  $|A_3, A_2, A_1|$ . (B)  $|-A_1, -A_2, -A_3|$ .  
(C)  $|A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1|$ . (D)  $|A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3|$ . 【 】

(4) 设  $A$  是三阶方阵且  $|A| = 2$ , 则  $|-|A|A|$  等于

(A) 4. (B) -4. (C) 16. (D) -16. 【 】

(5)  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $k$  是非零常数, 则  $|(kA)^*|$  等于

(A)  $k|A|^{n-1}$ . (B)  $|k||A|^{n-1}$ . (C)  $k^{n(n-1)}|A|^{n-1}$ . (D)  $k^{n-1}|A|^{n-1}$ . 【 】

(6) 行列式  $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$  等于

(A) 1000. (B) -1000. (C) 2000. (D) -2000. 【 】

【解】(1) D, (2) B, (3) D, (4) D, (5) C, (6) C.

【分析】(1) 这里首先应区分矩阵相加是对应元素相加, 而行列式相加(或拆分), 只有一行(列)不同, 其余各行(列)都相同时才能相加(或拆分). 另外应注意  $|A+B| \neq |A| + |B|$ . 正确计算如下:

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 8|\alpha + \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 8[|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + |\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|] = 8[4 + 1] = 40, \end{aligned}$$

故选(D).

(2) 利用行列式的性质有

$$\begin{aligned} |-A_2, -A_1, -A_4, -A_3| &= (-1)^4 |A_2, A_1, A_4, A_3| \\ &= |A_2, A_1, A_4, A_3| = -|A_1, A_2, A_4, A_3| \\ &= |A_1, A_2, A_3, A_4| = |A| = 2, \end{aligned}$$

故(B)为正确答案.

(3) 同(1), (2) 题类似, 有

$$\begin{aligned} |A_3, A_2, A_1| &= -|A_1, A_2, A_3| = -|A|, \\ |-A_1, -A_2, -A_3| &= (-1)^3 |A_1, A_2, A_3| = -|A|, \\ |A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1| &= |2(A_1 + A_2 + A_3), A_2 + A_3, A_3 + A_1| \\ &= 2|A_1 + A_2 + A_3, -A_1, -A_2| \\ &= 2[|A_1, -A_1, -A_2| + |A_2 + A_3, -A_1, -A_2|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2[|A_2, -A_1, -A_2| + |A_3, -A_1, -A_2|] \\
 &= 2|A_3, -A_1, -A_2| = 2|A_3, A_1, A_2| \\
 &= 2|A_1, A_2, A_3| = 2|A|.
 \end{aligned}$$

这里先把后两列加到第一列;提取公因子之后,又把第一列的 $(-1)$ 倍加到第二、三列;最后利用行列式的加法性质.

$$\begin{aligned}
 |A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3| &= |A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2| + |A_1, A_1 + A_2, A_3| \\
 &= |A_1, A_1 + A_2, A_3| = |A_1, A_1, A_3| + |A_1, A_2, A_3| \\
 &= |A_1, A_2, A_3| = |A|.
 \end{aligned}$$

故(D)为正确答案.

(4)  $| -A | = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \times 2 = -16$ . 故选(D).

(5)  $(kA)^* = k^{n-1}A^*$ ,  $|(kA)^*| = |k^{n-1}A^*| = (k^{n-1})^n \cdot |A^*| = k^{n(n-1)} \cdot |A|^{n-1}$ . 故选(C).

(6) 把第二列的 $(-1)$ 倍加到第一列, $(-2)$ 倍加到第三列得

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2000.$$

【例 1.8】选择题.

(1) 设  $A, B$  是  $n(n \geq 2)$  阶方阵,则必有

(A)  $|A+B| = |A| + |B|$ .

(B)  $|AB| = |BA|$ .

(C)  $||A||B| = ||B||A|$ .

(D)  $|A-B| = |B-A|$ . 【 】

(2) 设  $A$  为  $n$  阶方阵,则  $|A| = 0$  的必要条件是

(A) 两行(列)元素对应成比例.

(B) 必有一行为其余行的线性组合.

(C)  $A$  中有一行元素全为零.

(D) 任一行为其余行的线性组合. 【 】

【解】(1)B, (2)B.

【分析】(1)一般地  $|A+B| \neq |A| + |B|$ ;  $|A-B| = |-(B-A)| = (-1)^n |B-A|$ ;

$$||A||B| = |A|^n |B|, ||B||A| = |B|^n |A|,$$

故  $||A||B| \neq ||B||A|$ ; 只有  $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$  正确.

(2)(A),(C),(D)均为  $|A| = 0$  的充分条件,而非必要条件,故选(B).

#### 四、行列式按行(列)展开定理

将  $n$  阶行列式中元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$  列的元素划掉,剩余的元素按原位置次序所构成的  $n-1$  阶行列式,称为元素  $a_{ij}$  的余子式,记为  $M_{ij}$ .

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)j-1} & a_{(i-1)j+1} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)j-1} & a_{(i+1)j+1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$a_{ij}$  的代数余子式记为  $A_{ij}$ ,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

设  $D = |(a_{ij})_{n \times n}|$  为  $n$  阶行列式,则

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} D, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = \begin{cases} D, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

其中,  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式.

行列式的任何一行(或列)的所有元素分别与它们所对应的代数余子式的乘积之和为行列式的值;行列式的任何一行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零.

【例 1.9】设  $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,

求  $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = ?$ , 其中  $A_{4j}$  为元素  $a_{4j}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) 的代数余子式.

【分析】根据行列式或按一行(一列)展开公式,有

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

从而转化为一个四阶行列式的计算. 此题若直接计算四个代数余子式,则计算较繁且容易出现差错.

【解】 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{有两行元素对应相同})$$

【例 1.10】设  $n$  阶行列式  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ , 求  $|A|$  中所有元素的代数余子式之和.

【解】如直接求  $|A|$  的每一元素的代数余子式,则计算较繁琐,可利用  $A$  的伴随矩阵的性质求解.  $|A|$  中所有元素的代数余子式,即  $A^*$  中的所有元素.

而  $A^* = |A| A^{-1} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{bmatrix},$

$|A|$  中的所有元素的代数余子式之和, 即  $A^*$  的所有元素之和为  $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{n(n+1)}{2 \cdot n!}$ .

### 五、重要公式与结论

(1) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $\det A$  (或  $|A|$ ) 表示对应的行列式, 记为

$$|A| = |A^T| = |A'| \quad (\text{"T", " ' " 均表示转置})$$

(2) 设方阵  $A$  可逆, 则  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .

(3) 设  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  的代数余子式.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

则  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

(4)  $|kA| = k^n |A|$ , ( $A$  为  $n$  阶方阵).

(5)  $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|$ ,  $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|$ ,  $\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$ ,

其中,  $A$  为  $m$  阶方阵,  $B$  为  $n$  阶方阵.

$$\text{例如: } D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\text{则 } |A| = \begin{vmatrix} O & D_1 \\ D_2 & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 3} |D_1| |D_2| = -54$$

(6) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

【例 1.11】计算  $|A| =$

$$\begin{vmatrix} 25 & 29 & 14 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

【解】

$$|A| = \begin{vmatrix} 25 & 29 & 14 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1^2 & (-1)^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^3 & (-1)^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28 & 28 & 28 & 28 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1^2 & (-1)^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^3 & (-1)^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$

$$= 28 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1^2 & (-1)^2 & 2^2 & 3^2 \\ 1^3 & (-1)^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix} = 28 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = -1344$$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

## 题型一 抽象行列式的计算

**提示** 抽象行列式计算要考核的不单纯是行列式的计算,而是通过给出与行列式相关联的方阵、伴随阵、逆矩阵、向量,在指定运算下所构成的行列式的计算,达到考核这些概念的运算性质、行列式的性质等目的.因此这些概念及性质务必非常熟悉.

**【例 1.12】** 设  $A$  为三阶方阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随阵,  $|A| = \frac{1}{8}$ , 计算  $|(\frac{1}{3}A)^{-1} - 8A^*|$ .

**【解】**  $A^* = |A| A^{-1} = \frac{1}{8} A^{-1}$ , 于是  $|(\frac{1}{3}A)^{-1} - 8A^*| = |3A^{-1} - A^{-1}| = |2A^{-1}| = 2^3 \frac{1}{|A|} = 64$ .

**【例 1.13】** 若  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 又  $A = (a_1, a_2, a_3)$ , 且  $|A| = 5$ . 再设  $B = (a_1 + 2a_2, 3a_1 + 4a_3, 5a_2)$ , 求  $|B|$ .

**【解】** 方法一: 考虑行列式性质则有

$$\begin{aligned} |B| &= |(a_1, 3a_1 + 4a_3, 5a_2)| + |(2a_2, 3a_1 + 4a_3, 5a_2)| \\ &= |(a_1, 3a_1, 5a_2)| + |(a_1, 4a_3, 5a_2)| + 0 \\ &= 0 + 20|(a_1, a_3, a_2)| + 0 = -20|A| = -100. \end{aligned}$$

方法二: 考虑矩阵或行列式实施列或行初等变换,

$$\begin{aligned} |B| &= 5|(a_1 + 2a_2, 3a_1 + 4a_3, a_2)| = 5|(a_1, 3a_1 + 4a_3, a_2)| \\ &= 5|(a_1, 4a_3, a_2)| = 20|(a_1, a_3, a_2)| = -20|A| = -100. \end{aligned}$$

方法三: 考虑矩阵运算, 则由题设  $B = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = AC$ , 又由

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

有

$$|B| = |AC| = |A||C| = -100.$$

## 题型二 低阶行列式的计算

**提示** 根据行或列元素的特点, 或者化为上(下)三角形行列式, 或者根据行列展开定理即降阶法求解. 凡与矩阵、伴随矩阵、逆矩阵以及与向量相关联的问题, 与抽象行列式的有关问题作类似处理. 在行列式化为上下三角形行列式的变换过程中避免将元素变为分数, 若原行列式中有很多元素为分数, 则先利用行列式的性质将各元素化为整数.

**【例 1.14】** 计算下列行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 2+x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+y & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}.$$



【解】(1)  $D \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [3]} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)+(2) \\ (1) \times (-2) + (3) \\ (4)-(1)}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{(4) \times 2 + (2) \\ (4) + (3)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) \leftrightarrow (4)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{(4)-(3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9.$

●  $[j]$  表示  $j$  列;  $(i)$  表示  $i$  行;  $(i) \leftrightarrow (j)$  表示两行对调;  $[i] \leftrightarrow [j]$  表示两列对调.

(2)  $D \xrightarrow{\substack{(-1) \times (2) + (1) \\ (-1) \times (4) + (3)}} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & y & y \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \times [1] + [2] \\ (-1) \times [3] + [4]}} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -y \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{按第一行展开}} x \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 2 & -y \end{vmatrix} = x(xy^2) = x^2y^2.$

【例 1.15】计算  $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

【解】 $D \xrightarrow[\text{第 1 列}]{\text{各列加到}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{各行减第一行}} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4.$

【例 1.16】设  $F(x) = \begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix},$

求: (1)  $x^4$  的系数; (2)  $x^3$  的系数; (3) 常数项.

【解】(1) 含  $x^4$  的项必为  $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$ , 可见  $x^4$  的系数为 1.

(2) 含  $x^3$  的项为:  $-a_{11}(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44}) - a_{22}(x-a_{11})(x-a_{33})(x-a_{44}) - a_{33}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{44}) - a_{44}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})$

可见  $x^3$  的系数为  $-(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})$ .

(3) 常数项, 即为  $x = 0$  时的  $F(x)$  的值.

$$F(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

【例 1.17】设  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ , 求 (1)  $A_{31} + A_{32} + A_{33}$ ; (2)  $A_{34} + A_{35}$ .

【解】将  $|A|$  中第三行的元素依次换成 5, 5, 5, 3, 3. 则第二行与第三行的对应元素相等, 于是行列式的值等于 0. 按第三行展开, 则有

$$5(A_{31} + A_{32} + A_{33}) + 3(A_{34} + A_{35}) = 0, \quad (1)$$

同理, 将  $|A|$  中第三行的元素换成第四行的对应元素, 按第三行展开则有

$$2(A_{31} + A_{32} + A_{33}) + A_{34} + A_{35} = 0, \quad (2)$$

解 (1), (2) 联立方程组, 得

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} = 0, A_{34} + A_{35} = 0.$$

### 题型三 $n$ 阶行列式的计算

#### 1. 利用行列式定义计算 (适用于行列式中有较多元素为零的情形)

【例 1.18】计算下列行列式 (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

【解】(1) 此行列式刚好只有  $n$  个非零元素  $a_{1n-1}, a_{2n-2}, \dots, a_{n-11}, a_{nn}$ , 故非零项只有一项:

$$a_{1n-1}a_{2n-2}\cdots a_{n-11}a_{nn}, \text{ 又 } \tau[(n-1)(n-2)\cdots 1n] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \text{ 因此}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 1997 \cdot 1998$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1998!$$

(2) 由行列式的定义知, 此行列式的非零项只有两项  $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$  和  $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$ , 故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a \cdot a \cdot \cdots \cdot a + (-1)^{\tau(23\cdots n1)} b \cdot b \cdot \cdots \cdot b$$

$$= a^n + (-1)^{n-1} b^n.$$

2. 各行(或列) 加到同一行(或列) 中去(适用于各行(或列) 诸元素之和相等的情形)

【例 1.19】计算  $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$ .

【解】 $D_n \xrightarrow[\text{第一行}]{\text{各行加到}}$   $\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{各列减第一列}]{\text{从第二列开始}} [a+(n-1)b] \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【例 1.20】计算  $D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$ .

【解】 $D_n \xrightarrow[\text{第一列}]{\text{各列加到}}$   $\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

$$= [x+(n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\text{各行减第一行}]{\text{从第二行开始}} [x + (n-2)a] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \ddots & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix} \\ &= [x + (n-2)a](x-2a)^{n-1}. \end{aligned}$$

3. 各行(列) 加减同一行(列) 的倍数 (适用于施行加减后某一行(列) 诸元素有公因子或变为三角形形式的情形)

【例 1.21】计算  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$

【解】 $D_n \xrightarrow[\text{到各列上}]{\text{第二列乘}(-1)\text{加}}$   $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}_{n \times n} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$

$= -2(n-2)!.$

【例 1.22】计算  $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$

【解】当  $n=2$  时,  $D_2 = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(y_2-y_1),$

当  $n \geq 3$  时,  $D_n \xrightarrow[\text{第一行}]{\text{各行减法}} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ y_1(x_2-x_1) & y_2(x_2-x_1) & \cdots & y_n(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(x_n-x_1) & y_2(x_n-x_1) & \cdots & y_n(x_n-x_1) \end{vmatrix},$

因为从第二行以后各行成比例, 所以  $D_n = 0.$

4. 某行(或列) 加上其余各行(或列) 的一定倍数 (适用于施行这种变换后行列式立即呈上(或下) 三角形形式的情形)

【例 1.23】计算  $D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda_2 + a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_n + a_n \end{vmatrix} \quad (\lambda_i \neq 0)$

【解】 $D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{各列} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \text{ 加到第一列}]{\text{第二列开始}}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 + a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_1 a_i}{\lambda_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n \left( \lambda_1 + a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_1 a_i}{\lambda_i} \right) \lambda_i$$

### 5. 观察一次因式法

【例 1.24】计算  $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ .

【解】当  $x = \pm 1$  时, 第一、二行对应元素相同, 所以  $D_4 = 0$ , 可见  $D_4$  中含有因式  $(x-1)(x+1)$ ;  
当  $x = \pm 2$  时, 第三、四行对应元素相同, 所以  $D_4 = 0$ , 可见  $D_4$  中含有  $(x-2)(x+2)$  因式.  
由于  $D$  中关于  $x$  的最高次数为 4, 所以

$$D_4 = A(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

$D_4$  中含  $x^4$  的项为

$$1 \cdot (2-x^2) \cdot 1 \cdot (9-x^2) - 2 \cdot (2-x^2) \cdot 2 \cdot (9-x^2),$$

比较上面两式中  $x^4$  的系数, 得  $A = -3$ ,

故

$$D_4 = -3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

【例 1.25】解方程  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$ .

【解】当  $x = 0, 1, 2, \dots, (n-2)$  时, 由于有两列对应元素相同, 左边行列式的值为 0, 因此左边行列式可写成

$$(-1)^{n-1} x(x-1) \cdot \cdots \cdot (x-n+2),$$

于是原方程变为

$$(-1)^{n-1} x(x-1) \cdot \cdots \cdot (x-n+2) = 0,$$

所以方程的解为

$$x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n-1} = n-2.$$

### 6. 所求行列式某一行(或某一列)至多有两个非零元素

一般按此行(或此列)展开即可求解.

【例 1.26】计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

【解】第一行, 第一列均只有两个非零元素, 不妨按第一列展开, 得

$$D_n = xD_{n-1} + a_n \cdot (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n$$

由此递推得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n = x[xD_{n-2} + a_{n-1}] + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &\vdots \\ &= x^{n-1} D_1 + x^{n-2} a_2 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n. \end{aligned}$$

类似地,形如

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \cdot \\ (2) \quad & \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \\ (3) \quad & \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2\cos\theta & 1 & & \\ & & & 1 & 2\cos\theta & & \end{vmatrix} \cdot \\ (4) \quad & \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & & b \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & a & b & \\ & & & b & a & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ b & & & & & a \\ & & & & & & a \end{vmatrix} \cdot \end{aligned}$$

等行列式均可按此方法求解.

● 按此方法求解时,往往会得到一个一般的递推关系式

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2},$$

至此可用两种方法求出  $D_n$  的表达式:

1° 先计算  $D_1, D_2, D_3$  等,找出递推规律,再用数学归纳法进行证明;

2° 把关系式  $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$  看做一差分方程,求出特征方程  $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$  的两个根  $\lambda_1, \lambda_2$ , 则  $D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), 或  $D_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$  ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ), 再由  $D_1, D_2$  定出常数  $C_1, C_2$ .

【例 1.27】计算三对角行列式  $D_n$  之值.

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

【解】按第一列展开得

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \quad (n \geq 3),$$

即有递推关系式

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

为了得到  $D_n$  的一般表达式, 采用上述方法 1° 求解

因为(假设  $\alpha \neq \beta$ ),

$$D_1 = \alpha + \beta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta},$$

不妨设  $D_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ , 则有

$$\begin{aligned} D_n &= (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} \\ &= (\alpha + \beta) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, \end{aligned}$$

根据数学归纳法即知

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

若  $\alpha = \beta$ , 可直接计算得  $D_n = (n+1)\alpha^n$ .

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 若由题设条件要求确定参数的取值, 则可联想到是否有某行列式为零.

**【例 1.28】** 已知向量组  $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  与向量组  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ,

$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$  具有相同的秩, 且  $\beta_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 求  $a, b$  的值.

**【解】**  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

可见  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ , 且  $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ ,

于是  $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$ ,

$$\text{从而} \quad |[\beta_1, \beta_2, \beta_3]| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a + 3b = 0.$$

即  $a = 3b$ .

又  $\beta_3$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 从而可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 即  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关,

$$\text{于是} \quad |[\alpha_1, \alpha_2, \beta_3]| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2b - 10 = 0,$$

得  $b = 5, a = 3b = 15$ .

## 二、综合题解析

**【例 1.29】** 设  $A, B$  是  $n$  阶正交矩阵, 且  $|A|/|B| = -1$ , 证明  $|A+B| = 0$ .

**【分析】**  $A, B$  为正交矩阵, 即  $AA^T = A^T A = E, BB^T = B^T B = E$ .

**【证】** 因为  $A, B$  为正交矩阵, 所以

$$AA^T = A^T A = E, \quad BB^T = B^T B = E.$$

于是

$$\begin{aligned} |(A+B)A^T| &= |AA^T + BA^T| = |E + BA^T| \\ &= |BB^T + BA^T| = |B(B^T + A^T)| = |B(A+B)^T|, \end{aligned}$$

即  $|A+B||A| = |B||A+B|, (|A| - |B|)|A+B| = 0$ .

因为  $|A|/|B| = -1$ , 所以  $|A| - |B| \neq 0$ , 从而有  $|A+B| = 0$ .

**【例 1.30】** 设整数系数方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

对任意  $b_1, b_2, \dots, b_n$  均有整数解, 证明其系数行列式必为  $\pm 1$ .

**【证】** 令  $A = (a_{ij})_{n \times n}, i, j = 1, 2, \dots, n; b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , 则原方程组即为  $Ax = b$ . 其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . 取  $b$  分别为  $n$  阶单位矩阵  $E$  的各列:  $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T; \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0)^T; \dots; \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ , 所得解依次记为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 即  $A\alpha_j = \varepsilon_j, j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n],$$

也即

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = E,$$

其中,  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = A^{-1}$ , 按题设  $A^{-1}$  与  $A$  一样是整数矩阵, 从而  $|A^{-1}|$  与  $|A|$  都是整数, 又由  $AA^{-1} = E$ , 有

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1,$$

于是只能  $|A| = \pm 1$ .

**【例 1.31】** 设  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$ , 证明存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f'(\xi) = 0$ .

**【证】** 由题设知  $f(x)$  是关于  $x$  的不多于三次的多项式, 故它在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导. 且



$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

由罗尔中值定理可知,至少存在一点  $\xi \in (0,1)$  使  $f'(\xi) = 0$ .

**【例 1.32】**若  $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 又  $a, b, c$  为  $A$  的三个相异特征根, 又  $A^2 + 2AB + A - B = I$ , 求  $|A^2 + BA|$ .

**【解】**由  $|A^2 + BA| = |A + B| |A|$ , 故只须计算  $|A + B|$ .

由题设有  $2A(A + B) - (A + B) = I - 2A + A^2$ , 即

$$(2A - I)(A + B) = (A - I)^2,$$

$$\text{故 } |A + B| = \frac{|A - I|^2}{|2A - I|} = \frac{[(a-1)(b-1)(c-1)]^2}{(2a-1)(2b-1)(2c-1)}.$$

**【注】**由解题过程可看出,例中  $|A + B|$  的值与  $B$  无关,尽管如此,鉴于题设等式知  $B$  并非任意.

**【例 1.33】**设  $A$  为实反对称阵,  $D$  为对角元全大于零的对角阵, 则  $|A + D| \neq 0$ , 且还有  $|A + D| > 0$ .

**【证】**(1) 反证. 若  $|A + D| = 0$ , 则  $(A + D)X = 0$  有非零解. 设  $X_1$  是其中一个非零解, 进而有  $X_1^T(A + D)X_1 = 0$ , 故  $X_1^TAX_1 + X_1^TDX_1 = 0$ . 因为  $A$  为实反对称阵, 所以  $X_1^TAX_1 = 0$ , 最终得  $X_1^TDX_1 = 0$ . 但是  $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $a_i > 0$ , 所以  $X_1^TDX_1 > 0$ , 矛盾. 所以,  $|A + D| \neq 0$ .

(2) 反证. 令  $f(x) = |xA + D|$ ,  $x \in [0, 1]$ .

假设  $|A + D| < 0$ , 因为  $f(0) = |D| > 0$ ,  $f(1) = |A + D| < 0$ , 由零值定理可知, 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = |x_0A + D| = 0$ . 但是

$$|x_0A + D| = x_0^n \left| A + \frac{D}{x_0} \right|,$$

其中,  $\frac{D}{x_0}$  为对角元全大于零的对角阵, 由(1)知  $\left| A + \frac{D}{x_0} \right| \neq 0$ , 矛盾, 故  $|A + D| > 0$ .

### 习 题 一

#### 1. 填空题.

(1) 四阶行列式中带负号且包含因子  $a_{12}$  和  $a_{21}$  的项为\_\_\_\_\_.

(2) 排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  可经\_\_\_\_\_次对换后变为排列  $i_n i_{n-1} \dots i_2 i_1$ .

(3) 在五阶行列式中,  $(-1)^{\tau(15423) + \tau(23145)} a_{12} a_{53} a_{41} a_{24} a_{35} = \underline{\hspace{2cm}} a_{12} a_{53} a_{41} a_{24} a_{35}$ .

(4) 在函数  $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$  中,  $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_.

(5) 设  $a, b$  为实数, 则当  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ , 且  $b = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ .

(6) 在  $n$  阶行列式  $D = |(a_{ij})_{n \times n}|$  中, 当  $i < j$  时,  $a_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(7) 设  $A$  为  $4 \times 4$  矩阵,  $B$  为  $5 \times 5$  矩阵, 且  $|A| = 2$ ,  $|B| = -2$ , 则  $|-|A||B| = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  
 $|-|B||A| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(8) 设  $A$  为  $3 \times 3$  矩阵,  $|A| = -2$ , 把  $A$  按行分块为  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$ , 其中  $A_j (j = 1, 2, 3)$  是  $A$  的

$$\text{第 } j \text{ 行, 则行列式 } \begin{vmatrix} A_3 - 2A_1 \\ 3A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(9) 设  $A, B$  均为  $n$  阶矩阵,  $|A| = 2, |B| = -3$ , 则  $|2A^* \cdot B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

## 2. 选择题.

(1) 设  $|A| = |(a_{ij})_{n \times n}|$  为  $n$  阶行列式, 则  $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1n}a_{n1}$  在行列式中符号为  
A. 正.                      B. 负.                      C.  $(-1)^n$ .                      D.  $(-1)^{n-1}$ .                      【    】

(2) 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $||A|A^*|$  等于  
A.  $|A|^2$ .                      B.  $|A|^n$ .                      C.  $|A|^{2n}$ .                      D.  $|A|^{2n-1}$ .                      【    】

(3) 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $B$  是  $A$  经过若干次矩阵的初等变换后所得到的矩阵, 则有  
A.  $|A| = |B|$ .                      B.  $|A| \neq |B|$ .  
C. 若  $|A| = 0$ , 则一定有  $|B| = 0$ .                      D. 若  $|A| > 0$ , 则一定有  $|B| > 0$ .                      【    】

(4) 设  $A$  为  $m$  阶方阵,  $B$  为  $n$  阶方阵,  $C = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ , 则  $|C|$  等于

- A.  $|A||B|$ .                      B.  $-|A||B|$ .  
C.  $(-1)^{m+n}|A||B|$ .                      D.  $(-1)^{mn}|A||B|$ .

(5) 设三阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$  均为三维行向量, 且已知行列式  $|A| =$

18,  $|B| = 2$ , 则行列式  $|A - B|$  等于

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.                      【    】

## 3. 计算证明题.

(1) 设  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$

计算  $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = ?$ , 其中  $A_{4j} (j = 1, 2, 3, 4)$  是  $|A|$  中元素  $a_{4j}$  的代数余子式.

(2) 计算元素为  $a_{ij} = |i - j|$  的  $n$  阶行列式.

(3) 计算  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} x_1 + 1 & x_1 + 2 & \cdots & x_1 + n \\ x_2 + 1 & x_2 + 2 & \cdots & x_2 + n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n + 1 & x_n + 2 & \cdots & x_n + n \end{vmatrix} \quad (n \geq 2).$

(4) 设  $a, b, c$  是互异的实数, 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ 的充要条件是 } a + b + c = 0.$$

(5) 证明: 奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

(6) 设 
$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}.$$

证明: 可以找出数  $\delta (0 < \delta < 1)$ , 使  $f'(\delta) = 0$  (提示用罗尔定理证).

(7) 试证: 如果  $n$  次多项式  $f(x) = C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n$  对  $n+1$  个不同的  $x$  值都是零, 则此多项式恒等于零. (提示: 用范德蒙行列式证明)

(8) 设  $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ , 求  $F'(x)$ .

### 参 考 答 案

1. (1)  $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ ; (2)  $\frac{n(n-1)}{2}$ ; (3)  $-$ ; (4)  $-2$ ; (5)  $0, 0$ ; (6)  $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ;

(7)  $64, 32$ ; (8)  $6$ ; (9)  $-\frac{2^{2n-1}}{3}$ .

2. (1) D (2) D (3) C (4) D (5) B

3. (1) 将  $|A|$  中第 4 行元素均换为 1, 则

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

(2)  $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$ , 从最后一行起, 每行减去前一行, 再在所得的行列式中每列加上第  $n$  列即得.

(3) 用拆分法计算. 当  $n > 2$  时,  $D_n = 0$ ; 当  $n = 2$  时,  $D_2 = x_1 - x_2$ .

(4) 计算行列式的值即可推得结论.

(5) 设  $A$  是  $2n+1$  阶反对称矩阵, 即  $A^T = -A$ , 故  $|A^T| = |-A|$ , 即  $|A| = (-1)^{2n+1}|A| = -|A|$ , 得  $2|A| = 0$ , 从而  $|A| = 0$ .

(6) 略.

(7) 略.

(8)  $F'(x) = 6x^2$ .

## 第二章 矩 阵

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、矩阵的概念

##### 1. 定义

由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) 排列成  $m$  行  $n$  列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为  $m \times n$  矩阵, 简记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 当  $m = n$  时,  $A$  也称为  $n$  阶方阵.  $|A|$  称为  $A$  的行列式.

##### 2. 几类特殊矩阵

(1) 单位矩阵: 主对角线上元素都是 1, 其余元素全为零的方阵称为单位矩阵, 记为  $E$  (或  $I$ ).

(2) 对角矩阵: 主对角线上元素为任意常数, 而主对角线外的元素都是零的方阵. 若主对角线上的元素相等, 则称为数量矩阵.

(3) 三角矩阵: 主对角线下方元素全为零的方阵称为上三角矩阵; 主对角线上方元素全为零的方阵称为下三角矩阵, 上、下三角矩阵统称三角矩阵.

(4) 矩阵的转置: 矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  将  $A$  的行与列的元素位置交换, 称为矩阵  $A$  的转置, 记为  $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ .

转置的性质

$$(A^T)^T = A \quad (kA)^T = kA^T \quad (A+B)^T = A^T + B^T \quad (AB)^T = B^T A^T$$

(5) 对称矩阵: 如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  满足  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 即  $A^T = A$ , 则称  $A$  为对称矩阵; 如果  $a_{ij} = -a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 即  $A^T = -A$ , 则称  $A$  为反对称矩阵.

对称矩阵的特点及反对称矩阵的特点

对称矩阵  $A$  的特点:  $A$  中的元素关于主对角线对应相等; 反对称矩阵特点:  $A$  的主对角线上的元素均为 0, 其余元素关于主对角线互为相反数.

(6) 正交矩阵: 设  $A$  为方阵, 如果有  $A^T A = A A^T = E$ , 则称  $A$  为正交矩阵.

(7) 可交换矩阵:  $A, B$  是同阶方阵, 若  $AB = BA$ , 则  $A, B$  称为可交换矩阵.

##### 3. 矩阵的关系

等价关系: 若存在满秩阵  $P, Q$ , 使  $B = PAQ$ , 则称矩阵  $A$  与  $B$  等价, 记为  $A \cong B$

合同关系: 若存在满秩阵  $P$ , 使  $B = P^T A P$ , 则称矩阵  $A$  与  $B$  合同.

相似关系: 若存在可逆阵  $P$ , 使  $B = P^{-1} A P$ , 则称矩阵  $A$  与  $B$  相似, 记为  $A \sim B$ .

## 二、矩阵的运算

(1) 矩阵的相等: 相等的矩阵必须具有相同的行数与列数, 两个矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  和  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  相等是指对应位置的元素分别相等, 即  $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ , 记作  $A = B$ .

(2) 矩阵的和与差, 设矩阵  $A = (a_{ij})$  与  $B = (b_{ij})$  是两个  $m \times n$  矩阵, 则定义  $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ .

(3) 数乘矩阵: 数乘矩阵时, 将数乘到矩阵的每个元素上, 即

$$kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}.$$

矩阵的加法和数乘运算满足下列运算规律:

1° 交换律  $A + B = B + A$ .

2° 结合律  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,  $k(lA) = (kl)A$ .

3° 分配律  $k(A + B) = kA + kB$ ,  $(k + l)A = kA + lA$ .

以上  $A, B, C$  都是  $m \times n$  矩阵,  $k, l$  为数.

(4) 矩阵乘法: 设  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ , 则矩阵  $A, B$  的乘积为  $A \cdot B = (c_{ij})_{m \times n}$ , 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj}.$$

矩阵乘法满足下列运算规律:

1° 结合律  $(AB)C = A(BC)$ .

2° 分配律  $(A + B)C = AC + BC$ ,  $C(A + B) = CA + CB$ .

3° 数与乘积的结合律  $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ .

(5) 方阵的幂: 对方阵  $A$ , 定义  $A^k = \underset{k \text{ 个 } A \text{ 相乘}}{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}$ . 称  $A^k$  为  $A$  的  $k$  次幂. 特别地, 若存在整数  $m$ , 使  $A^m = O$ , 称  $A$  为幂零矩阵.

方阵的幂满足下列运算规律:

$A^k A^m = A^{k+m}$ ,  $(A^k)^m = A^{km}$ ,  $k, m$  为正整数.

**注** (1) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $E_m$  和  $E_n$  分别为  $m$  阶和  $n$  阶单位矩阵, 则有

$$E_m A = A E_n = A.$$

(2) 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 则  $|AB| = |A| \cdot |B|$ , 特别地,  $|kA| = k^n |A|$ .

(3)  $AB = O \nRightarrow A = O$  或  $B = O$ ; 由  $A^2 = O \nRightarrow A = O$ , 从而  $AB = AC \nRightarrow B = C$ ;  $|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$  或  $|B| = 0$ , 这里  $A, B$  为方阵.

(4)  $AB = BA$  一般不成立, 从而  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ,  $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ,  $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$  等一般也不成立 (当  $A, B$  可交换时, 即  $AB = BA$  时, 上述公式成立).

(5)  $(AB)^T = B^T A^T$ , 由此易证对任意矩阵  $A$ ,  $A^T A$  与  $AA^T$  均为对称矩阵.

**【例 2.1】** 填空

(1) 设  $A$  为三阶方阵, 且  $|A| = 4$ , 则  $\left| \left( \frac{1}{2}A \right)^2 \right| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 设  $A = \frac{1}{2}(B + E)$ , 则当且仅当  $B^2 = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $A^2 = A$ .

(3)  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$  的充分必要条件是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $A = [1, 2, 3]$ ,  $B = [1, 1, 1]$ , 则  $(A^T B)^k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】(1)  $\frac{1}{4}$ , (2)  $E$ , (3)  $AB = BA$ , (4)  $6^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ .

【分析】(1)  $\left| \left( \frac{1}{2}A \right)^2 \right| = \left| \frac{1}{4}A^2 \right| = \left( \frac{1}{4} \right)^3 \cdot |A|^2 = \frac{1}{4}$ .

(2)  $A^2 = A \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{2}(B+E) \right]^2 = \frac{1}{2}(B+E) \Leftrightarrow B^2 = E$ .

(3)  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \Leftrightarrow 0 = AB - BA \Leftrightarrow AB = BA$ .

(4)  $(A^T B)^k = (A^T B) \cdot (A^T B) \cdot (A^T B) \cdot \dots \cdot (A^T B) = A^T (BA^T) \cdot (BA^T) \cdot \dots \cdot (BA^T) B$

$= 6^{k-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] = 6^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ .

本题的关键是要注意  $A^T B$  是矩阵, 但  $BA^T = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$  却是一个数. 若先计算

$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ , 再求  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^k$ , 则计算是相当复杂的.

【例 2.2】选择题

(1) 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 则  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  的充分必要条件是

- (A)  $A = E$ . (B)  $B = O$ . (C)  $AB = BA$ . (D)  $A = B$ . 【 】

(2) 设  $A, B$  为  $n$  阶对称矩阵, 则下面四个结论中不正确的是

- (A)  $A+B$  也是对称矩阵. (B)  $AB$  也是对称矩阵.  
(C)  $A^m + B^m$  ( $m$  为正整数) 也是对称矩阵. (D)  $BA^T + AB^T$  也是对称矩阵. 【 】

(3) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵,  $A \neq O$ , 且  $AB = O$ , 则

- (A)  $B = O$ . (B)  $|B| = 0$  或  $|A| = 0$ .  
(C)  $BA = O$ . (D)  $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ . 【 】

(4) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 则有

- (A)  $|A+B| = |A| + |B|$ . (B)  $|A-B| = |A| - |B|$ .  
(C)  $|AB| = |BA|$ . (D)  $AB = BA$ . 【 】

(5) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 则下列结论成立的是

- (A)  $AB \neq O \Leftrightarrow A \neq O$  且  $B \neq O$ . (B)  $|A| = 0 \Leftrightarrow A = O$ .  
(C)  $|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$  或  $|B| = 0$ . (D)  $A = E \Leftrightarrow |A| = 1$ . 【 】

【解】应选(1)C, (2)B, (3)B, (4)C, (5)C.

【分析】(1) 矩阵运算与代数运算的差异主要有两点: 不满足交换律与消去律, 换句话说, 一般地,  $AB \neq BA$ ;  $AB = O \not\Rightarrow A = O$  或  $B = O$ . 因此遇到乘法运算时, 必须特别注意这两点.

(A), (B), (D) 均是等式  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  成立的充分条件, 但非必要条件, 故 (C) 为正确答案.

(2) 逐项计算转置看是否为对称矩阵即可. 因  $(AB)^T = B^T A^T = BA$ , 但一般地  $BA \neq AB$ ,

故(B)为应选答案.

(3) 同(1)分析,(A),(C),(D)均不正确.另外, $AB = O$ ,有 $|AB| = |A||B| = 0$ ,从而有 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$ ,即(B)为正确答案.注意 $A, B$ 指矩阵,而 $|A|$ 与 $|B|$ 指行列式,其值为数,两者是有本质差别的.

(4) 由矩阵行列式性质,有 $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ ,可知(C)为正确答案.

(5) (A) 必要而非充分,例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \neq O, B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \neq O$ ,但 $AB = O$ ; (B) 充

分而非必要, $A = O \Rightarrow |A| = 0$ ,反之不成立,如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,则有 $|A| = 0$ ,但 $A \neq O$ ;

(D) 必要而非充分, $A = E \Rightarrow |A| = 1$ ,反之不成立,如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , $|A| = 1$ ,但 $A \neq E$ ;

只有(C)是正确的,因为 $|AB| = |A||B| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$ .

### 【例 2.3】选择题

(1) 设 $A, B, C$ 为 $n$ 阶方阵,若 $AB = BA, AC = CA$ ,则 $ABC$ 等于

(A)  $ACB$ . (B)  $CBA$ . (C)  $BCA$ . (D)  $CAB$ . 【 】

(2) 设 $A, B, C$ 均为 $n$ 阶方阵,且 $AB = BC = CA = E$ ,则 $A^2 + B^2 + C^2$ 等于

(A)  $3E$ . (B)  $2E$ . (C)  $E$ . (D)  $O$ . 【 】

【解】应选(1)C, (2)A.

【分析】(1)  $ABC = (BA)C = B(AC) = BCA$ , (C)为正确答案.

$$(2) \quad E = (AB)(CA) = A(BC)A = A^2,$$

$$E = (BC)(AB) = B(CA)B = B^2,$$

$$E = (CA)(BC) = C(AB)C = C^2,$$

所以 $A^2 + B^2 + C^2 = 3E$ , (A)为正确选项.

## 三、逆矩阵的概念

### 1. 逆矩阵的定义

对于一个 $n$ 阶方阵 $A$ ,如果存在一个 $n$ 阶方阵 $B$ ,使得 $AB = BA = E$ ,则称 $A$ 为可逆矩阵,并称 $B$ 为 $A$ 的逆矩阵,记为 $A^{-1}$ .

### 2. 逆矩阵的性质

(1) 若 $A$ 可逆,则 $A^{-1}$ 唯一.

(2) 若 $A$ 为可逆矩阵,则 $A^T, A^{-1}$ 均可逆,且有 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (A^{-1})^{-1} = A$ .

(3) 若 $A, B$ 为同阶可逆矩阵,则 $AB$ 也可逆,且有 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

(4) 若 $A$ 可逆,且 $k \neq 0$ ,则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ .

① 可逆矩阵一定是方阵,但并不是所有方阵都有逆矩阵.

② 方阵 $A$ 可逆的充分必要条件是 $A$ 非奇异,即 $|A| \neq 0$ .

③ 若 $A$ 为 $n$ 阶矩阵,如果存在 $n$ 阶矩阵 $B$ ,使得 $AB = E$ ,则 $BA = E$ .即在计算或证明时,只要有 $AB = E$ 或 $BA = E$ ,就可得出 $A, B$ 互为逆矩阵的结论( $A^{-1} = B, B^{-1} = A$ ).

【例 2.4】设 $A^k = O$ ,证明: $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ .

【证】因为

$$\begin{aligned} & (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) \\ &= E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k) \\ &= E-A^k=E, \end{aligned}$$

所以

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

#### 四、利用伴随矩阵求逆矩阵

设  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式, 定义  $A^*=(A_{ji})$  为矩阵  $A$  的伴随矩阵.

当  $A$  非奇异, 即  $|A| \neq 0$ , 有  $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ .

一般来说, 当  $A$  是低阶矩阵时 ( $n \leq 3$ ), 可以考虑利用伴随矩阵  $A^*$  求  $A$  的逆, 但应特别注意:

(1)  $A^*=(A_{ji})=(A_{ij})^T$ , 其中  $A_{ij}$  是元素  $a_{ij}$  的代数余子式,  $a_{ij}$  与  $A_{ij}$  在  $A$  与  $A^*$  中的位置是不同的.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

(2)  $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$  是代数余子式, 符号  $(-1)^{i+j}$  不能忘记.

(3)  $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ , 注意最后还要把  $A^*$  乘以  $\frac{1}{|A|}$ .

特别地, 当  $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  且  $ad-bc \neq 0$  时,  $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ , 相当于主对角线元素换位, 次对角线元素变号, 即可得到  $A^*$ , 从而

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

【例 2.5】设  $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $(A^*)^{-1}$ .

【解】由  $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$  知,  $A^*=|A|A^{-1}$ ,

$$\text{从而 } (A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A.$$

$$\text{而 } |A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2, \text{ 故 } (A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$



## 五、矩阵的初等变换与求逆

### 1. 矩阵的初等变换

对矩阵施行以下三种变换称为矩阵的初等变换：

- (1) 交换矩阵的两行(列)；
- (2) 以一个非零的数  $k$  乘矩阵的某一行(列)；
- (3) 把矩阵的某一行(列)的  $k$  倍加到另一行(列)。

对单位矩阵施行一次第  $i(i = 1, 2, 3)$  种初等变换后得到的矩阵叫第  $i$  种初等矩阵。初等矩阵为可逆矩阵，且逆矩阵仍为初等矩阵。

对矩阵  $A$  左(右)乘第  $i(i = 1, 2, 3)$  种初等矩阵，就相当于对  $A$  的行(列)进行一次同种的初等变换。

初等变换的性质

(1) 矩阵  $A$  通过行(或列)的初等变换变成  $B$ ，则矩阵  $A$  与  $B$  的行(或列)向量仍等价

① 若  $A$  与  $B$  等价，则  $R(A) = R(B)$

② 初等变换不改变矩阵的秩

(2) 若方阵  $A$  可逆，则存在有限个初等方阵  $P_1, P_2, \dots, P_l$ ，使得： $A = P_1 P_2 \cdots P_l$

(3) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵，对  $A$  作一次行的初等变换，相当于矩阵  $A$  左乘以一个  $m$  阶初等方阵，对  $A$  作一次列的初等变换，相当于矩阵右乘以一个  $n$  阶初等方阵。

### 2. 用初等变换求逆矩阵

方阵  $A$  非奇异的充分必要条件是  $A$  可表示为若干个同阶初等矩阵的乘积。欲求  $A$  的逆矩阵，首先要由  $A$  作出一个  $n \times 2n$  矩阵，即

$$(A : E),$$

其次，对这个矩阵施行行初等变换(且只能用行初等变换)，将它的左半部的矩阵  $A$  化为单位矩阵，那么原来右半部的单位矩阵就同时化为  $A^{-1}$ ，即

$$(A : E) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E : A^{-1}),$$

或者

$$\begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

### 3. 等价矩阵

矩阵  $A$  经过有限次变换化为  $B$ ，则称  $A$  与  $B$  等价，记为  $A \cong B$ 。任一矩阵  $A$  总是可经过有限次行(列)初等变换化为  $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ ，称为  $A$  的等价标准形。

$A \cong B \Leftrightarrow A, B$  是同型矩阵且有相同的秩。

$\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $P, Q$ ，使  $PAQ = B$ 。

【例 2.6】设  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}$ ，

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{则必有}$$

$$(A) AP_1 P_2 = B. \quad (B) AP_2 P_1 = B. \quad (C) P_1 P_2 A = B. \quad (D) P_2 P_1 A = B. \quad \text{【 } \quad \text{】}$$

**【解】** $B$  可看做矩阵  $A$  先将第一行的各元素加到第三行的对应元素上, 再将第一行与第二行对调的初等行变换, 即  $A$  左乘以  $P_2$ , 再左乘以  $P_1$ , 得  $B = P_1 P_2 A$ , 故可知 (C) 入选.

## 六、分块矩阵及其求逆

用水平和铅直虚线将矩阵  $A$  中的元素分割成若干个小块, 每一小块称为矩阵的一个子块或子矩阵, 则原矩阵是以这些子块为元素的分块矩阵.

进行分块矩阵的加、减、乘法与转置运算时, 可将子矩阵当做通常矩阵的元素看待.

不过, 在进行分块矩阵乘法运算时, 应当注意左分块矩阵的列的分法必须与右分块矩阵行的分法一致.

对于零元素特别多的矩阵, 可以考虑用分块矩阵求逆. 特别地, 设  $A, B$  为可逆方阵, 则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 七、矩阵的秩及其求法

矩阵  $A$  中非零子式的最高阶数称为矩阵  $A$  的秩, 记为  $r(A)$ . 对于任一  $m \times n$  阶矩阵  $A$ , 存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  (一系列初等行变换),  $n$  阶可逆矩阵  $Q$  (一系列初等列变换), 使

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \text{ 其中 } E_r \text{ 为 } r \text{ 阶单位矩阵.}$$

则  $r(A) = r$ .

有关矩阵秩的重要公式与结论:

- (1)  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A)$ .
- (2) 若  $A \neq O$ , 则  $r(A) \geq 1$ .
- (3)  $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$ .
- (4)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ .
- (5) 若  $A$  可逆, 则  $r(AB) = r(B)$ ; 若  $B$  可逆, 则  $r(AB) = r(A)$ .
- (6) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times s$  矩阵, 若  $AB = O$ , 则  $r(A) + r(B) \leq n$ .

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求逆矩阵

**提示** 求逆矩阵的常见方法:

- (1) 伴随矩阵法:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ , (适用于  $n \leq 3$  的矩阵求逆).

(2) 初等变换求逆:  $(A : E) \xrightarrow{\text{行}} (E : A^{-1})$ .

(3) 分块求逆.

(4) 利用定义:  $AB = E$ , 则  $A^{-1} = B$ .

【例 2.7】(1) 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , 则  $(A - 2E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 已知三阶矩阵  $A$  的逆矩阵为  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  的逆矩阵为

$\underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】(1)  $A - 2E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

方法一: 初等变换法:  $\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$

故  $(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

方法二: 分块矩阵法:  $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix},$

因为  $A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 所以  $(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(2) 由  $AA^* = |A|E$ , 知  $A^* = |A|A^{-1}$ ,  $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ . 而  $(A^{-1})^{-1} = A$ , 因此

由

$(A^{-1} : E) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$   
 $\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right],$

$$\text{有 } A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ 于是 } (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

【例 2.8】设  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ , 其中  $a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 求  $A^{-1}$ .

【解】  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix},$

其中  $C = (a_n), B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix},$

$$C^{-1} = (a_n^{-1}), B^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} \end{bmatrix},$$

又  $\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix},$

故  $A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$

【例 2.9】已知  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $2A(A-E) = A^3$ , 求  $(E-A)^{-1}$ .

【解】设法分解出因子  $E-A$ . 由  $2A(A-E) = A^3$ , 得  $A^3 - 2A^2 + 2A = O$ ,

把上式改写为

$$A^3 - 2A^2 + 2A + E = E,$$

即

$$(E-A)(A^2 - A + E) = E,$$

故

$$(E-A)^{-1} = A^2 - A + E.$$

【例 2.10】已知矩阵  $A$  满足关系式  $A^2 + 2A - 3E = O$ , 求  $(A + 4E)^{-1}$ .

【解】设法分解出因子  $A + 4E$ , 由  $A^2 + 2A - 3E = O$ , 有

$$(A + 4E)(A - 2E) + 8E - 3E = O \Rightarrow (A + 4E)(A - 2E) = -5E,$$

$$(A + 4E)\left(\frac{2}{5}E - \frac{1}{5}A\right) = E,$$

得

$$(A + 4E)^{-1} = \frac{2}{5}E - \frac{1}{5}A.$$

### 题型二 求矩阵的高次幂 $A^m$

【提示】方法一: 用矩阵乘法的结合律. 若  $A = \alpha\beta^T$ , 其中  $\alpha, \beta$  为  $n$  维列向量, 则

$$A^m = \alpha\beta^T \cdot \alpha\beta^T \cdot \cdots \cdot \alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha) \cdot \cdots \cdot (\beta^T\alpha)\beta^T = (\beta^T\alpha)^{m-1} \cdot \alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)^{m-1}A, \text{ 其中 } \beta^T\alpha \text{ 为数.}$$

若  $P^{-1}AP = B$ , 则  $A = PBP^{-1}$ , 于是

$$\begin{aligned} A^m &= PBP^{-1} \cdot PBP^{-1} \cdot \cdots \cdot PBP^{-1} \\ &= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P) \cdot \cdots \cdot B(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^mP^{-1}. \end{aligned}$$

方法二: 先求出  $A^2, A^3, \cdots$  再用数学归纳法求  $A^m$ .

方法三: 根据  $A$  的特点, 用初等变换或对  $A$  进行分解后再进行计算.

设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A^m =$

解法 1: 利用二项式定理

$$A^n = (B + C)^n = B^n + nB^{n-1}C + \cdots$$

条件: ①  $B, C$  相乘满足交换律:  $BC = CB$  ②  $C^m = 0, m$  很小的正整数

解法 2: 将  $A$  写成列与行乘积形式

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \quad \cdots \quad b_n), \text{ 条件 } R(A) = 1$$

解法 3: 特征值法

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

【例 2.11】已知矩阵  $A = PQ$ , 其中  $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = [2, -1, 2]$ , 求矩阵  $A, A^2, A^{100}$ .

【分析】计算方阵的高次幂是一种常见的题型, 除用数学归纳法外, 还应注意结合方阵本身的特征进行讨论. 本题的关键是注意  $PQ$  为矩阵, 而  $QP$  为数, 利用矩阵乘法的结合律  $A^2 = PQ \cdot PQ = P(QP)Q = 2PQ$  达到简化的目的.

$$\text{【解】} A = PQ = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [2, -1, 2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad QP = [2, -1, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$A^2 = PQ \cdot PQ = P(QP)Q = 2PQ = 2A, \quad A^3 = A^2 \cdot A = 2A \cdot A = 2A^2 = 2^2 \cdot A.$$

一般地, 设  $A^{k-1} = 2^{k-2}A$ , 于是根据数学归纳法, 有  $A^k = 2^{k-1} \cdot A$ ,

$$\text{则} \quad A^k = A^{k-1} \cdot A = 2^{k-2}A \cdot A = 2^{k-2}A^2 = 2^{k-1}A.$$

【例 2.12】已知  $AP = PB$ , 其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求  $A$  及  $A^5$ .

【解】先求出  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 因  $AP = PB$ , 故

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$A^5 = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{5\text{个}A} = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1})$$

$$= PB^5P^{-1} = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

【例 2.13】设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $A^n$ .

【解】方法一: 用数学归纳法.

因为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

一般地, 设  $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由数学归纳法知

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

方法二: 因为  $A$  是初等矩阵,  $A^n = E \cdot \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n\text{个}A}$ , 相当于对  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  施行  $n$  次列

初等变换(把第一列加到第三列),故

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

方法三:利用对角阵和主对角线为零的上三角阵幂的特点进行计算.

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E + B,$$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$A^n = (E + B)^n = E^n + n \cdot E^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}B^2 + \cdots + nEB^{n-1} + B^n.$$

$$\text{因为 } B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } B^k = 0 (k \geq 2),$$

$$\text{故有 } A^n = E^n + nE^{n-1}B = E + nB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 题型三 有关初等矩阵的命题

**提示** 要求熟悉初等矩阵的性质:初等矩阵均为可逆矩阵且  $E^{-1}(i, j) = E(i, j)$ ,  $E^{-1}[i(k)] =$

$E^{-1}\left[i\left(\frac{1}{k}\right)\right]$ ,  $E^{-1}[i, j + i(k)] = E[i, j + i(-k)]$ . 对  $A$  作初等行(列)变换, 相当于左(右)

乘同类型的初等矩阵.

$$\text{【例 2.14】设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且  $P^m A Q^n = B$ , 则

(A)  $m = 5, n = 6$

(B)  $m = 6, n = 5$

(C)  $m = 5, n = 5$

(D)  $m = 6, n = 6$

【 】

**【解】**  $B$  是  $A$  经过交换第一、二行, 再交换二、三列所得结果, 且  $P^2 = Q^2 = E$ , 因此当  $m, n$  均为奇数时, 有  $P^m = P, Q^n = Q$ , 从而  $P^m A Q^n = PAQ = B$ , 故选(C).

**【例 2.15】** 设  $A$  为  $n (n \geq 2)$  阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得矩阵  $B$ .  $A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵, 则

(A) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得  $B^*$ . (B) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得  $B^*$ .

(C) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得  $-B^*$ . (D) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得  $-B^*$ .

【 】

**【解】** 由题设, 存在初等矩阵  $E_{12}$  (交换  $n$  阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得), 使得  $E_{12}A = B$ , 于是

$$B^* = (E_{12}A)^* = A^* E_{12}^* = A^* | E_{12} | \cdot E_{12}^{-1} = -A^* E_{12},$$

即  $A^* E_{12} = -B^*$ , 可见应选(C).

【例 2.16】设  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$ ,

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 其中  $A$  可逆, 则  $B^{-1}$  等于

(A)  $A^{-1}P_1P_2$ .

(B)  $P_1A^{-1}P_2$ .

(C)  $P_1P_2A^{-1}$ .

(D)  $P_2A^{-1}P_1$ .

【解】通过观察易见, 矩阵  $B$  是通过交换矩阵  $A$  的第 2、第 3 列和交换第 1、第 4 列后得到的. 即  $B = AP_2P_1$ , 于是  $B^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}$ , 故应选(C).

#### 题型四 解矩阵方程

提示 (1) 先化简, 将给出的关系式变为

$$AX = B \quad \text{或} \quad XA = B \quad \text{或} \quad AXC = B.$$

(2) 再通过左乘或右乘可逆矩阵将以上形式分别变为

$$X = A^{-1}B \quad \text{或} \quad X = BA^{-1} \quad \text{或} \quad X = A^{-1}BC^{-1}.$$

注 若  $A$  不可逆, 则一般转化为解方程组.

【例 2.17】设  $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,

矩阵  $X$  满足关系式:  $X(E - C^{-1}B)^T C^T = E$ , 求  $X$ .

【解】 $X(E - C^{-1}B)^T C^T = X[C(E - C^{-1}B)]^T = X(C - B)^T$ ,

于是原关系式变为  $X(C - B)^T = E$ ,

所以

$$X = [(C - B)^T]^{-1}.$$

而  $C - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $(C - B)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,

又  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & : & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & : & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$



故

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

【例 2.18】设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 矩阵  $X$  满足  $AX + E = A^2 + X$ , 试求矩阵  $X$ .

【解】由于  $AX + E = A^2 + X$ , 即

$$(A - E)X = A^2 - E = (A - E)(A + E),$$

因为  $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  是可逆矩阵, 所以

$$X = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) = A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【例 2.19】设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 其中  $E$  为四阶

单位矩阵, 求矩阵  $B$ .

【解】方法一: 因为  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 有  $|A|^3 = 8$ , 得  $|A| = 2$ .

又  $(A - E)BA^{-1} = 3E$ , 有  $(A - E)B = 3A$ .

从而  $A^{-1}(A - E)B = 3E$ , 由此得  $(E - A^{-1})B = 3E$ ,

即  $(E - \frac{1}{|A|}A^*)B = 3E$ , 亦即  $(2E - A^*)B = 6E$ .

又  $2E - A^*$  为可逆矩阵, 于是

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

方法二: 由  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 得  $|A| = 2$ .

又由  $AA^* = |A|E$ , 对  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ , 先右乘  $A$ , 再左乘  $A^*$ , 得

$$A^*AB = A^*B + 3A^*A,$$

$$|A|B = A^*B + 3|A|E,$$

即

$$(2E - A^*)B = 6E.$$

$$\text{于是 } B = 6(2E - A^*)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

题型五 求矩阵的秩

**提示** 求矩阵秩的基本方法有:① 定义法;② 初等变换法(可以行列初等变换并用);③ 利用向量组求秩法.

**【例 2.20】**求下列矩阵的秩:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

**【解】** (1)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} (3)-(2) \\ (5)-(2) \end{smallmatrix}]{(3)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以  $r(A) = 5$ .

$$(2) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{从最后一行开始,后一行依次减前一行}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $r(B) = 2$ .

**【例 2.21】**设矩阵  $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ , 且秩  $r(A) = 3$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

【解】因为秩  $r(A) = 3$ , 故行列式  $|A| = 0$ , 可解得  $k = -3, k = 1$ . 当  $k = 1$  时,  $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{秩 } r(A) = 1, \text{不合题意, 故 } k = -3.$$

① 作为填空题, 若已排除  $k = 1$ , 则  $k = -3$  不必代入验算.

【例 2.22】设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$ , 求  $r(A)$

$$\text{【解】 } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+(n-1) & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)](a-1)^{n-1}$$

(1) 当  $a \neq 1-n$  且  $a \neq 1$  时,  $|A| \neq 0 \Rightarrow R(A) = n$

$$(2) \text{ 当 } a = 1 \text{ 时, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

(3) 当  $a = 1-n$  时,  $|A| = 0$ ,  $A$  的  $n-1$  阶顺序主子式

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n^{n-2} \neq 0$$

$$r(A) = n-1$$

题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明

**提示** 用矩阵的对称与反对称的定义.

**【例 2.23】** 设  $A$  是对称矩阵,  $B$  是反对称矩阵, 则  $AB$  是反对称矩阵  $\Leftrightarrow AB = -BA$ .

**【证】** “ $\Rightarrow$ ” 即已知  $A = A^T, B = -B^T$ , 且  $AB = -(AB)^T$ , 要证  $AB = -BA$ .

因为  $(AB)^T = B^T A^T \xrightarrow[B^T = -B]{\text{因为 } A^T = A} -BA$ , 又  $AB = -(AB)^T$ ,

所以  $-BA = -AB \Rightarrow AB = BA$ .

“ $\Leftarrow$ ” 即已知  $A = A^T, B = -B^T, AB = BA$ , 要证  $AB = -(AB)^T$ .

因为  $AB = BA$ , 所以  $(AB)^T = (BA)^T, (BA)^T = A^T B^T \xrightarrow[B^T = -B]{\text{因为 } A^T = A} -AB$ ,

于是  $(AB)^T = -AB$ , 即  $AB = -(AB)^T$ .

**【例 2.24】** 证明任何一个  $n$  阶方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

**【证】** 本题与高数中证明任何一个函数可表示成一个奇函数与偶函数之和的构造法类似.

设  $A^T$  为矩阵  $A$  的转置.

令  $B = \frac{A + A^T}{2}$ , 因为  $B^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$ ——对称矩阵.

令  $C = \frac{A - A^T}{2}$ , 因为  $C^T = \left(\frac{A - A^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T)$ ——反对称矩阵.

显然有  $A = B + C$ , 故命题得证.

题型七 关于方阵  $A$  可逆的证明

**提示** 思路之一: 验证方阵  $A$  所对应行列式  $|A| \neq 0$ , 适用于矩阵  $A$  已给出具体元素的形式.

思路之二: 求一个与  $A$  同阶的方阵  $B$ , 若  $AB = E$  (或  $BA = E$ ), 即可证  $A$  可逆.

适用于矩阵  $A$  为抽象的形式.

思路之三: 反证法.

**【例 2.25】** 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $E$  为  $n$  阶单位阵, 证明:

(1) 若  $A + B = AB$ , 则  $A - E$  可逆.

(2) 若  $E - AB$  可逆, 则  $E - BA$  可逆, 并求其逆.

**【证】** (1)  $A + B = AB \Rightarrow A = (A - E)B \Rightarrow (A - E) + E = (A - E)B$

$\Rightarrow (A - E)(B - E) = E, |A - E| |B - E| = 1, |A - E| \neq 0$ .

故  $A - E$  可逆.

(2) 用反证法: 若  $E - BA$  不可逆, 则  $|E - BA| = 0$ , 于是存在一个  $X \neq 0$ , 使

$$(E - BA)X = 0 \Rightarrow X = BAX.$$

令  $Y = AX$ , 则  $X = BY \Rightarrow Y \neq 0$  (否则  $X = 0$ ).

又  $(E - AB)Y = Y - ABY = Y - AX = 0$ , 这与  $(E - AB)$  可逆矛盾. 故  $E - BA$  可逆.

**【另证】** 因为  $E - AB$  可逆, 所以存在  $n$  阶可逆矩阵  $C$ , 使

$$C(E - AB) = (E - AB)C = E \Rightarrow CAB = ABC = C - E,$$

$$\text{从而 } B(ABC)A = B(C - E)A \Rightarrow E + BCA - BA - BABCA = E,$$

$$\text{即 } (E - BA)(E + BCA) = E, \text{ 故 } E - BA \text{ 可逆, 且 } (E - BA)^{-1} = E + BCA.$$

【例 2.26】设  $n$  阶矩阵  $A, B$  和  $A+B$  均可逆, 证明:

$$(1) A^{-1} + B^{-1} \text{ 也可逆, 且 } (A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A,$$

$$(2) (A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

【证】(1) 因为  $(A^{-1} + B^{-1})[A(A+B)^{-1}B] = (A+B)^{-1}B + B^{-1}A(A+B)^{-1}B$   
 $= (E + B^{-1}A)(A+B)^{-1}B = (E + B^{-1}A)[B^{-1}(A+B)]^{-1}$   
 $= (E + B^{-1}A)(B^{-1}A + E)^{-1} = E,$

所以  $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B.$

同理可证  $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.$

(2) 由(1)的结果, 有

$$(A+B)[A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}] = (A+B)[A^{-1} - A^{-1}A(A+B)^{-1}BA^{-1}]$$

$$= (A+B)[A^{-1} - (A+B)^{-1}BA^{-1}] = (A+B)[E - (A+B)^{-1}B]A^{-1}$$

$$= (A+B)(A+B)^{-1}[A+B-B]A^{-1} = (A+B)(A+B)^{-1}AA^{-1} = E,$$

故  $(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}.$

### 题型八 与 $A$ 的伴随阵 $A^*$ 有关联的命题的证明

【提示】一般用  $AA^* = A^*A = |A|E$  进行讨论.

【例 2.27】设  $A$  为  $n$  阶非零方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵,  $A^T$  是  $A$  的转置矩阵, 证明: 当  $A^T = A^*$  时,  $A$  可逆.

【证】因为  $AA^* = |A|E, A^T = A^*$ , 所以  $AA^T = |A|E$ .

若  $|A| = 0$ , 则  $AA^T = 0$ , 设  $A$  的行向量为  $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ ,

于是  $\alpha_i \alpha_i^T = 0 (i = 1, \dots, n) \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow A = O$ .

这与  $A$  是非零矩阵矛盾, 故  $|A| \neq 0$ , 即  $A$  可逆.

【例 2.28】设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 且  $A^2 = |A|E$ , 证明  $A$  的伴随矩阵  $A^* = A$ .

【证】因为  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 所以

$$A^* = |A|A^{-1} = |A|EA^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} = A.$$

【例 2.29】设  $A$  为  $n$  阶方阵 ( $n \geq 3$ ), 证明:  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ .

【证】由公式  $BB^* = B^*B = |B|E$ , 有  $(A^*)^* \cdot A^* = |A^*|E$ ,

又  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 所以  $(A^*)^* A^* = |A|^{n-1}E$ .

(1) 若  $|A^*| \neq 0$ , 则  $|A| \neq 0$ , 于是

$$(A^*)^* = |A|^{n-1}E(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}E(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^{n-1} \cdot \frac{A}{|A|},$$

即  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A.$

(2) 若  $|A^*| = 0$ , 则  $|A| = 0$ . (若不然  $|A| \neq 0$ , 则  $|A^*| \neq 0$  矛盾!)

当  $n > 2$  时,  $r(A^*) \leq 1$ , 于是  $r[(A^*)^*] = 0$ , 故  $(A^*)^* = O$ .

因此  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A.$

【例 2.30】设矩阵  $A$  的元素均为整数, 证明:  $A^{-1}$  的元素均为整数  $\Leftrightarrow |A| = \pm 1$ .

【证】“ $\Rightarrow$ ”  $AA^{-1} = E, |A^{-1}| = |A|^{-1}.$

因为  $A$  与  $A^{-1}$  的元素均为整数, 所以  $|A^{-1}|$  与  $|A|$  均为整数.

故  $|A| = \pm 1$ .

“ $\Leftarrow$ ” 因为  $A$  的元素均为整数, 所以伴随阵  $A^*$  的元素均为整数,

又  $A^{-1} = |A|^{-1}A^*$ ,  $|A| = \pm 1$ , 故  $A^{-1}$  的元素均为整数.

【例 2.31】设矩阵  $A$  可逆, 且  $A$  的每行元素之和均等于常数  $a$ , 试证:

(1)  $a \neq 0$ ; (2)  $A^{-1}$  的每行元素之和都等于  $\frac{1}{a}$ .

【证】(1)  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$

若  $a = 0$ , 则  $|A| = 0$ , 这与  $A$  可逆即  $|A| \neq 0$  矛盾, 故  $a \neq 0$ .

(2) 令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ ,  $A^{-1} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ ,  $E = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ,

因为  $A^{-1}A = E$ , 所以  $A^{-1}\alpha_j = e_j$ , ( $j = 1, 2, \cdots, n$ ).

于是  $A^{-1}\alpha_1 + A^{-1}\alpha_2 + \cdots + A^{-1}\alpha_n = A^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ ,

即  $A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ . 又  $A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)a$ ,

所以  $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ , 故  $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix}$ .

### 题型九 关于矩阵秩的命题的证明

#### 1. 关于矩阵秩的不等式的证明

**提示** 思路之一: 通常是通过矩阵的初等变换化为矩阵最简型, 再进行分析.

思路之二: 利用分块矩阵的乘法, 结合齐次方程组进行分析.

【例 2.32】设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 证明:  $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ .

【证】设  $r(A) = r$ ,  $r(B) = s$ , 则有

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

于是

$$P_1 A B Q_2 = P_1 A Q_1 (Q_1^{-1} P_2^{-1}) P_2 B Q_2.$$

令  $C = Q_1^{-1} P_2^{-1} = (c_{ij})_{n \times n}$ ,

则  $P_1 A B Q_2 = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = C_*,$

又可知任一矩阵每减少一行(或列), 其秩减少不超过 1, 而  $r(C) = n$ ,

故  $r = r(AB) = r(C_*) \geq n - (n - r) - (n - s) = r + s - n$ .

【例 2.33】设  $A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ , 则  $r(AB) \leq \min[r(A), r(B)]$ .

【证】设  $r(A) = r$ ,  $r(B) = s$ ,

则存在  $m$  阶可逆矩阵  $P_1$  及  $s$  阶可逆矩阵  $Q_1$ , 使

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

同理,存在  $s$  阶可逆矩阵  $P_2$  及  $n$  阶可逆矩阵  $Q_2$ ,使

$$P_2 B Q_2 = \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix}. \text{ 于是 } P_1 A B Q_2 = P_1 A Q_1 (Q_1^{-1} P_2^{-1}) P_2 B Q_2, \text{ 令 } C = Q_1^{-1} P_2^{-1} = (c_{ij})_{s \times s},$$

$$\text{则 } P_1 A B Q_2 = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{故 } r(AB) = r(P_1 A B Q_2) = r \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rs} \end{bmatrix} \leq \min(r, s) = \min[r(A), r(B)].$$

**【例 2.34】** 设  $A$  与  $B$  均为  $n$  阶方阵,若  $AB = O$ ,则  $r(A) + r(B) \leq n$ .

**【证】** 设矩阵  $B$  的列向量为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ,则由分块矩阵的乘法

$$\text{有 } A \cdot B = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\text{于是 } A\beta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

可见  $B$  的列向量是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解.

设  $r(A) = r$ ,则此方程组的基础解系所含向量的个数为  $n - r$  个.

于是向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的秩  $\leq n - r$ ,即  $r(B) \leq n - r$ ,故  $r(A) + r(B) \leq n$ .

## 2. 关于矩阵秩的等式的证明

**提示**

$$r(A) = r(B) \Leftrightarrow r(A) \leq r(B) \text{ 且 } r(A) \geq r(B).$$

$$r(A) + r(B) = n \Leftrightarrow \begin{cases} AB = O \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n, \\ A + B = kE \Rightarrow r(A) + r(B) \geq n, \\ \text{其中 } k \neq 0 \text{ 为常数.} \end{cases}$$

**【例 2.35】** 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $ABA = B^{-1}$ ,  $E$  为  $n$  阶单位阵,证明:

$$r(E - AB) + r(E + AB) = n.$$

**【证】** 因为  $ABA = B^{-1} \Rightarrow ABAB = E \Rightarrow (E - AB)(E + AB) = O$ ,

$$\text{所以 } r(E - AB) + r(E + AB) \leq n. \quad ①$$

$$\text{又 } (E - AB) + (E + AB) = 2E,$$

$$\text{所以 } r(E - AB) + r(E + AB) \geq r(2E) = n, \quad ②$$

$$\text{由 ①, ②, 得 } r(E - AB) + r(E + AB) = n.$$

自我练习: 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $A^2 - A = 2E$ ,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则  $r(2E - A) + r(E + A) = n$ .

**【例 2.36】** 已知  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $P$  为三阶非零矩阵, 且满足  $PQ = O$ , 则  $r(P) = (\quad)$ .

(A)  $t = 6$  时,  $P$  的秩必为 1.

(B)  $t = 6$  时,  $P$  的秩必为 2.

(C)  $t \neq 6$  时,  $P$  的秩必为 1.

(D)  $t \neq 6$  时,  $P$  的秩必为 2.

**【解】** 因为  $P, Q$  均为三阶方阵, 又  $PQ = O$ ,

所以  $r(P) + r(Q) \leq 3$ .

当  $t = 6$  时,  $r(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$  的秩  $= 1$ , 于是  $r(P) \leq 2$ ,

当  $t \neq 6$  时,  $r(Q) = 2$ , 于是  $r(P) \leq 1$ ,

又  $r(P) \geq 1$  ( $P$  为三阶非零方阵), 故  $r(P) = 1$ , 即 (C) 入选.

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势 1** 题设条件与代数余子式  $A_{ij}$  或  $A^*$  有关, 则立即联想到用行列式按行(列)展开定理及  $AA^* = A^*A = |A|E$ .

**【例 2.37】** 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$ , 其行列式  $|A| = -1$ , 又  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  有一个特

征值  $\lambda_0$ , 属于  $\lambda_0$  的一个特征向量为  $\alpha = [-1, -1, 1]^T$ , 求  $a, b, c$  和  $\lambda_0$  的值.

**【解】** 题设与  $A^*$  有关, 利用公式  $AA^* = |A|E$  化简.

由已知, 有  $A^*\alpha = \lambda_0\alpha \Rightarrow AA^*\alpha = \lambda_0A\alpha$

$$\Rightarrow |A|\alpha = \lambda_0A\alpha.$$

而  $|A| = -1$ , 于是  $\lambda_0A\alpha = -\alpha$ ,

$$\text{即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{也即 } \begin{cases} \lambda_0(-a+1+c) = 1, & \text{①} \\ \lambda_0(-5-b+3) = 1, & \text{②} \\ \lambda_0(-1+c-a) = -1 & \text{③} \end{cases}$$

由式 ① 和式 ③, 解得  $\lambda_0 = 1$ , 将  $\lambda_0 = 1$  代入式 ② 和式 ①, 得  $b = -3, c = a$ . 再由  $|A| = -1$ , 有

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} = a-3 = -1,$$

得  $a = 2, b = -3, c = 2, \lambda_0 = 1$ .

**思维定势 2** 若涉及  $A, B$  是否可交换, 即  $AB = BA$ , 则立即联想到用逆矩阵的定义去分析.

**【例 2.38】** 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且  $A+B = AB$ .

(1) 证明:  $A-E$  可逆; (2) 证明:  $AB = BA$ .

**【证】** (1) 由  $A+B = AB$ ,



有  $AB - A - B + E = E \Rightarrow (A - E)(B - E) = E$ ,

故  $A - E$  可逆, 且  $(A - E)^{-1} = B - E$ .

(2) 由(1)知,  $A - E$  与  $B - E$  互为逆矩阵, 于是由逆矩阵的定义知

$$(A - E)(B - E) = (B - E)(A - E),$$

即  $AB = BA$ .

**思维定势 3** 若题设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $f(A) = 0$ , 要证  $aA + bE$  可逆, 则先分解出因子  $aA + bE$  再说.

**【例 2.39】** 已知  $A, B$  为三阶矩阵, 且满足  $2A^{-1}B = B - 4E$ , 其中  $E$  是三阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵  $A - 2E$  可逆;

(2) 若  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $A$ .

**【解】** (1) 从  $2A^{-1}B = B - 4E$  中设法分解出因子  $A - 2E$ .

$$\begin{aligned} 2A^{-1}B = B - 4E &\Rightarrow 2B = AB - 4A \\ &\Rightarrow AB - 4A - 2B = O \\ &\Rightarrow AB - 2B - (4A - 8E) = 8E \\ &\Rightarrow (A - 2E)B - 4(A - 2E) = 8E \\ &\Rightarrow (A - 2E)(B - 4E) = 8E, \end{aligned}$$

即  $(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E,$

故  $A - 2E$  可逆, 且  $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E).$

(2) 由(1)知  $A - 2E = 8 \cdot (B - 4E)^{-1} \Rightarrow A = 2E + 8 \cdot (B - 4E)^{-1}$

$$= 2E + 8 \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 二、综合题解析

**【例 2.40】** 设  $X, Y$  是独立同分布的离散型随机变量, 分布律为

$X$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

, 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & X+2 \\ -2 & -2 & Y \end{bmatrix} \text{ 的秩为 2 的概率.}$$

**【解】** 对  $A$  施行初等变换  $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & X-4 \\ 0 & 0 & X+Y \end{bmatrix},$

因为  $r(A) = 2$ , 所以  $X + Y = 0$ . 又  $X + Y$  的分布律为

$$X + Y \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$P \left| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right|$$

所以  $A$  的秩为 2 的概率为

$$P\{X+Y=0\} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

【例 2.41】设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵,  $n < m$ , 且方程组  $Ax = b$  有唯一解. 证明:  $A^T A$  可逆.

【证】因为  $Ax = b$  有唯一解, 所以  $Ax = 0$  只有零解. 设  $A^T Ax = 0$  有非零解, 即  $\exists x_0 \neq 0$ , 使  $A^T Ax_0 = 0$ , 有  $x_0^T A^T Ax_0 = 0$ , 即  $(Ax_0)^T (Ax_0) = 0$ .

所以  $Ax_0 = 0$ , 即  $Ax = 0$  有非零解, 与已知相矛盾.

因为  $A^T Ax = 0$  只有零解, 又  $A^T A$  是  $n$  阶方阵, 所以  $A^T A$  可逆.

【例 2.42】设  $n$  阶可逆阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i$  为  $n$  维列向量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\beta$  为  $n$  维非零列向量, 且与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  均正交, 则  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta)$  可逆.

【证】证明  $B$  可逆即证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta$  线性无关. 令

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-1} \alpha_{n-1} + k_n \beta = 0,$$

两边左乘  $\beta^T$ , 即

$$k_1 \beta^T \alpha_1 + k_2 \beta^T \alpha_2 + \dots + k_{n-1} \beta^T \alpha_{n-1} + k_n \beta^T \beta = 0,$$

因为  $\beta^T \alpha_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $\beta^T \beta \neq 0$ ,

所以  $k_n \beta^T \beta = 0$ , 即  $k_n = 0$ , 有  $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{n-1} \alpha_{n-1} = 0$ ,

又因为  $A$  可逆, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  线性无关.

因为  $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta$  线性无关. 即  $B$  可逆.

## 习 题 二

### 1. 填空题.

(1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha, \beta$  均为 4 维列向量,  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha]$ ,  $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta]$ , 且  $|A| = 2$ ,  $|B| = 3$ , 则  $|A - 3B| =$  \_\_\_\_\_.

(2) 若对任意的  $n \times 1$  矩阵  $X$ , 均有  $AX = 0$ , 则  $A =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设  $A$  为  $m$  阶方阵, 存在非零的  $m \times n$  矩阵  $B$ , 使  $AB = O$  的充分必要条件是 \_\_\_\_\_.

(4) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 则存在两个不相等的  $n$  阶矩阵  $B, C$ , 使  $AB = AC$  的充分条件是 \_\_\_\_\_.

(5)  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 b_2 \dots b_n] =$  \_\_\_\_\_.

(6) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = A^2 - 3A + 2E$ , 则  $B^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

(7) 若  $n$  阶矩阵  $A$  满足方程  $A^2 + 2A + 3E = O$ , 则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

(8) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $(A + 3E)^{-1}(A^2 - 9E) =$  \_\_\_\_\_.

(9) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ , 则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_,  $(A^*)^{-1} =$  \_\_\_\_\_,  $[(-2A)^*]^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  则  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

## 2. 选择题.

(1) 设  $A, B$  为同阶可逆矩阵, 则

A.  $AB = BA$ .

B. 存在可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = B$ .

C. 存在可逆矩阵  $C$ , 使  $C^T AC = B$ .

D. 存在可逆矩阵  $P$  和  $Q$ , 使  $PAQ = B$ . 【    】

(2) 设  $A, B$  都是  $n$  阶可逆矩阵, 则  $\begin{vmatrix} A^T & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix}$  等于

A.  $(-2)^{2n} |A| |B|^{-1}$ .

B.  $(-2)^n |A| |B|^{-1}$ .

C.  $-2 |A^T| |B|$ .

D.  $-2 |A| |B|^{-1}$ . 【    】

(3) 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 下面结论正确的是

A. 若  $A, B$  均可逆, 则  $A+B$  可逆.

B. 若  $A, B$  均可逆, 则  $AB$  可逆.

C. 若  $A+B$  可逆, 则  $A-B$  可逆.

D. 若  $A+B$  可逆, 则  $A, B$  均可逆. 【    】

(4) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $|A| \neq 0$ , 下列正确的是

A. 对  $n$  阶方阵  $B$ , 若  $AB = O$ , 则  $B = O$ .

B. 对  $n$  阶方阵  $B$ , 若  $AB = BA$ , 则  $|B| \neq 0$ .

C. 对  $n$  阶方阵  $B$ , 若  $|B| = |A|$ , 则  $A, B$  有相同的特征值.

D. 对任意非零向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 都有  $x^T Ax > 0$ . 【    】

(5) 设  $n$  维向量  $\alpha = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ , 矩阵  $A = E - \alpha^T \alpha, B = E + 2\alpha^T \alpha$ , 其中  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 则  $AB =$

A.  $O$ .

B.  $-E$ .

C.  $E$ .

D.  $E + \alpha^T \alpha$ . 【    】

(6) 设  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} - a_{21} & a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

设有  $P_2 P_1 A = B$ , 则  $P_2 =$

A.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

B.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

C.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

D.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 【    】

(7) 设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 则  $(-A)^*$  等于

A.  $-A^*$ .

B.  $A^*$ .

C.  $(-1)^* A^*$ .

D.  $(-1)^{n-1} A^*$ . 【    】

(8) 设  $n$  阶矩阵  $A$  非奇异 ( $n \geq 2$ ),  $A^*$  是矩阵  $A$  的伴随矩阵, 则

A.  $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$ .

B.  $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$ .

C.  $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ .

D.  $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$ . 【    】

(9) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $C$  是  $n$  阶可逆矩阵, 矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 矩阵  $B = AC$  的秩为  $r_1$ , 则

A.  $r > r_1$ .

B.  $r < r_1$ .

C.  $r = r_1$ .

D.  $r$  与  $r_1$  的关系依  $C$  而定.

【   】

(10) 设  $A, B$  都是  $n$  阶非零矩阵, 且  $AB = 0$ , 则  $A$  和  $B$  的秩

A. 必有一个等于零.

B. 都小于  $n$ .

C. 一个小于  $n$ , 一个等于  $n$ .

D. 都等于  $n$ .

【   】

### 3. 计算证明题.

(1) 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ . 求 ①  $AB - BA$ ; ②  $A^2 - B^2$ ; ③  $B^T A^T$ .

(2) 求下列矩阵的逆矩阵:

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \textcircled{2} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \textcircled{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \textcircled{4} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) 已知三阶矩阵  $A$  满足  $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ , 其中  $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, -2, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$ , 试求矩阵  $A$ .

(4)  $k$  取什么值时, 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  可逆, 并求其逆.

(5) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且有自然数  $m$ , 使  $(E + A)^m = 0$ , 则  $A$  可逆.

(6) 设  $B$  为可逆矩阵,  $A$  是与  $B$  同阶的方阵, 且满足  $A^2 + AB + B^2 = O$ , 证明:  $A$  和  $A + B$  都是可逆矩阵.

(7) 若  $A, B$  都是  $n$  阶方阵, 且  $E + AB$  可逆, 则  $E + BA$  也可逆, 且  $(E + BA)^{-1} = E - B(E + AB)^{-1}A$ .

(8) 设  $A, B$  是  $n$  阶方阵, 已知  $|B| \neq 0$ ,  $A - E$  可逆, 且  $(A - E)^{-1} = (B - E)^T$ , 求证:  $A$  可逆.

(9) 设  $A, B, A + B$  为  $n$  阶正交矩阵, 试证:  $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ .

(10) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 试证明:  $\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = |AB - E|$ .

(11) 设  $A$  为主对角元素均为零的四阶实对称可逆矩阵,  $E$  为四阶单位矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}, (k > 0, l > 0)$$

① 试计算  $|E + AB|$ , 并指出  $A$  中元素满足什么条件时,  $E + AB$  可逆;

② 当  $E + AB$  可逆时, 试证明  $(E + AB)^{-1}A$  为对称矩阵.

(12) 计算下列各题:

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n; \quad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

(13) 设  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ , 求  $A^n$ .

(14) 假设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵, 证明: ①  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ; ②  $(A^T)^* = (A^*)^T$ ; ③  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ ; ④  $[(A^{-1})^T]^* = [(A^*)^T]^{-1}$ .

(15)  $A$  是  $n$  阶方阵, 满足  $A^m = E$ , 其中  $m$  为正整数,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 今将  $A$  中  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  用其代数余子式  $A_{ij}$  代替, 得到的矩阵记为  $A_0$ , 证明  $A_0^m = E$ .

(16) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

① 证明:  $n \geq 3$  时,  $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$  ( $E$  为三阶单位矩阵);

② 求  $A^{100}$ .

(17) 当  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  时,  $A^6 = E$ , 求  $A^{11}$ .

(18) 已知  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且满足  $A^2 = A, B^2 = B$  与  $(A-B)^2 = A+B$ , 试证:  $AB = BA = O$ .

(19) 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵,  $|E-A| \neq 0$ , 如果  $C = A+CA, B = E+AB$ , 求证:  $B-C = E$ .

(20) 设  $A$  为  $n$  阶非奇异矩阵,  $\alpha$  为  $n$  维列向量,  $b$  为常数, 记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} E & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix},$$

① 计算并化简  $PQ$ ;

② 证明: 矩阵  $Q$  可逆的充要条件是  $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$ .

### 参 考 答 案

1. (1) 56; (2) 0; (3)  $|A| = 0$ ; (4)  $|A| = 0$ ;

(5)  $\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$ ; (6)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ; (7)  $-\frac{1}{3}(A+2E)$ ;

(8)  $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ; (9)  $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -7 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ;

(10)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -7 & 11 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

2. (1) D (2) A (3) B (4) A (5) C (6) B (7) D (8) C (9) C (10) B

$$3. (1) \textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -17 & -17 & 3 \\ 9 & -18 & 16 \end{bmatrix}; \quad \textcircled{2} \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ -15 & -15 & 9 \\ -3 & 26 & -13 \end{bmatrix}; \quad \textcircled{3} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 17 \\ -5 & 1 & -3 \\ 5 & 11 & 22 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \textcircled{1} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textcircled{2} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \text{ 当 } k \neq 0 \text{ 时可逆. } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ -1 & \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}.$$

(5) 因  $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{A}$  可交换, 且能证明  $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^m$  可用二项式定理展为

$$(\mathbf{E} + \mathbf{A})^m = \sum_{i=0}^m \mathbf{C}_m^i \mathbf{A}^i \mathbf{E}^{m-i} = \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_m^i \mathbf{A}^{i-1} \right) \mathbf{A} + \mathbf{E} = 0.$$

$$\text{令 } \mathbf{B} = -\sum_{i=1}^m \mathbf{C}_m^i \mathbf{A}^{i-1}, \text{ 有 } \mathbf{BA} = \mathbf{E}, \text{ 所以 } \mathbf{A} \text{ 可逆, 且 } \mathbf{A}^{-1} = -\sum_{i=1}^m \mathbf{C}_m^i \mathbf{A}^{i-1}.$$

(6) ~ (10) 略.

$$(11) \textcircled{1} \mathbf{E} + \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 1 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 1 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{E} + \mathbf{AB}| = 1 - kla_{34}^2.$$

当  $a_{34}^2 \neq \frac{1}{kl}$  时,  $\mathbf{E} + \mathbf{AB}$  为可逆矩阵.

$\textcircled{2} (\mathbf{E} + \mathbf{AB})^{-1} \mathbf{A} = [\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{AB})]^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})$ , 由于  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都是对称矩阵,  $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}$  也是对称矩阵, 故  $(\mathbf{E} + \mathbf{AB})^{-1} \mathbf{A}$  也是对称矩阵.

$$(12) \textcircled{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} \mathbf{E}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(13) \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

(14) 略.

(15) 由已知  $A^m = E$ ,  $|A^m| = 1$ ,  $|A| \neq 0$ , 则  $A$  为可逆矩阵,  $A_0 = (A^*)^T = [|A| A^{-1}]^T$   
 $= |A| (A^T)^{-1}$ ,

故  $A_0^m = [|A| (A^T)^{-1}]^m = |A|^m [(A^m)^T]^{-1} = 1 \cdot [(E)^T]^{-1} = E$ .

(16) 略.

$$(17) \text{ 因为 } |A| = 1, \text{ 所以 } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{由 } A^6 = E, \text{ 有 } A^{11} = A^{12} \cdot A^{-1} = (A^6)^2 A^{-1} = E A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(18) 略. (19) 略.

(20) 利用  $AA^* = A^*A = |A| E$ .

# 第三章 向 量

## 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

### 一、向量的概念与运算

#### 1. 向量的概念

$n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  组成的有序数组  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

称为  $n$  维行向量. 其中  $a_i$  称为向量  $\alpha$  的第  $i$  个分量.

$$\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

称为  $n$  维列向量,  $\beta$  可改写成  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ .

#### 2. 向量的运算

向量相等: 两个  $n$  维向量当且仅当它们各对应分量都相等时, 才是相等的. 即如果  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 当且仅当  $a_i = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$  时,  $\alpha = \beta$ .

零向量: 所有分量均为零的向量称为零向量, 记为  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ .

负向量:  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  的各分量的相反数组成的  $n$  维向量, 称为  $\alpha$  的负向量, 记为  $-\alpha$ , 即

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

向量的运算: 设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 则

$$1^\circ \alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n),$$

$$2^\circ k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

### 二、向量间的线性关系

#### 1. 线性组合

对于给定向量  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , 如果存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使关系式

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

成立, 则称向量  $\beta$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性组合或称向量  $\beta$  可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示.

非齐次线性方程组  $Ax = b$  是否有解, 相当于向量  $b$  是否可由  $A$  的列向量线性表示.

① (1) 零向量是任何一组向量的线性组合.

(2) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中的任一向量  $\alpha_j (1 \leq j \leq s)$  都是此向量组的线性组合.



(3) 任何一个  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  都是  $n$  维基本单位向量组  $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$  的线性组合, 且

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n.$$

## 2. 线性相关与线性无关

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为一组  $n$  维向量, 如果存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$$

成立, 则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关; 如果上述等式仅当  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$  时成立, 则称向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

齐次线性方程组  $Ax = 0$  是否有非零解, 等同于  $A$  的列向量组是否线性相关.

- 注** (1) 单个非零向量线性无关.  
 (2) 含有零向量的向量组一定线性相关.  
 (3) 基本单位向量组一定线性无关.  
 (4) 两个向量线性相关的充要条件是对应元素成比例.

**【例 3.1】** 若向量组  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关,  $\alpha, \beta, \delta$  线性相关, 则

- (A)  $\alpha$  必可由  $\beta, \gamma, \delta$  线性表示. (B)  $\beta$  必不可由  $\alpha, \gamma, \delta$  线性表示.  
 (C)  $\delta$  必可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示. (D)  $\delta$  必不可由  $\alpha, \gamma, \beta$  线性表示. **【 】**

**【解】** 因为  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 所以  $\alpha, \beta$  线性无关, 又已知  $\alpha, \beta, \delta$  线性相关, 于是  $\delta$  可由  $\alpha, \beta$  线性表示,  $\delta = k_1 \alpha + k_2 \beta$ , 从而有  $\delta = k_1 \alpha + k_2 \beta + 0 \cdot \gamma$ , 即  $\delta$  可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示, 故应选 (C).

## 三、向量组的秩和矩阵的秩

### 1. 极大线性无关组

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为一个  $n$  维向量组, 如果向量组中有  $r$  个向量线性无关, 且向量组的任意  $r+1$  个向量线性相关, 则这  $r$  个线性无关的向量称为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组.

若  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性无关部分组, 它是极大线性无关组的充分必要条件是:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中每一个向量都可用  $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$  线性表示.

- 注** (1) 含有非零向量的向量组一定存在极大线性无关组.  
 (2) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则其极大线性无关组就是自身.

### 2. 向量组的等价性

设有向量组 (I):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和向量组 (II):  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 如果向量组 (I) 的每个向量都可以由向量组 (II) 线性表示, 则称向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表示.

如果向量组 (I) 和 (II) 可以相互线性表示, 则称向量组 (I) 和 (II) 等价, 记为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}.$$

向量组等价具有反身性、对称性、传递性.

- 注** (1) 任一向量组和它的极大无关组等价.  
 (2) 向量组的任意两个极大无关组等价.  
 (3) 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.  
 (4) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同.

## 3. 向量组的秩

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的极大线性无关组中所含向量的个数称为此向量组的秩, 记作秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  或  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ . 如果一个向量组仅含有零向量, 则规定它的秩为零.

等价的向量组具有相同的秩.

## 4. 矩阵的秩

设  $A = (a_{ij})$  为  $m \times n$  矩阵, 则有矩阵  $A$  的行向量组的秩和列向量组的秩相等. 矩阵  $A$  的行秩和列秩统称为矩阵  $A$  的秩, 记为秩 $(A)$  或  $r(A)$ .

矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  的秩也可用行列式来定义:

矩阵  $A$  的秩等于  $r$  的充要条件是: 矩阵  $A$  中至少有一个  $r$  阶子式不等于零, 而所有  $r+1$  阶子式都等于零.

注 (1) 矩阵秩的两种定义是等价的.

(2) 对矩阵  $A_{m \times n}$ , 有

当秩  $r(A) = m$  时,  $A$  的行向量组线性无关;

当秩  $r(A) = n$  时,  $A$  的列向量组线性无关;

若秩  $r(A) = m$  或秩  $r(A) = n$ , 称  $A$  为行(或列)满秩矩阵.

(3) 矩阵的初等行(列)变换不改变矩阵的秩, 且不改变其列(行)向量间的线性关系.

(4) 求向量组的秩可转化为求矩阵的行(列)向量组的秩, 从而可用初等变换求其秩.

## 四、向量空间

## 1. 向量空间\*

设  $S$  是  $n$  维向量的非空集合, 且  $S$  中向量对于加法和数乘运算是封闭的, 则称  $S$  构成一向量空间.

## 2. 子空间\*

若  $S_1$  是向量空间  $S$  的一个非空子集, 且对  $S$  中的加法和数乘两种运算是封闭的, 则称  $S_1$  是  $S$  的子空间.

注 齐次线性方程组  $Ax = 0$  的所有解向量的集合构成一向量空间, 称为解空间.

## 3. 基底\*

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为向量空间  $S$  中的一个线性无关的向量组, 且  $S$  中任一向量均可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为向量空间  $S$  中的一个基底.

## 4. 维数\*

向量空间中, 基底所含向量的个数, 称为此向量空间的维数. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为向量空间  $S$  的一个基底, 则其维数为  $n$ , 称为  $n$  维向量空间, 记为  $R^n$ .

## 5. 坐标\*

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为  $n$  维向量空间  $R^n$  的一组基, 对  $\forall \alpha \in R^n$ , 存在唯一一组数, 使

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] x,$$

则有序数组  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是向量  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的坐标.

## 6. 基变换与坐标变换\*

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  为  $R^n$  中的两组基, 则

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] P$$

称为基变换公式. 其中可逆矩阵  $P$  称为由基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  到基  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  的过渡矩阵.

若向量  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  下的坐标分别为  $x$  和  $y$ ,

即  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]x = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]y = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]Py$ ,

则  $x = Py$  或  $y = P^{-1}x$  称为坐标变换公式.

## 7. 内积

设  $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , 则定义  $\alpha$  与  $\beta$  的内积为

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

向量的长度:  $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ .

正交: 若  $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 0$ , 则称  $\alpha$  与  $\beta$  是正交的.

内积具有性质:

$$(1) (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha).$$

$$(2) \alpha = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \alpha) = 0.$$

$$(3) (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma).$$

## 8. 施密特(Schmidt) 正交化方法

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为  $\mathbb{R}^n$  中一组线性无关的向量, 令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1},$$

则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  相互正交.

## 9. 规范正交基与正交矩阵

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为  $\mathbb{R}^n$  中一组基, 先将其正交化得  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , 再将其单位化得  $\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}$ ,

$\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, \dots, \eta_n = \frac{\beta_n}{|\beta_n|}$ , 则  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  满足:

$$(\eta_i, \eta_j) = 0, i \neq j; \quad |\eta_i| = 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

称其为  $\mathbb{R}^n$  中的一组规范正交基.

令  $Q = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ , 则  $Q$  满足  $Q^T Q = Q Q^T = E$ , 称为正交矩阵.

正交矩阵具有性质:

(1)  $Q^T = Q^{-1}$ .

(2)  $|Q| = \pm 1$ .

(3) 若  $Q_1, Q_2$  均为正交矩阵, 则  $Q_1 Q_2, Q_2 Q_1$  仍为正交矩阵.

## 五、重要定理与公式

**定理 1** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关  $\Leftrightarrow$  向量组中至少有一个向量可由其余的  $m-1$  个向量线性表出.

**定理 2** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 而向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  线性相关, 则  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出, 且表示法唯一.

**定理 3** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性相关, 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$  也线性相关. 向量组部分相关, 整体相关; 整体无关, 部分无关.

**定理 4** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 则无论如何扩充向量组各向量的分量, 所得向量组仍线性无关. 若一个向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 则添加分量后仍无关; 一个向量线性相关, 去掉某些分量后仍线性相关.

**【例 3.2】** 设向量组  $\alpha_1 = (1, 1, 2, -2), \alpha_2 = (1, 3, -x, -2x), \alpha_3 = (1, -1, 6, 0)$ , 若此向量组的秩为 2, 则  $x =$  \_\_\_\_\_.

**【解】** 取向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的前三个分量构成向量组  $\widetilde{\alpha}_1 = (1, 1, 2), \widetilde{\alpha}_2 = (1, 3, -x), \widetilde{\alpha}_3 = (1, -1, 6)$ , 则  $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3$  线性相关, 否则添加分量后得  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  仍线性无关, 与已知矛盾. 从而有

$$|[\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3]| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -x & 6 \end{vmatrix} = 4 - 2x = 0, \text{ 得 } x = 2.$$

**定理 5** 向量组的个数大于向量组的维数, 则此向量组线性相关.

**定理 6**  $n$  个  $n$  维向量组线性无关  $\Leftrightarrow$  由向量组所构成的矩阵对应的行列式  $\neq 0$ .

**定理 7** 矩阵的秩等于矩阵的行(或列)向量组的秩.

**定理 8** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  为向量组  $T$  的极大线性无关组, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  与向量组  $T$  等价.

**证** 研究两个向量组是否等价, 通常从通过研究它们的极大线性无关组是否等价入手.

**定理 9** 两个等价的线性无关组所含向量的个数相等.

**定理 10** 两个等价的向量组的秩相等.

**定理 11** 设有两个向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ . 若向量组  $A$  可由  $B$  线性表出, 且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 则向量组  $A$  所含向量个数  $r$  不大于向量组  $B$  所含向量个数  $s$ , 即  $r \leq s$ .

**定理 12** 若  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是一组两两正交的非零向量, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关.

## 六、小结

向量这章中定义多, 定理多, 抽象名词也多. 但是, 问题可归纳为以下三类.

**问题 1:** 一组向量之间的关系.

对于一组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 考查  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关或线性相关或其中一个向量能否被其余向量线性表示. 这类问题利用线性相关性的定义或齐次线性方程组的解可以解决.

**问题 2:** 一个向量  $\beta$  与一组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  之间的关系.

考查  $\beta$  可否由向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表示, 若能表出, 表示法是否唯一? 若不能表示,  $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_s$  是否线性无关? 这类问题可利用非齐次线性方程组的解来解决.

设  $k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = \beta$ , 令  $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ , 则  $Ax = \beta$ , 若该方程有解, 则可线性表示; 若无解, 则不能线性表示.

**问题 3:** 两组向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  和  $\beta_1, \dots, \beta_t$  之间的关系.

由于向量组与它的极大线性无关组等价, 所以这类问题常常转化为研究两个向量组极大线性无关组之间的关系.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 讨论向量组的线性相关性

**提示** (1) 定义法. 一般步骤为: 假设有  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0,$$

要使上式成立, 根据已知条件推断, 若  $k_1, k_2, \dots, k_s$  至少有一个不为零, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关; 若当且仅当  $k_1, k_2, \dots, k_s$  全为零上式才成立, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

(2)  $n$  个  $n$  维列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关的充要条件是行列式  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充要条件是行列式  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$ .

(3) 一般地, 把向量组的向量作为矩阵的行(或列), 得矩阵  $A_{m \times n}$ , 通过初等变换求出其秩  $r(A_{m \times n}) = r$ . 若  $r = m (< m)$ , 则  $A$  的行向量组线性无关(相关); 若  $r = n (< n)$ , 则  $A$  的列向量组线性无关(相关).

**【例 3.3】** 设  $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 3), \alpha_3 = (1, 3, t)$ ,

- (1) 问  $t$  为何值时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关;
- (2) 问  $t$  为何值时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;
- (3) 当线性相关时, 将  $\alpha_3$  表示为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的线性组合.

**【解】** 方法一: 用定义判别.

设有数  $k_1, k_2, k_3$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ , 即有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ k_1 + 3k_2 + tk_3 = 0. \end{cases}$$

此齐次方程组的系数行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t - 5$ .

- (1) 当  $t - 5 = 0$ , 即  $t = 5$  时, 方程有非零解, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关;
- (2) 当  $t - 5 \neq 0$ , 即  $t \neq 5$  时, 方程组仅有零解, 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;
- (3) 当  $t = 5$  时, 设  $\alpha_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$ , 可解得  $x_1 = -1, x_2 = 2$ , 于是  $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

**方法二:** 由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三个三维向量, 故直接计算其行列式  $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = t - 5$  可知:

- (1) 当  $t = 5$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关;
- (2) 当  $t \neq 5$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关;
- (3) 同方法一可得

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

方法三: 由于矩阵

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{bmatrix},$$

所以(1) 当  $t = 5$  时,  $r(A) = 2$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关; (2) 当  $t \neq 5$  时,  $r(A) = 3$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关; (3) 同方法一, 得  $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

**【例 3.4】** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 问当常数  $l, m$  满足什么条件时, 向量组  $l\alpha_2 - \alpha_1, m\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$  也线性无关.

**【解】** 若  $k_1(l\alpha_2 - \alpha_1) + k_2(m\alpha_3 - \alpha_2) + k_3(\alpha_1 - \alpha_3) = 0$ , 即

$$(-k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1l - k_2)\alpha_2 + (k_2m - k_3)\alpha_3 = 0,$$

$$\text{从而} \begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ lk_1 - k_2 = 0, \\ mk_2 - k_3 = 0. \end{cases} \text{又} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ l & -1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = -lm - 1, \text{当 } lm \neq -1 \text{ 时, 方程组有唯一零解,}$$

即向量组

$$l\alpha_2 - \alpha_1, m\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$$

也线性无关.

**【例 3.5】** 选择题.

- (1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是一组  $n$  维向量, 则下列正确的是
  - (A) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  不线性相关, 就一定线性无关.
  - (B) 如果存在  $s$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.
  - (C) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则  $\alpha_1$  可由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$  线性表示.
  - (D) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充要条件是  $\alpha_1$  不能由其余  $s-1$  个向量线性表示. 【    】
- (2)  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $3 \leq s \leq n$ ) 线性无关的充分必要条件是
  - (A) 存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$ .
  - (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量都线性无关.
  - (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示.
  - (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意一个向量都不能用其余向量线性表示. 【    】
- (3) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关的充要条件是
  - (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中有一零向量.
  - (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量的分量成比例.
  - (C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中有一个向量是其余向量的线性组合.
  - (D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意一个向量都是其余向量的线性组合. 【    】
- (4)  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分条件是
  - (A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均不是零向量.
  - (B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量的分量不成比例.
  - (C) 向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的个数  $s \leq n$ .

(D) 某向量  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且表示式唯一

【 】

(5) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则向量组

(A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$  线性无关.

(B)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关.

(C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关.

(D)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关.

【 】

(6) 设有任意两个  $n$  维向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , 若存在两组不全为零的数  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  和  $k_1, \dots, k_m$ , 使  $(\lambda_1 + k_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda_m + k_m)\alpha_m + (\lambda_1 - k_1)\beta_1 + \dots + (\lambda_m - k_m)\beta_m = 0$ , 则

(A)  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_m$  都线性相关.

(B)  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  和  $\beta_1, \dots, \beta_m$  都线性无关.

(C)  $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m, \alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_m - \beta_m$  线性无关.

(D)  $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m, \alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_m - \beta_m$  线性相关.

【 】

【解】(1) A, (2) D, (3) C, (4) D, (5) C, (6) D.

【分析】(1) 从线性相关和线性无关的定义知, 一组同维向量不是线性相关就一定是线性无关, 故选(A). 存在全为零的数  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ , 对任意向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  都成立, 并不能说明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关; 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则至少有一向量可以用其余向量线性表示, 但不能说刚好  $\alpha_1$  就可由  $\alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 比如,  $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (0, 0)$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关, 但  $\alpha_1$  不能由  $\alpha_2$  线性表示; 同上即知(D) 不成立, 故(B), (C), (D) 均不正确.

(2)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充要条件是其中任意一个向量都不能由其余向量线性表示, 说明(C) 不成立; 对于(A), 比如  $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (0, 0)$ , 存在不全为零的数 1, 1, 使得  $1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 = (1, 1) \neq 0$ , 但  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关, 故(A) 不成立; 部分无关, 整体不一定无关, 比如向量组  $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (1, 1), \alpha_3 = (0, 1)$ , 任意两个向量  $\alpha_1, \alpha_2; \alpha_1, \alpha_3; \alpha_2, \alpha_3$  都线性无关, 但  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关(向量个数大于维数), 故(B) 不成立, 只有(D) 为正确答案.

(3) (A) 和(B) 只是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关的充分条件而非必要条件; 对于(C), (D) 两个答案, 差别在于是有一个向量还是任意一个向量都是其余向量的线性组合, 此两条都是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关的充分条件, 但(D) 非必要, 故(C) 为正确选项.

(4) (A), (C) 显然错误. 对于(B), 比如  $\alpha_1 = (1, 1), \alpha_2 = (1, 2), \alpha_3 = (2, 1)$ , 其中任意两个向量不成比例, 但  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关(个数大于维数), 故(B) 也不成立, 只有(D) 是正确答案. 事实上, 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ , 又存在  $k'_1, k'_2, \dots, k'_s$ , 使得  $\beta = k'_1\alpha_1 + k'_2\alpha_2 + \dots + k'_s\alpha_s$ , 从而有  $\beta = (k_1 + k'_1)\alpha_1 + (k_2 + k'_2)\alpha_2 + \dots + (k_s + k'_s)\alpha_s$ , 这里至少有一个  $i (1 \leq i \leq s)$ , 使得  $k'_i \neq k_i + k'_i$ , 即  $\beta$  的表示式不唯一, 矛盾. 说明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关. 或者从方程组的观点看,  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s$  有解, 若秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ , 则解不唯一(表示式不唯一), 必有秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ , 即  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

(5) 由于  $(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$ ,

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0,$$

故(A),(B),(D) 向量组均线性相关,(C) 为正确答案.

事实上,设

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 - \alpha_1) = 0,$$

$$\text{即 } (k_1 - k_4)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 = 0,$$

$$\text{由于 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 线性无关, 故 } \begin{cases} k_1 - k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0, \\ k_3 + k_4 = 0. \end{cases}$$

解得  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , 即(C) 向量组线性无关.

$$(6) \text{ 由 } (\lambda_1 + k_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda_m + k_m)\alpha_m + (\lambda_1 - k_1)\beta_1 + \cdots + (\lambda_m - k_m)\beta_m = 0,$$

$$\text{整理得 } \lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + \lambda_m(\alpha_m + \beta_m) + k_1(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + k_m(\alpha_m - \beta_m) = 0,$$

因为  $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$  和  $k_1, \cdots, k_m$  不全为零, 根据定义知向量组  $\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_m + \beta_m$ ,

$\alpha_1 - \beta_1, \cdots, \alpha_m - \beta_m$  线性相关, 故(D) 为正确选项.

**注** 判定由线性无关向量组 I 线性表示的向量组 II 的线性相关性问题时, 可利用如下方法:

设 I:  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关, II:  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ , 且

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_{11}\alpha_1 + \alpha_{12}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{1m}\alpha_m, \\ \beta_2 = \alpha_{21}\alpha_1 + \alpha_{22}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{2m}\alpha_m, \\ \vdots \\ \beta_s = \alpha_{s1}\alpha_1 + \alpha_{s2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_{sm}\alpha_m, \end{cases}$$

$$\text{即 } [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{sm} \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]A.$$

则当  $r(A) = s$  时,  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  线性无关;  $r(A) < s$  时,  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  线性相关.

如本题中(5) 中的(A), 因为

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{而 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 所以 } r(A) < 4,$$

故  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$  线性相关

**【例 3.6】** 设  $a_1, a_2, \cdots, a_r$  ( $r \leq n$ ) 是互不相同的数,

$$\alpha_i = (1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{r-1}), (i = 1, 2, \cdots, r).$$



问:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  是否线性相关?

【解】 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_r \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & a_3^{r-1} & \cdots & a_r^{r-1} \end{bmatrix},$

因为  $|A| = \prod_{1 \leq j < i \leq r} (a_i - a_j) \neq 0$ , 所以  $r(A) = r$ ,

故向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关.

## 题型二 有关向量组线性相关性命题的证明

提示 思路之一: 定义法

(1) 令  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ , 其中  $k_1, k_2, \dots, k_s$  为常数;

(2) 将上式展开整理, 使之能直接利用题设条件, 判断  $k_1, k_2, \dots, k_s$  的取值情况, 或者对上式作某种变换, 再利用题设条件, 判断  $k_1, k_2, \dots, k_s$  的取值情况, 从而可知向量组的线性相关或无关.

思路之二: 将线性相关性的问题转化为齐次线性方程组有无非零解来分析.

【例 3.7】设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 作线性组合:  $\beta_1 = \alpha_1 + \mu_1\alpha_s, \beta_2 = \alpha_2 + \mu_2\alpha_s, \dots, \beta_{s-1} = \alpha_{s-1} + \mu_{s-1}\alpha_s$ , 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$  线性无关, 其中  $s \geq 2, \mu_i$  为任意实数.

【证】令  $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_{s-1}\beta_{s-1} = 0$ , 即

$$k_1(\alpha_1 + \mu_1\alpha_s) + k_2(\alpha_2 + \mu_2\alpha_s) + \cdots + k_{s-1}(\alpha_{s-1} + \mu_{s-1}\alpha_s) = 0,$$

$$\text{展开整理得 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + (k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \cdots + k_{s-1}\mu_{s-1})\alpha_s = 0,$$

由题设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{s-1} = k_1\mu_1 + k_2\mu_2 + \cdots + k_{s-1}\mu_{s-1} = 0,$$

故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$  线性无关.

【例 3.8】设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t (t > 2)$  线性无关, 令

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_t, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_t, \dots, \beta_t = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{t-1},$$

证明:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性无关.

【证】设存在  $t$  个常数  $k_1, k_2, \dots, k_t$ , 使得  $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = 0$ , 即

$$k_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_t) + k_2(\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_t) + \cdots + k_t(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{t-1}) = 0,$$

经整理, 得

$$(k_2 + k_3 + \cdots + k_t)\alpha_1 + (k_1 + k_3 + \cdots + k_t)\alpha_2 + \cdots + (k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-1})\alpha_t = 0,$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  线性无关,

$$\text{所以 } \begin{cases} k_2 + k_3 + \cdots + k_t = 0, & \text{①} \\ k_1 + k_3 + \cdots + k_t = 0, & \text{②} \\ \vdots & \vdots \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-1} = 0. & \text{④} \end{cases}$$

① + ② +  $\cdots$  + ④, 得  $(t-1)(k_1 + k_2 + \cdots + k_t) = 0$ ,

因为  $t > 2, t-1 \neq 0$ , 所以

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 0,$$

(t+1)

$$\textcircled{i+1} - \textcircled{1} \Rightarrow k_1 = 0,$$

$$\textcircled{i+1} - \textcircled{2} \Rightarrow k_2 = 0,$$

$$\vdots$$

$$\textcircled{i+1} \Rightarrow k_i = 0.$$

故  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$  线性无关.

**【例 3.9】** 设向量组  $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  能由向量组  $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示为

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

其中,  $K$  为  $r \times s$  矩阵, 且向量组  $A$  线性无关, 证明: 向量组  $B$  线性无关的充要条件是矩阵  $K$  的秩

$$r(K) = r.$$

**【证】** “ $\Leftarrow$ ”  $r(K) = r \Rightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性无关.

用反证法: 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性相关, 则存在不全为零的  $r$  个常数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ,

$$\text{使得 } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \text{ 即 } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) K \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

$$\text{又因为 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关, 设 } K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

于是  $k_1, k_2, \dots, k_r$  线性相关, 则  $r(K) \neq r$ , 与假设矛盾.

“ $\Rightarrow$ ”  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性无关  $\Rightarrow r(K) = r$ .

用反证法: 若  $r(K) \neq r$ , 则  $r$  个  $s$  维向量  $k_1, k_2, \dots, k_r$  线性相关. 于是存在  $r$  个不全为零的常数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , 使得

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) K \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

$\Rightarrow \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性相关, 与假设矛盾.

**【例 3.10】** 证明  $n$  维列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0,$

其中,  $\alpha_i^T$  表示列向量  $\alpha_i$  的转置,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**【证】** 令  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  ( $n$  阶方阵),

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ . 又

$$A^T A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \dots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \dots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \dots & \alpha_n^T \alpha_n \end{bmatrix},$$

$$|A^T A| = |A|^2 = D \Rightarrow |A| \neq 0 \text{ 与 } D \neq 0 \text{ 等价,}$$

所以  $D \neq 0$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充要条件.

**【例 3.11】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  为  $n-1$  个线性无关的  $n$  维列向量,  $\eta_1, \eta_2$  为两个不同的非零列向量, 它们与向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  正交, 证明:  $\eta_1, \eta_2$  线性相关.

**【证】** 由题设

$$\begin{cases} \alpha_1^T \eta_1 = 0 \\ \alpha_2^T \eta_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n-1}^T \eta_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_1^T \eta_2 = 0 \\ \alpha_2^T \eta_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n-1}^T \eta_2 = 0 \end{cases}$$

令  $A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \dots \\ \alpha_{n-1}^T \end{bmatrix}$  为  $(n-1) \times n$  阶矩阵, 于是  $A\eta_1 = 0, A\eta_2 = 0$ , 即  $\eta_1, \eta_2$  为  $Ax = 0$  的两个解

向量, 因为有两个不同的解, 所以秩小于等于  $n-1$ , 因为那  $n-1$  个向量线性无关, 所以秩大于等于  $n-1$ , 所以  $r(A) = n-1$ ,

由此可知  $Ax = 0$  的基础解系所含解向量个数  $n - (n-1) = 1$ , 又  $\eta_1, \eta_2$  为  $Ax = 0$  的两个不同的非零解, 故  $\eta_1, \eta_2$  线性相关.

**【例 3.12】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 即  $\beta_i = \sum_{j=1}^r c_{ij} \alpha_j, i = 1, 2, \dots, s$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关充要条件是  $C = (c_{ij})_{s \times r}$  的秩小于  $s$ .

**【证】** 设  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关, 于是存在  $s$  个不全为 0 的常数  $x_1, x_2, \dots, x_s$  使的

$$x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \dots + x_s \beta_s = 0, \text{ 将 } \beta_i = \sum_{j=1}^r c_{ij} \alpha_j \text{ 代入}$$

$$(c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{s1}x_s)\alpha_1 + (c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{s2}x_s)\alpha_2 + \dots + (c_{1r}x_1 + c_{2r}x_2 + \dots + c_{sr}x_s)\alpha_r = 0$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 所以

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{s1}x_s = 0 \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{s2}x_s = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c_{1r}x_1 + c_{2r}x_2 + \dots + c_{sr}x_s = 0 \end{cases}$$

方程组有非零解  $\Leftrightarrow$  系数矩阵  $C = (c_{ij})_{s \times r}$  的秩小于  $s$ , 即

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关充要条件是  $C = (c_{ij})_{s \times r}$  的秩小于  $s$

**【例 3.13】** 试证: 若向量  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 则表示法唯一  $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

**【证】**  $\Rightarrow$  (必要性)

用反证法: 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则有不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0,$$

又  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 设表示式为

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s = \beta,$$

上述两方程相加,得 $(k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_s + l_s)\alpha_s = \beta$ .

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为“0”,故 $k_1 + l_1, k_2 + l_2, \cdots, k_s + l_s$ 与 $l_1, l_2, \cdots, l_s$ 是两组不同的数,即 $\beta$ 有两种不同的线性表示法,与题设 $\beta$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示的表示法唯一矛盾.

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

←(充分性)  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  线性无关  $\Rightarrow \beta$  用  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  表示表示法一.

用反证法: 设 $\beta$ 有两种表示式

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s, \quad \beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s,$$

$$\Rightarrow (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_s - l_s)\alpha_s = 0,$$

因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,所以 $k_i = l_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ .

【例 3.14】证明: 矩阵 $A$ 的列向量线性无关  $\Leftrightarrow$  由 $Ax = 0$ , 必有 $x = 0$ .

【证】设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , 则

$$Ax = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,所以 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ .

即 $x = 0$ , 反之也成立.

【例 3.15】设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$

分别为  $\alpha_1 = (a_{11}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{1j}, \cdots, a_{1n}),$

$\alpha_2 = (a_{21}, \cdots, a_{2i}, \cdots, a_{2j}, \cdots, a_{2n}),$

$\vdots$

$\alpha_s = (a_{s1}, \cdots, a_{si}, \cdots, a_{sj}, \cdots, a_{sn}),$

$\beta_1 = (a_{11}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{1j} + ka_{1i}, \cdots, a_{1n}),$

$\beta_2 = (a_{21}, \cdots, a_{2i}, \cdots, a_{2j} + ka_{2i}, \cdots, a_{2n}),$

$\vdots$

$\beta_s = (a_{s1}, \cdots, a_{si}, \cdots, a_{sj} + ka_{si}, \cdots, a_{sn}),$

试证:  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  线性无关  $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  线性无关.

提示: 如果题设中各向量写成它的分量形式, 则有关命题常借助于线性方程组来证明.

【证】 $\Rightarrow$ (必要性)

令

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0, \quad (4)$$

即

$$\begin{cases} k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_sa_{s1} = 0, \\ \vdots \\ k_1a_{1i} + k_2a_{2i} + \cdots + k_sa_{si} = 0, \\ \vdots \\ k_1(a_{1j} + ka_{1i}) + \cdots + k_s(a_{sj} + ka_{si}) = 0, \\ \vdots \\ k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_sa_{sn} = 0. \end{cases}$$

因为  $k_1(a_{1j} + ka_{1i}) + k_2(a_{2j} + ka_{2i}) + \cdots + k_s(a_{sj} + ka_{si})$   
 $= (k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \cdots + k_sa_{sj}) + k(k_1a_{1i} + k_2a_{2i} + \cdots + k_sa_{si}) = 0,$   
 所以  $k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \cdots + k_sa_{sj} = 0.$

$$\text{于是} \quad \begin{cases} k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_sa_{s1} = 0, \\ \vdots \\ k_1a_{1i} + k_2a_{2i} + \cdots + k_sa_{si} = 0, \\ \vdots \\ k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \cdots + k_sa_{sj} = 0, \\ \vdots \\ k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_sa_{sn} = 0. \end{cases}$$

即  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$

⑤

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  线性无关, 所以  $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$

故  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  线性无关.

$\Leftarrow$  (充分性)

由 ④, ⑤ 和两组方程组及  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$  线性无关知, 必有  $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ , 由最后一个方程组, 知  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$  线性无关.

**【例 3.16】** 设  $A$  是  $n \times m$  矩阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 其中  $n < m$ ,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 若  $AB = E$ , 证明:  $B$  的列向量组线性无关.

**【证】** 方法一: 用定义证明.

设  $B = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$ , 其中  $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  是  $B$  的第  $i$  列向量, 若

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = 0,$$

即

$$[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Bx = 0,$$

其中,  $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ , 上式两边左乘  $A$ , 则得

$$ABx = 0,$$

即  $Ex = 0$ , 亦即  $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = 0$ , 说明  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ , 所以  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$  线性无关, 即  $B$  的列向量组线性无关.

方法二: 利用矩阵的秩证明.

因为秩  $(B) \leq \min\{m, n\} \leq n$ , 又秩  $(B) \geq \text{秩}(AB) = \text{秩}(E) = n$ , 故秩  $(B) = n$ , 所以  $B$  的列向量组线性无关.

方法三: 反证法.

设  $B$  的列向量组线性相关, 即秩  $(B) < n$ , 于是有秩  $(E) = \text{秩}(AB) \leq \text{秩}(B) < n$ , 即  $n = \text{秩}(E) < n$ , 矛盾. 说明  $B$  的列向量组线性无关.

**【例 3.17】** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 向量  $\beta$  不是方程组  $Ax = 0$  的解, 即  $A\beta \neq 0$ . 试证明: 向量组  $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$  线性无关.

**【证】** 用定义法证明.

设有一组数  $k, k_1, k_2, \cdots, k_t$ , 使得

$$k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + \cdots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0,$$

$$\text{即} \quad (k + \sum_{i=1}^t k_i) \beta = \sum_{i=1}^t (-k_i) \alpha_i, \quad (6)$$

$$\text{上式两边同时左乘矩阵 } A, \text{ 有} \quad (k + \sum_{i=1}^t k_i) A\beta = \sum_{i=1}^t (-k_i) A\alpha_i = 0,$$

$$\text{因为 } A\beta \neq 0, \text{ 故} \quad k + \sum_{i=1}^t k_i = 0, \quad (7)$$

$$\text{从而, 由 (6) 式得} \quad \sum_{i=1}^t (-k_i) \alpha_i = 0.$$

由于向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  是基础解系, 所以

$$k_1 = k_2 = \dots = k_t = 0,$$

$$\text{因而由 (7) 式得} \quad k = 0.$$

因此, 向量组  $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t$  线性无关.

**【例 3.18】** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  为一个向量组, 且  $\alpha_1 \neq 0$ , 每一个向量  $\alpha_i (i > 1)$ , 都不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$  线性表示, 求证:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

**【证】** 用定义证明.

假设存在一组数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0,$$

对  $k_1, k_2, \dots, k_m$  从右向左看, 若存在第一个不等于零的数, 可设为

$$k_i \neq 0, k_{i+1} = 0, \dots, k_m = 0,$$

因为  $\alpha_1 \neq 0$ , 所以  $i \neq 1$ , 从而

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_i \alpha_i = 0,$$

$$\text{即} \quad \alpha_i = -\frac{1}{k_i} (k_1 \alpha_1 + \dots + k_{i-1} \alpha_{i-1}).$$

$\alpha_i$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$  线性表示, 与题设矛盾, 因此  $k_1, k_2, \dots, k_m$  必须全为零, 说明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

**【例 3.19】** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 向量  $\beta_1$  可用它们线性表示, 向量  $\beta_2$  不能用它们线性表示, 证明向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \lambda \beta_1 + \beta_2 (\lambda \text{ 为常数})$  线性无关.

**【证】** 定义法证明.

设有实数  $k_1, k_2, \dots, k_m, k$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m + k(\lambda \beta_1 + \beta_2) = 0,$$

则  $k = 0$ , 否则

$$\lambda \beta_1 + \beta_2 = -\frac{k_1}{k} \alpha_1 - \frac{k_2}{k} \alpha_2 - \dots - \frac{k_m}{k} \alpha_m, \quad (8)$$

又向量  $\beta_1$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示, 故存在  $l_1, l_2, \dots, l_m$  使得

$$\beta_1 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \dots + l_m \alpha_m, \quad (9)$$

由 (8), (9) 式得

$$\beta_2 = (-\lambda l_1 - \frac{k_1}{k}) \alpha_1 + (-\lambda l_2 - \frac{k_2}{k}) \alpha_2 + \dots + (-\lambda l_m - \frac{k_m}{k}) \alpha_m,$$

这与向量  $\beta_2$  不能用  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示矛盾, 于是有

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0.$$

又  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 故  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ , 根据定义知  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \lambda \beta_1 + \beta_2$  线性无关.

## 题型三 判定一个向量是否可由一组向量线性表示

**提示** 给定一个向量  $\alpha$  及向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ , 判断  $\alpha$  是否可由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出.

(1) 令 
$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s.$$

(2) 由向量相等关系将上式写成方程组:

$$\begin{cases} b_{11}k_1 + b_{21}k_2 + \dots + b_{s1}k_s = a_1, \\ b_{12}k_1 + b_{22}k_2 + \dots + b_{s2}k_s = a_2, \\ \vdots \\ b_{1n}k_1 + b_{2n}k_2 + \dots + b_{sn}k_s = a_n. \end{cases}$$

(3) 若方程组无解, 则  $\alpha$  不能由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  表出; 若方程组有解, 则  $\alpha$  为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的线性组合.

**【例 3.20】** 设  $\alpha = (0, 4, 2, 5)$ ,  $\beta_1 = (1, 2, 3, 1)$ ,  $\beta_2 = (2, 3, 1, 2)$ ,  $\beta_3 = (3, 1, 2, -2)$ , 问  $\alpha$  是否可表示成  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的线性组合?

**【解】** 令  $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3$ ,

即

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 = 4, \\ 3k_1 + k_2 + 2k_3 = 2, \\ k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 5. \end{cases}$$

得  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = -1$ , 故  $\alpha = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3$ .

**注** 可将以上作法简化为对矩阵的行作初等变换, 即设矩阵  $A$  的列向量依次为  $A = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ , 矩阵  $A$  的增广矩阵  $\bar{A} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \alpha)$ .

$\bar{A} \xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{对行作}} \text{最简形}$ , 然后分析定夺.

**【例 3.21】** 试把  $\alpha = (1, 2, 1, 1)$  表成  $\beta_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\beta_2 = (1, 1, -1, -1)$ ,  $\beta_3 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\beta_4 = (1, -1, -1, 1)$  的线性组合.

**【解】**

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{故 } \alpha = \frac{5}{4}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_2 - \frac{1}{4}\beta_3 - \frac{1}{4}\beta_4.$$

【例 3.22】已知  $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)$ ,  $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$ ,  $\beta = (1, 1, b+3, 5)$ . 试求:

(1)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性组合;

(2)  $a, b$  为何值时,  $\beta$  有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的唯一线性表示式, 并写出该表示式.

【解】设  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$ , 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1, \\ k_2 - k_3 + 2k_4 = 1, \\ 2k_1 + 3k_2 + (a+2)k_3 + 4k_4 = b+3, \\ 3k_1 + 5k_2 + k_3 + (a+8)k_4 = 5. \end{cases}$$

$$\text{其增广矩阵 } \bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right],$$

当  $a = -1, b \neq 0$  时,  $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ , 可知方程组无解, 故  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性组合;

当  $a \neq -1$  时, 表示式唯一, 且

$$\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4.$$

#### 题型四 有关向量组线性表示命题的证明

提示 思路之一: 定义法.

要证  $\beta$  可用向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 只要证表达式  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + k_{s+1}\beta = 0$  中  $k_{s+1} \neq 0$  即可. 或者证明下列方程组有解:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{s1}x_s = b_1, \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{sn}x_s = b_n. \end{cases}$$

$$\text{其中 } \alpha_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

思路之二: 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  线性相关,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  唯一线性表示.

【例 3.23】设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$  都是  $n$  维向量,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 但  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表示, 证明:  $\alpha_r$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$  线性表示.



【证】因为  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 设

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{r-1} \alpha_{r-1} + k_r \alpha_r,$$

又因为  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表示, 则  $k_r \neq 0$ , 所以

$$\alpha_r = \frac{1}{k_r} (\beta - k_1 \alpha_1 - \dots - k_{r-1} \alpha_{r-1}),$$

即  $\alpha_r$  可由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$  线性表示.

【例 3.24】设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1} (m \geq 3)$  线性相关, 向量组  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 试讨论

(1)  $\alpha_1$  能否由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示?

(2)  $\alpha_m$  能否由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示?

【解】(1) 方法一:  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示. 因  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$  线性无关, 所以其部分向量组  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$  也线性无关.

又由假设,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性相关, 因此,  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示.

方法二: 因为已知  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性相关, 故存在不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{m-1} \alpha_{m-1} = 0.$$

其中  $k_1 \neq 0$ , 因为若  $k_1 = 0$ , 则  $k_2, k_3, \dots, k_{m-1}$  不全为零, 使

$$k_2 \alpha_2 + \dots + k_{m-1} \alpha_{m-1} = 0$$

成立, 从而  $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性相关, 这和已知矛盾, 故  $k_1 \neq 0$ ,

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2 - \dots - \frac{k_{m-1}}{k_1} \alpha_{m-1},$$

故  $\alpha_1$  可以由  $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表出.

(2)  $\alpha_m$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示.

用反证法证: 设  $\alpha_m$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示, 即有实数  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ , 使得

$$\alpha_m = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{m-1} \alpha_{m-1},$$

又由(1),  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示, 所以有  $l_2, \dots, l_{m-1}$ , 使

$$\alpha_1 = l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + \dots + l_{m-1} \alpha_{m-1},$$

于是  $\alpha_m = k_1 (l_2 \alpha_2 + \dots + l_{m-1} \alpha_{m-1}) + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{m-1} \alpha_{m-1}$

$$= (k_1 l_2 + k_2) \alpha_2 + (k_1 l_3 + k_3) \alpha_3 + \dots + (k_1 l_{m-1} + k_{m-1}) \alpha_{m-1},$$

即  $\alpha_m$  能由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示, 这与  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$  线性无关的假设矛盾, 故  $\alpha_m$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  线性表示.

### 题型五 求向量组的极大线性无关组

**提示** 思路之一: 录选法.

(1) 在向量组中任取一个非零向量作为  $a_{i1}$ ;

(2) 取一个与  $a_{i1}$  的对应分量不成比例的作为  $a_{i2}$ ;

(3) 取一个不能由  $a_{i1}, a_{i2}$  表出的作为  $a_{i3}$ , 继续做下去便可求出向量组的极大无关组.

该法适用于向量组中向量个数较少的情形.

**思路之二: 行初等变换法.**

(1) 将向量组中的各向量作为矩阵的列;

(2) 对上述矩阵作初等行变换;

(3) 变成阶梯形矩阵后, 每一阶梯上取一列, 对应的向量所构成的向量组即为极大线性

无关组.

**【例 3.25】** 考虑向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(1) 求向量组的秩; (2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量分别用该极大线性无关组表示.

**【分析】** 根据矩阵的初等变换不改变矩阵的秩, 利用行初等变换将以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  为列向量的矩阵化为阶梯形, 然后在每一个阶梯中选取一个“元素”即构成此向量组的一个极大无关组, 同时求得向量组的秩. 当阶梯形化为最简时, 还可直接得到其余向量用此极大无关组的线性表示式.

**【解】** (1) 以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  为列构成一矩阵, 然后对其作初等行变换 (且只能作初等行变换).

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \alpha_1' \quad \alpha_2' \quad \alpha_3' \quad \alpha_4' \quad \alpha_5' \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1, \end{array}$$

显然  $A_1$  的秩为 3, 故  $A$  的秩也为 3.

(2) 在每一个阶梯中选一“元素” (注意  $\alpha_2', \alpha_5'$  属于同一阶梯) 分别为  $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$  (不唯一, 比如  $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_4'; \alpha_1', \alpha_5', \alpha_3'; \alpha_1', \alpha_5', \alpha_4'$  均可), 从而对应向量组  $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$  构成  $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4', \alpha_5'$  的极大线性无关组.

进一步把  $A_1$  化为最简形 ( $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$  对应的列除阶梯所在位置元素为 1 外, 其余全部为零), 对  $A_1$  作初等行变换

$$\begin{array}{c} \alpha_1'' \quad \alpha_2'' \quad \alpha_3'' \quad \alpha_4'' \quad \alpha_5'' \\ A \rightarrow A_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{array}$$

不难看出

$$\alpha_4'' = \frac{2}{3}\alpha_1'' + \frac{1}{3}\alpha_2'' + \alpha_3'',$$

$$\alpha_5'' = -\frac{1}{3}\alpha_1'' + \frac{1}{3}\alpha_2'' + 0 \cdot \alpha_3'',$$

从而原向量组有

$$\alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3.$$

(1) 极大线性无关组不唯一,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \alpha_1, \alpha_5, \alpha_3; \alpha_1, \alpha_5, \alpha_4$  都是极大线性无关组.

(2) 当  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  为行向量时, 这时应构造  $A = [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T]$ , 仍只能用行初等变换, 这一点必须特别注意.

(3) 在把  $A$  化为阶梯形过程中,  $\alpha_2', \alpha_5'$  是属于同一阶梯的, 不能认为  $\alpha_3', \alpha_4', \alpha_5'$  属于同一阶梯, 从而得出  $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_5'$  对应的向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  也是极大线性无关组的结论是错误的. 事实上,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  线性相关. 这里关键是  $\alpha_5'$  的第三个元素为零, 并不属于第三个阶梯, 为了避免类似的错误, 也可考虑交换两列 (仅限于交换列), 但应注意在矩阵上方标示的  $\alpha_3'$  与  $\alpha_5'$  也必须同时交换, 这时有

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' & \alpha_5' \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

再在每一阶梯中选取一“元素”构成极大线性无关组就不会出现错误了.

(4) 本题由  $\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3'', \alpha_4'', \alpha_5''$  的线性关系推导出  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  也有相同的线性关系的依据是: 行初等变换不改变列向量之间的线性组合, 若列向量组作列初等变换或行向量组作行初等变换, 则列(行)向量组保持相同的线性关系的结果将不再成立.

### 题型六 有关向量组或矩阵秩的计算与证明

**提示** (1) 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则秩  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ .

(2) 利用初等变换求矩阵的秩.

(3) 利用矩阵秩的有关关系式求秩.

**【例 3.26】** 已知向量组 (I)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ; (II)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ; (III)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ . 如果各向量组的秩分别为  $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3, r(\text{III}) = 4$ . 证明: 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$  的秩为 4.

**【证】** 要证  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$  的秩为 4, 只要证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$  线性无关即可.

因  $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 故存在数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  使

$$\alpha_4 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3.$$

设有数  $k_1, k_2, k_3, k_4$ , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0,$$

将  $\alpha_4$  代入上式, 化简得

$$(k_1 - \lambda_1 k_4)\alpha_1 + (k_2 - \lambda_2 k_4)\alpha_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0,$$

由  $r(\text{III}) = 4$  知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 - \lambda_1 k_4 = 0, \\ k_2 - \lambda_2 k_4 = 0, \\ k_3 - \lambda_3 k_4 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases}$$

解之得  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$  线性无关, 即其秩为 4.

**【例 3.27】** 设向量组 (I):  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的秩为  $r (r > 1)$ , 证明向量组 (II):  $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m, \dots, \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1}$  的秩也为  $r$ .

**【分析】** 两组向量秩相同的充分条件是两组向量等价.

**【证】** 显然, 向量组 (II) 可由向量组 (I) 线性表示. 下面证明向量组 (I) 也可由向量组 (II) 线性表示.

将  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  的表示式相加, 得

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = (m-1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m),$$

故有

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = \frac{1}{m-1}(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m),$$

由此可得  $\alpha_i = \frac{1}{m-1}(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m) - \beta_i, (i = 1, 2, \dots, m)$ .

这表明向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示, 从而 (I) 与 (II) 是等价向量组, 其秩相同, 即向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  的秩也为  $r$ .

**【例 3.28】** 设

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}, a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n), \text{求秩}(A).$$

**【解】** 方法一: 用子式计算秩(A).

$$\text{因为 } A \text{ 的任一二阶子式 } \begin{vmatrix} a_i b_k & a_i b_l \\ a_j b_k & a_j b_l \end{vmatrix} = 0,$$

且  $A$  为非零矩阵, 故秩(A)  $\geq 1$ , 从而有秩(A) = 1.

方法二: 记  $A$  的列向量组为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 由  $\alpha_i = b_i \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 可见  $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

$\alpha_n$  中任意两个向量对应元素成比例, 即任意两个向量线性相关, 故秩(A)  $< 2$ , 但  $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 即为非零向量, 故秩(A) = 1.

方法三: 记  $G = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, H = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 则  $A = GH$ , 因为秩(A)  $\leq \min\{\text{秩}(G), \text{秩}(H)\} = 1$ , 又  $A$  为非零矩阵, 秩(A)  $\geq 1$ , 从而秩(A) = 1.

**【例 3.29】** 设  $A, B$  为两个  $n$  阶矩阵, 证明

$$\text{秩}(A+B) \leq \text{秩}(A) + \text{秩}(B).$$

**【分析】** 只要证明  $A+B$  的列向量组可以由  $A$  和  $B$  的列向量组线性表示即可.

**【证】** 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ,

$A+B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n] = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  分别为  $A, B$  的列向量组.

不妨设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r \leq n)$  为  $A$  的列向量组的极大线性无关组,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s (s \leq n)$  为  $B$  的列向量组的极大线性无关组, 显然,  $r_1, r_2, \dots, r_n$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示, 从而它也可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示, 所以向量组  $r_1, r_2, \dots, r_n$  的秩不会超

过向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的秩, 即

$$\text{秩}(A+B) \leq r+s = \text{秩}(A) + \text{秩}(B).$$

**【例 3.30】** 设  $A^*$  是  $n(n \geq 2)$  阶方阵  $A$  的伴随矩阵, 证明

$$(1) \text{秩}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{秩}(A) = n, \\ 1, & \text{秩}(A) = n-1, \\ 0, & \text{秩}(A) < n-1. \end{cases}$$

$$(2) |A^*| = |A|^{n-1}.$$

**【证】** (1)  $1^\circ$  已知  $\text{秩}(A) = n$ , 只要证明  $A^*$  是可逆矩阵, 即得  $\text{秩}(A^*) = n$ .

当  $\text{秩}(A) = n$  时,  $A$  可逆, 有  $|A| \neq 0$ , 由  $AA^* = |A|E$  知  $A^*$  可逆, 所以  $\text{秩}(A^*) = n$ .

$2^\circ$  已知  $\text{秩}(A) = n-1$ , 要证  $\text{秩}(A^*) = 1$ .

因为  $\text{秩}(A) = n-1$ , 有  $|A| = 0$ ,  $AA^* = |A|E = 0$ , 根据前面内容知,  $r(A) + r(A^*) \leq n$ , 从而  $r(A^*) \leq n - r(A) = 1$ . 又  $\text{秩}(A) = n-1$ , 即矩阵  $A$  至少有一个  $n-1$  阶子式不等于零, 那么矩阵  $A^*$  中至少有一个元素非零, 所以  $\text{秩}(A^*) \geq 1$ , 由此推知  $\text{秩}(A^*) = 1$ .

$3^\circ$  已知  $\text{秩}(A) < n-1$  时, 证明  $\text{秩}(A^*) = 0$ .

由  $\text{秩}(A) < n-1$  知  $A$  的所有  $n-1$  阶子式全为零,  $A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 故  $A^* = 0$ , 所以  $\text{秩}(A^*) = 0$ . 综上所述, 有

$$\text{秩}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{秩}(A) = n, \\ 1, & \text{秩}(A) = n-1, \\ 0, & \text{秩}(A) < n-1. \end{cases}$$

(2) 考虑  $A$  可逆与不可逆两种情形.

$1^\circ$  当  $A$  可逆时,  $|A| \neq 0$ , 由  $AA^* = |A|E$ , 得

$$|A||A^*| = ||A|E| = |A|^n,$$

所以  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

$2^\circ$   $A$  不可逆时, 由 (1) 知,  $\text{秩}(A) \leq n-1$ ,  $\text{秩}(A^*) \leq 1$ .

故  $|A^*| = 0$ , 即  $|A^*| = |A|^{n-1}$  恒成立.

**【例 3.31】** 设三阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ , 试求  $\text{秩}(A)$ .

**【分析】** 矩阵  $A$  含有参数  $a$ , 因此其秩一般随参数  $a$  的变化而变化, 讨论其秩主要从两点着手: 矩阵秩的行列式定义和初等变换不改变矩阵的秩.

**【解】** 方法一: 直接从矩阵秩的行列式定义出发讨论. 由于

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2,$$

故  $1^\circ$  当  $a \neq 1$  且  $a \neq -2$  时,  $|A| \neq 0$ ,  $\text{秩}(A) = 3$ ;

$2^\circ$  当  $a = 1$  时,  $|A| = 0$ , 且  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 显然  $\text{秩}(A) = 1$ ;

3° 当  $a = -2$  时,  $|A| = 0$ , 且  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , 这时有二阶子式  $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ ,

因此秩  $(A) = 2$ .

方法二: 利用初等变换求秩.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -(a-1) \\ 0 & -(a-1) & 1-a^2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -(a-1) \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

于是由初等变换不改变矩阵的秩知

1° 当  $a \neq 1$  且  $a \neq -2$  时, 秩  $(A) = 3$ ;

2° 当  $a = 1$  时, 秩  $(A) = 1$ ;

3° 当  $a = -2$  时, 秩  $(A) = 2$ .

【例 3.32】选择题.

- (1) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ , 则
- (A) 必定  $r < s$ .
  - (B) 向量组中任意小于  $r$  个向量的部分组线性无关.
  - (C) 向量组中任意  $r$  个向量线性无关.
  - (D) 向量组中任意  $r+1$  个向量必定线性相关. 【   】
- (2) 设向量  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s (s > 1)$ , 而  $\beta_1 = \alpha - \alpha_1, \beta_2 = \alpha - \alpha_2, \dots, \beta_s = \alpha - \alpha_s$ , 则
- (A) 秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{秩}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ .
  - (B) 秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) > \text{秩}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ .
  - (C) 秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < \text{秩}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ .
  - (D) 不能确定秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  与秩  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$  的大小关系. 【   】
- (3) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  为两个  $n$  维向量组, 且秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{秩}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ , 则
- (A) 两个向量组等价, 即可相互线性表示.
  - (B) 秩  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t) = r$ .
  - (C) 当  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性表示时,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  也可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示.
  - (D) 当  $s = t$  时, 两向量组等价. 【   】

【解】(1) D, (2) A, (3) C.

【分析】(1) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ , 说明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性无关部分组所包含向量的个数不超过  $r$ , 即任意  $r+1$  个向量必定线性相关, 故 (D) 成立. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则有  $r = s$ , (A) 不成立; 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩为  $r$ , 只要求存在一含  $r$  个线性无关向量的部分组, 并不要求任意  $r$  个向量线性无关, 更不要求任意小于  $r$  个向量的

部分组都线性无关,故(B),(C)不成立.

(2) 显然  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 又  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s = s\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s) = (s-1)\alpha$ , 即  $\alpha = \frac{1}{s-1}(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s)$ ,

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad \alpha_1 &= \alpha - \beta_1 = \frac{1}{s-1}(\beta_2 + \dots + \beta_s) - \beta_1, \\ \alpha_2 &= \alpha - \beta_2 = \frac{1}{s-1}(\beta_1 + \dots + \beta_s) - \beta_2, \\ &\vdots \\ \alpha_s &= \alpha - \beta_s = \frac{1}{s-1}(\beta_1 + \dots + \beta_s) - \beta_s. \end{aligned}$$

即  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可以由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示, 因此,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  等价, 故秩  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \text{秩}(\beta_1, \dots, \beta_s)$ , (A) 为正确选项.

(3) 若令  $\alpha_1 = (1, 0), \beta_1 = (0, 1)$ , 则(A),(B),(D)显然不成立, 只有(C)为正确答案.

### 题型七 与向量空间有关的命题

【例 3.33】设  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 求  $\alpha_2, \alpha_3$ , 使  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  相互正交.

【解】设所求向量为  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ , 因为正交, 所以  $x^T \alpha_1 = 0$ .

即  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , 亦即  $x_1 = -x_2 - x_3$ . 取  $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

$$\alpha_2 = b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = b_2 - \frac{(b_2, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  相互正交.

【例 3.34】设  $R^3$  的两组基为: (1)  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ ; (2)  $\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \beta_3 = (1, 2, 0)^T$ , 求  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡阵  $Q$ , 并求  $\zeta = (-1, 2, 1)^T$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标.

【提示】 $B = AQ \Rightarrow Q = A^{-1}B, (A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$ .

【解】(1) 令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\text{则} \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right]$$

故 过渡矩阵  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ .

$$(2) [\beta_1, \beta_2, \beta_3 | \zeta] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right], \text{故坐标应为} \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

【例 3.35】已知 (I)  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, (II)  $\beta_1, \beta_2$  线性无关, 且  $\alpha_i, \beta_j (i=1, 2; j=1, 2)$  相互正交, 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  线性无关.

【证】设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 = 0$ , ⑩

⑩ 式两边和  $\alpha_1$  及  $\alpha_2$  作内积, 且利用  $\alpha_i, \beta_j$  的正交性, 得

$$\begin{cases} k_1(\alpha_1, \alpha_1) + k_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ k_1(\alpha_2, \alpha_1) + k_2(\alpha_2, \alpha_2) = 0. \end{cases} \quad ⑪$$

因  $\begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) \end{vmatrix} = (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2) - (\alpha_1, \alpha_2)^2.$

由柯西不等式及  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关知

$$(\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2) - (\alpha_1, \alpha_2)^2 > 0,$$

故方程组 ⑪ 只有唯一零解, 从而得  $k_1 = k_2 = 0$ .

同理可证  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . 故得证  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  线性无关.

【例 3.36】设  $A = (E_n - 2\alpha\alpha^T)$ , 其中  $E_n$  是  $n$  阶单位阵,  $\alpha$  是  $n$  维单位列向量, 证明: 对任一  $n$  维列向量  $\beta$ , 均有  $|A\beta| = |\beta|$ .

【分析】直接利用内积计算向量  $\beta$  及  $A\beta$  的模, 证明其相等即可.

【证】  $|A\beta| = \sqrt{(A\beta, A\beta)} = \sqrt{(A\beta)^T A\beta} = \sqrt{\beta^T A^T A\beta},$

因为  $A^T A = [E_n - 2\alpha\alpha^T]^T [E_n - 2\alpha\alpha^T] = (E_n - 2\alpha\alpha^T)(E_n - 2\alpha\alpha^T)$   
 $= E_n - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha(\alpha^T \alpha)\alpha^T = E_n - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T = E_n,$

故得证  $|A\beta| = \sqrt{\beta^T A^T A\beta} = \sqrt{\beta^T \beta} = |\beta|.$

【例 3.37】设  $B$  是秩为 2 的  $5 \times 4$  矩阵,  $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T, \alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$  是齐次线性方程组  $Bx = 0$  的解向量, 求  $Bx = 0$  的解空间的一个标准正交基.

【解】因为秩  $r(B) = 2$ , 所以解空间的维数是  $n - r(B) = 4 - 2 = 2$ .

又因  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 故  $\alpha_1, \alpha_2$  是解空间的一组基. 令  $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T,$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

再单位化得  $\eta = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{39}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix},$

即为解空间的一个标准正交基.

注  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3$  也可作为解空间的一组基, 因此本题答案不唯一.



## 第 3 节 思维定势与综合题解析

## 一、思维定势

**思维定势** 若要证明一组向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 先考虑用定义.

**【例 3.38】** 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 向量  $\beta$  不是方程组  $Ax = 0$  的解, 即  $A\beta \neq 0$ . 试证明: 向量组  $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_s$  线性无关.

**【证】** 用定义法证明.

设有一组数  $k_0, k_1, \dots, k_s$ , 使得

$$k_0\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + \dots + k_s(\beta + \alpha_s) = 0,$$

即

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_s)\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

上式两边同时左乘矩阵  $A$ , 有

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_s)A\beta + k_1A\alpha_1 + \dots + k_sA\alpha_s = 0.$$

因为  $A\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, s; A\beta \neq 0$ . 故

$$k_0 + k_1 + \dots + k_s = 0,$$

从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

又  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为  $Ax = 0$  的基础解系, 必线性无关, 故

$$k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0,$$

从而得  $k_0 = 0$ .

由定义知  $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_s$  线性无关.

## 二、综合题解析

**【例 3.39】** 设  $A$  是  $n$  阶正定矩阵,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是非零的  $n$  维列向量, 且  $\alpha_i^T A \alpha_j = 0 (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$ , 证明:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

**【证】** 设存在常数  $k_1, k_2, k_3$ , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

将上式两边左乘  $\alpha_1^T A$ , 得

$$k_1\alpha_1^T A \alpha_1 + k_2\alpha_1^T A \alpha_2 + k_3\alpha_1^T A \alpha_3 = 0,$$

由题设知后两项为零. 于是  $k_1\alpha_1^T A \alpha_1 = 0$ , 由于  $A$  正定,  $\alpha_1 \neq 0$ , 知  $\alpha_1^T A \alpha_1 > 0$ , 从而  $k_1 = 0$ .

同理可证  $k_2 = k_3 = 0$ . 故  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

**【例 3.40】** 设 4 维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , 令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , 且方程组  $Ax = 0$  的通解为  $x = k(1, 0, 1, 0)^T$ . 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的极大无关组.

**【解】** 方程组  $Ax = 0$  的通解为  $x = k(1, 0, 1, 0)^T$ , 即  $(1, 0, 1, 0)^T$  为  $Ax = 0$  的基础解系, 所以  $r(A) = 3$ . 即向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的极大无关组包含 3 个向量.

又  $A(1, 0, 1, 0)^T = 0$ , 即  $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ ,

所以  $\alpha_1, \alpha_3$  线性相关, 极大无关组不能同时包含  $\alpha_1, \alpha_3$ .

极大无关组只能是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  或  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

令  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_4\alpha_4 = 0$ , 即  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + 0\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ ,

所以  $(k_1, k_2, 0, k_4)^T$  是  $Ax = 0$  的解, 于是存在常数  $C$  使  $(k_1, k_2, 0, k_4)^T = C(1, 0, 1, 0)^T$ ,

所以  $k_2 = k_4 = 0$ , 即  $k_1\alpha_1 = 0$ , 又  $\alpha_1 \neq 0$  [如  $\alpha_1 = 0$ , 则  $\alpha_3 = 0, r(A) \leq 2$ ],

所以  $k_1 = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  线性无关, 又  $r(A) = 3$ , 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的一个极大无关组. 同理可得,  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  也是极大无关组.

**注** 求向量组的秩可以通过求其所构成的矩阵的秩来完成.

**【例 3.41】** 设  $A$  为三阶矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是  $A$  的三个不同的特征值, 对应的特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , 令

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

(1) 证明:  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关.

(2) 若  $A^3\beta = A\beta$ , 求秩  $r(A - E)$  及行列式  $|A + 2E|$ .

**【证】** (1) 设  $k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = 0$ ,

①

由题设  $A\alpha_i = \alpha_i (i = 1, 2, 3)$ , 于是

$$A\beta = A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \quad ②$$

$$A^2\beta = A^2\alpha_1 + A^2\alpha_2 + A^2\alpha_3 = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3, \quad ③$$

将 ②, ③ 代入 ① 式整理得

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\alpha_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\alpha_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\alpha_3 = 0.$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为三个不同的特征值所对应的特征向量, 所以线性无关, 于是有

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = 0 \\ k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0 \end{cases}, \text{ 其系数行列式 } \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 所以 } k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

故  $\beta, A\beta, A^2\beta$  线性无关.

(2) 由  $A^3\beta = A\beta$  有

$$A[\beta, A\beta, A^2\beta] = [A\beta, A^2\beta, A^3\beta] = [A\beta, A^2\beta, A\beta] = [\beta, A\beta, A^2\beta] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

令  $P = [\beta, A\beta, A^2\beta]$ , 则  $P = [\beta, A\beta, A^2\beta]$  可逆, 且

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

从而有

$$r(A - E) = r(B - E) = r \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$|A + 2E| = |B + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

### 习 题 三

#### 1. 填空题.

(1) 设  $\alpha_1 = (2, -1, 0, 5), \alpha_2 = (-4, -2, 3, 0), \alpha_3 = (-1, 0, 1, k), \alpha_4 = (-1, 0, 2, 1)$ , 则

$k = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

(2) 设  $\alpha_1 = (2, -1, 3, 0), \alpha_2 = (1, 2, 0, -2), \alpha_3 = (0, -5, 3, 4), \alpha_4 = (-1, 3, t, 0)$ , 则  $t = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

(3) 已知  $\alpha = (3, 5, 7, 9), \beta = (-1, 5, 2, 0)$ ,  $x$  满足  $2\alpha + 3x = \beta$ , 则  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 当  $k = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 向量  $\beta = (1, k, 5)$  能由向量  $\alpha_1 = (1, -3, 2), \alpha_2 = (2, -1, 1)$  线性表示.

(5) 已知  $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2, 1), \alpha_2 = (0, 2, 1, 5, -1), \alpha_3 = (2, 0, 3, -1, 3), \alpha_4 = (1, 1, 0, 4, 1)$ , 则秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(6) 设 
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix}$$

则秩  $(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(7) 设  $\alpha = (1, 0, -1, 2)^T, \beta = (0, 1, 0, 2)$ . 矩阵  $A = \alpha \cdot \beta$ , 则秩  $(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(8) 已知向量组  $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, t)$ , 且秩  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ , 则  $t = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 2. 选择题.

(1) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是

A.  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ .

B.  $\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

C.  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ .

D.  $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$ .

【    】

(2) 设矩阵  $A_{m \times n}$  的秩为  $r(A) = m < n, E_m$  为  $m$  阶单位矩阵, 下列结论中正确的是

A.  $A$  的任意  $m$  个列向量必线性无关. B.  $A$  的任意一个  $m$  阶子式不等于零.

C. 若矩阵  $B$  满足  $BA = 0$ , 则  $B = 0$ . D.  $A$  通过初等行变换, 必可以化为  $(E_m, 0)$  的形式.

【    】

(3) 设向量组 (I):  $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T, \alpha_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ , 向量组 (II):  $\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})^T, \beta_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})^T, \beta_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})^T$ , 则

A. (I) 相关  $\Rightarrow$  (II) 相关.

B. (I) 无关  $\Rightarrow$  (II) 无关.

C. (II) 无关  $\Rightarrow$  (I) 无关.

D. (I) 无关  $\Leftrightarrow$  (II) 无关.

【    】

(4) 设  $\beta, \alpha_1, \alpha_2$  线性相关,  $\beta, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则

A.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.

B.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

C.  $\alpha_1$  可以用  $\beta, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

D.  $\beta$  可以用  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示.

【    】

(5) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且秩  $(A) = \text{秩}(B)$ , 则

A. 秩  $(A - B) = 0$ .

B. 秩  $(A + B) = 2 \times \text{秩}(A)$ .

C. 秩  $(AB) = 2 \times \text{秩}(A)$ .

D. 秩  $(AB) \leq \text{秩}(A) + \text{秩}(B)$ .

【    】

## 3. 计算证明题.

(1) 已知向量组  $\alpha_1 = (t, 2, 1), \alpha_2 = (2, t, 0), \alpha_3 = (1, -1, 1)$ , 试求出  $t$  为何值时, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关或线性无关.

(2) 设有三维列向量  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$ . 问  $k$  取何值时,

①  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表达式唯一; ②  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 但表达式不唯一; ③  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

(3) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 向量组  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 问:

①  $\alpha_1$  能否由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 证明你的结论.

②  $\alpha_4$  能否由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出? 证明你的结论.

(4) 已知  $m$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 但其中任意  $n-1$  个都线性无关, 证明:

① 如果存在等式

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_m \alpha_m = 0,$$

则这些系数  $k_1, \dots, k_m$  或者全为零, 或者全不为零.

② 如果存在两个等式

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_m \alpha_m = 0,$$

$$l_1 \alpha_1 + \dots + l_m \alpha_m = 0,$$

其中  $l_1 \neq 0$ , 则

$$\frac{k_1}{l_1} = \frac{k_2}{l_2} = \dots = \frac{k_m}{l_m}.$$

(5) 设向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 问常数  $a, b, c$  满足什么条件时,  $a\alpha_1 - \alpha_2, b\alpha_2 - \alpha_3, c\alpha_3 - \alpha_1$  线性相关.

(6) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 若存在正整数  $k$ , 使线性方程组  $A^k x = 0$  有解向量  $\alpha$ , 且  $A^{k-1} \alpha \neq 0$ . 证明: 向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1} \alpha$  是线性无关的.

(7) 求下列向量组的一个极大线性无关组, 并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

①  $\alpha_1 = (1, 2, 1, 3), \alpha_2 = (4, -1, -5, -6), \alpha_3 = (-1, -3, -4, -7), \alpha_4 = (2, 1, 2, 0)$ .

②  $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -2, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$ .

(8) 已知三阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{bmatrix},$$

讨论秩( $A$ ) 的情况.

(9) 设三阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = E$  ( $E$  为单位矩阵), 但  $A \neq \pm E$ , 试证明:

$$[\text{秩}(A - E) - 1][\text{秩}(A + E) - 1] = 0.$$

(10) 设  $A$  为  $n$  阶方阵且  $A^2 = A$ , 证明: 若  $A$  的秩为  $r$ , 则  $A - E$  的秩为  $n - r$ , 其中  $E$  是  $n$  阶单位矩阵.

(11) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 证明: 如果  $A^2 = E$ , 则  $\text{秩}(A + E) + \text{秩}(A - E) = n$ .

(12) 设

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

试证:存在数 $\lambda$ ,使得 $A^k = \lambda^{k-1}A$ .

(13) 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , ① $a, b, c$  满足什么条件时, 矩阵 $A$ 的秩为3; ② $a, b, c$  取何值时,  $A$  是

对称矩阵; ③取一组 $a, b, c$ 使得 $A$ 为正交矩阵.

(14) 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 秩 $(A) = n-1$ , 证明: 存在常数 $k$ , 使得 $(A^*)^2 = kA^*$ .

### 参 考 答 案

1. (1)  $-\frac{5}{13}$ ; (2) 任意实数; (3)  $(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -4, -6)$ ; (4)  $-8$ ; (5) 3; (6) 3; (7) 1; (8) 7.

2. (1) C (2) C (3) B (4) C (5) D

3. (1)  $t \neq -2, 3$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关; 当  $t = -2, 3$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.

(2) ① $k \neq 0, k \neq 1$ . ② $k = 1$ . ③ $k = 0$ . (3) 略. (4) 略. (5)  $abc = 1$ . (6) 用定义证明.

(7) ① $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_4 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_3.$$

② $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  为一个极大线性无关组, 且

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_4,$$

$$\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_4.$$

(8)  $x \neq y, x \neq -2y$ , 秩 $(A) = 3$ ;  $x = y = 0$ , 秩 $(A) = 0$ .

$x = y \neq 0$ , 秩 $(A) = 1$ ;  $x = -2y \neq 0$ , 秩 $(A) = 2$ .

(9) 略. (10) 略. (11) 略.

(12) 提示:  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n).$

(13) ① $a \neq 2bc$ . ② $a = 1, b = 0, c = 0$ . ③由 $a^2 + b^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1, a \cdot c + \frac{1}{2}b = 0$

得 $c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}, a = \pm \frac{1}{2}$ , 且 $a, c$  同号时,  $b$  为负;  $a, c$  反号时,  $b$  为正.

(14) 秩 $(A) = n-1 \Rightarrow$  秩 $(A^*) = 1 \Rightarrow A^*$  可分解为  $A^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n],$

由此即可证明.

## 第四章 线性方程组

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、克莱姆法则

$$\text{线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

如果系数行列式  $D = |A| \neq 0$ , 则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中,  $D_j$  是把  $D$  中第  $j$  列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式.

【例 4.1】设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

其中,  $a_i \neq a_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$ , 则线性方程组  $A^T x = B$  的解是\_\_\_\_\_.

【解】因为  $|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0$ ,

所以  $A^T x = B$  有唯一解  $x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \cdots, n$ .

其中,  $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{D}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} = 0$ . 故应填  $(1, 0, \cdots, 0)^T$ .

#### 二、线性方程组的基本概念

$$\text{方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad ①$$

称为含  $m$  个方程  $n$  个未知量的非齐次线性方程组.

记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则上述方程组可记为(矩阵形式)  $Ax = b$ .

若记 
$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n$$

则上述方程可改写为(向量形式)  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$ .

矩阵 
$$\bar{A} = [A : b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

称为方程组 ① 的增广矩阵.

方程组 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为含  $n$  个未知元  $m$  个方程的齐次线性方程组,它是非齐次线性方程组 ① 的导出组. 其矩阵形式为

$$Ax = 0,$$

向量形式为 
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0.$$

### 三、线性方程组解的判定

#### 1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$

一定有解(至少有零解),且秩( $A$ ) =  $n$  时,有唯一零解;秩( $A$ ) =  $r < n$  时,有非零解,且有  $n - r$  个线性无关的解向量.

#### 2. 非齐次线性方程组 $Ax = b$

若秩( $A$ )  $\neq$  秩( $\bar{A}$ ) = 秩( $[A : b]$ ),则无解.

$$\text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A}) = \text{秩}[A : b] = \begin{cases} n, & \text{则有唯一解} \\ < n, & \text{则有无穷多解} \end{cases}$$

● 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,若  $r(A) = m$ ,则  $r(A) = r(A : b)$ ,从而  $Ax = b$  一定有解.

【例 4.2】若  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,又  $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ ,则  $A^T Ax = A^T b$  一定有解.

【证】考查矩阵  $A^T A$  的增广矩阵  $(A^T A : A^T b)$ :因

$$r(A^T A) \leq r(A^T A : A^T b) = r[A^T (A : b)]$$

$$\leq r(A^T) = r(A) = r(A^T A),$$

故  $r(A^T A : A^T b) = r(A^T A)$ ,从而知方程组  $A^T Ax = A^T b$  定有解.

#### 四、非齐次线性方程组与其导出组的解的关系

$Ax = b$  有解  $\Leftrightarrow \text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A}) = r \begin{cases} = n \Leftrightarrow Ax = b \text{ 有唯一解,} \\ < n \Leftrightarrow Ax = b \text{ 有无穷多解.} \end{cases}$

$Ax = b$  有唯一解  $\Leftrightarrow Ax = 0$  只有零解  $\Leftrightarrow \text{秩}(A) = n$   
 $Ax = b$  有无穷多解  $\Leftrightarrow Ax = 0$  有非零解  $\Leftrightarrow \text{秩}(A) < n \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} Ax = b \text{ 有唯一解} \\ Ax = b \text{ 有无穷多解} \end{matrix}} \right\} Ax = 0.$

**注** 非齐次线性方程组  $Ax = b$  有无穷多解(唯一解), 则  $Ax = 0$  有非零解(仅有零解). 但反过来不成立, 即  $Ax = 0$  有非零解(仅有零解), 不能推导出  $Ax = b$  有无穷多解(唯一解), 甚至  $Ax = b$  可能无解, 因为由  $\text{秩}(A) < n (=n)$ , 不一定能得到  $\text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A})$ .

#### 五、线性方程组解的性质

- (1) 如果  $\eta_1, \eta_2$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则  $\eta_1 + \eta_2$  也是它的解.
  - (2) 如果  $\eta$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则对任意常数  $k, k\eta$  也是它的解.
  - (3) 如果  $\gamma$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一个解, 而  $\eta$  是其导出组  $Ax = 0$  的一个解, 则  $\gamma + \eta$  是方程组  $Ax = b$  的解.
  - (4) 如果  $\gamma_1, \gamma_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的两个解, 则  $\gamma_1 - \gamma_2$  是其导出组  $Ax = 0$  的解.
- 注** 设  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$  是  $Ax = b$  的解,  $k_1, k_2, \dots, k_s$  为常数, 且  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ , 则  $k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \dots + k_s\gamma_s$  也是  $Ax = b$  的解.

#### 六、线性方程组解的结构

##### 1. 齐次线性方程组解的结构

设  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  为齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一组线性无关解, 如果方程组  $Ax = 0$  任意一个解均可表为  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  的线性组合, 则称  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  为方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系.

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 若  $\text{秩}(A) = r < n$ , 则齐次线性方程组  $Ax = 0$  存在基础解系, 且基础解系包含  $n - r$  个线性无关的解向量, 这时方程组的通解可表为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  为齐次方程组的一个基础解系.

基础解系的求法: 对  $A$  施以初等行变换(必要时重新排列未知量的顺序) 可得

$$A \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1\ r+1} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{2\ r+1} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{r\ r+1} & \cdots & \bar{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对应齐次线性方程组



$$\begin{cases} x_1 & + \bar{a}_{1\ r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = 0, \\ x_2 & + \bar{a}_{2\ r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = 0, \\ & \vdots \\ x_r & + \bar{a}_{r\ r+1}x_{r+1} + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

与原方程组  $Ax = 0$  同解, 其中  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  为自由未知量, 分别取

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{为} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{共 } n-r \text{ 个})$$

得  $Ax = 0$  的  $n-r$  个线性无关的解

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1\ r+1} \\ -\bar{a}_{2\ r+1} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{r\ r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1\ r+2} \\ -\bar{a}_{2\ r+2} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{r\ r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \eta_{n-r} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{1n} \\ -\bar{a}_{2n} \\ \vdots \\ -\bar{a}_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

即为其基础解系.

## 2. 非齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组  $Ax = b$  的任意一个解均可表示为方程组  $Ax = b$  的一个特解与其导出组  $Ax = 0$  的某个解之和.

当非齐次线性方程组有无穷多解时, 它的通解可表示为

$$x = \eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

其中,  $\eta_0$  为  $Ax = b$  的一个特解,  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  为其导出组  $Ax = 0$  的一个基础解系.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)

**提示** 基本概念题主要考查解的判定、性质和结构, 且大都以填空或选择题的形式出现, 要求对基本概念以及齐次线性方程组与非齐次线性方程组之间的关系能够准确把握.

**【例 4.3】** (1) 已知方程组  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  无解, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 设方程  $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  有无穷多解, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】(1) 化增广矩阵为阶梯形

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{array} \right]\end{aligned}$$

由题设, 有系数矩阵的秩  $r(A) < 3$ , 必有  $(a-3)(a+1) = 0$ , 即  $a = 3$  或  $a = -1$ . 当  $a = 3$  时,  $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ , 方程组有无穷多解; 当  $a = -1$  时,  $r(A) = 2 \neq r(\bar{A}) = 3$ , 方程组无解. 故  $a = -1$ .

(2) 化增广矩阵为阶梯形

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left[ \begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 2(a+2) \end{array} \right],\end{aligned}$$

由题设, 必有  $a = 1$  或  $a = -2$ .

当  $a = 1$  时,  $r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2$ , 无解;

当  $a = -2$  时,  $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ , 方程组有无穷多解.

故  $a = -2$ .

● 本题也可由系数矩阵的行列式  $|A| = 0$  求  $a$ , 但当  $a$  的取值不唯一时, 必须代回去验算.

【例 4.4】选择题.

(1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是四元非齐次线性方程组  $Ax = b$  的三个解向量, 且秩  $r(A) = 3, \alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T, C$  表示任意常数, 则线性方程组  $Ax = b$  的通解  $x$  为

(A)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(B)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(C)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(D)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$

【 】

(2) 已知  $\beta_1, \beta_2$  是  $Ax = b$  的两个不同的解,  $\alpha_1, \alpha_2$  是相应齐次方程组  $Ax = 0$  的基础解系,  $k_1, k_2$  是任意常数, 则  $Ax = b$  的通解是

$$(A) k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

$$(B) k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

$$(C) k_1 \alpha_1 + k_2 (\beta_2 - \beta_1) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}.$$

$$(D) k_1 \alpha_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

【 】

$$(3) \text{ 齐次线性方程组 } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases} \text{ 的系数矩阵记为 } A, \text{ 若存在三阶矩阵 } B \neq O$$

使得  $AB = O$ , 则

$$(A) \lambda = -2 \text{ 且 } |B| = 0$$

$$(B) \lambda = -2 \text{ 且 } |B| \neq 0$$

$$(C) \lambda = 1 \text{ 且 } |B| = 0$$

$$(D) \lambda = 1 \text{ 且 } |B| \neq 0$$

【 】

(4) 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $r(A) = n - 3$ , 且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $Ax = 0$  的三个线性无关的解向量, 则  $Ax = 0$  的基础解系

$$(A) \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1.$$

$$(B) \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3.$$

$$(C) 2\alpha_2 - \alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3.$$

$$(D) \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2, -\alpha_1 - 2\alpha_3.$$

【 】

【解】(1) 由于秩  $(A) = 3$ , 故线性方程组  $Ax = 0$  解空间的维数为  $4 - \text{秩}(A) = 1$ . 又由

$$A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b, A\alpha_3 = b \text{ 知, } A\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right) = 0.$$

于是  $2\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right) = (2, 3, 4, 5)^T$  是  $Ax = 0$  的解, 故根据  $Ax = b$  的解的结构理论知,  $Ax = b$  的通解为 (C).

(2) 因为  $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$  为  $Ax = 0$  的解, 而非  $Ax = b$  的解, 由解的结构理论知, (A), (C) 不正确.

虽然  $\alpha_1, \beta_1 - \beta_2$  均为  $Ax = 0$  的解, 但是否线性无关不确定, 因此不一定为基础解系, 排除 (D). 故正确选项为 (B). 事实上,  $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2$  均为  $Ax = 0$  的解, 且易证线性无关, 于是

$\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2$  也可作为  $Ax = 0$  的基础解系, 而  $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$  为  $Ax = b$  的特解, 故 (B) 正确.

(3) 解: 由  $B \neq O$  及  $AB = O$  可知所给的齐次线性方程组有非零解, 于是  $|A| = 0$ , 即

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0, \text{ 解之得 } \lambda = 1.$$

若  $|B| \neq 0$ , 则  $B$  可逆, 则  $AB = O \Rightarrow A = O$ , 这与  $A$  为非零阵矛盾, 所以  $|B| = 0$ . 故本题选 (C).

(4) 因为  $r(A) = n - 3$ , 可知  $Ax = 0$  的基础解系所含向量的个数为  $n - (n - 3) = 3$ , 又因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为  $Ax = 0$  的三个线性无关解向量, 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为  $Ax = 0$  的基础解系. 且由

$$1 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) + 1 \cdot (\alpha_3 - \alpha_2) + 1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_3) = 0,$$

$$(2\alpha_2 - \alpha_1) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_2\right) + (\alpha_1 - \alpha_3) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_2) + (-\alpha_1 - 2\alpha_3) = 0,$$

知(B),(C),(D)中三组向量线性相关,不可能作为 $Ax=0$ 的基础解系,故应选(A).  
事实上,易证 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关,且均为 $Ax=0$ 的解,因此可作为 $Ax=0$ 的基础解系.

**【例 4.5】** 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 $A$ ,三阶矩阵 $B \neq 0$ ,且 $AB=0$ ,试求 $\lambda$ 的值.

**【解】** 设 $B=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ,其中 $\beta_i (i=1,2,3)$ 为三维列向量,由于 $B \neq 0$ ,所以至少有一个非零的列向量,不妨设 $\beta_1 \neq 0$ ,由于

$$AB=A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3)=0,$$

$\Rightarrow A\beta_1=0$ ,即 $\beta_1$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的非零解,于是系数矩阵的行列式必为零,

即  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5(\lambda - 1) = 0,$

解得 $\lambda=1$ .

**【例 4.6】** 已知向量  $\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix},$

是方程组  $\begin{cases} a_1x_1 + 2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = d_1 \\ 4x_1 + b_2x_2 + 3x_3 + b_4x_4 = d_2 \\ 3x_1 + c_2x_2 + 5x_3 + c_4x_4 = d_3 \end{cases}$  的三个解,

求该方程组的通解.

**【分析】** 如果把三个解代入方程组先求参数,再求通解,则计算非常繁琐.应利用方程组解的性质与结构定理来求解.

**【解】** 已知有  $\eta_2 - \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \eta_3 - \eta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$  是相应的齐次方程组的两个线性无关解,所以系

数矩阵的秩 $\leq 2$ , (因为 $4-r(A) \geq 2$ )

又因为系数矩阵  $\begin{bmatrix} a_1 & 2 & a_3 & a_4 \\ 4 & b_2 & 3 & b_4 \\ 3 & c_2 & 5 & c_4 \end{bmatrix}$  有二阶子式  $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0,$

所以系数矩阵的秩 $\geq 2$ . 所以系数矩阵的秩为 2.

所以齐次方程组的基础解系包含两个解向量,

即 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是齐次方程组的基础解系.

所以该方程组的通解为  $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1) + \eta_1.$

### 题型二 含有参数的线性方程组解的讨论

**提示** 这类问题是历届考研的重点, 务必很好地掌握.

- (1) 含参数的  $n$  个未知数  $n$  个方程的线性方程组, 当  $n \leq 3$  时, 通常利用系数行列式进行分析讨论: 当系数行列式不为零时, 方程组有唯一解, 用克莱姆法则求之; 当系数行列式为零时 (此时参数一般已确定) 利用增广矩阵行的初等变换化为阶梯形阵判别有无解, 有解时, 求出通解.
- (2) 当方程的个数  $\neq$  未知数的个数, 或 (1) 中的  $n > 3$  时, 通常是对方程组的增广矩阵施以行的初等变换化为阶梯形阵, 然后再对参数讨论方程组有无解, 有解时求出解. 变量的系数中不含参数的方程组也用此法.

**【例 4.7】**  $k$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多组解? 有解时, 求出其全部解.

**【解】**  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(k^2 - 3k - 4) = -(k-4)(k+1),$

当  $|A| \neq 0$ , 即  $k \neq -1, 4$  时, 方程组有唯一解, 用克莱姆法则求之,

$$x_1 = \frac{k^2 + 2k}{k+1}, \quad x_2 = \frac{k^2 + 2k + 4}{k+1}, \quad x_3 = \frac{-2k}{k+1}.$$

当  $k = -1$  时, 方程组为 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 4 \\ -1 & -1 & 1 & : & 1 \\ 1 & -1 & 2 & : & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 5 \\ 0 & -2 & 3 & : & -8 \end{bmatrix},$$

因为  $r(A) = 2$ ,  $r(\bar{A}) = 3$ , 所以方程组无解.

当  $k = 4$  时, 方程组为 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & : & 4 \\ -1 & 4 & 1 & : & 16 \\ 1 & -1 & 2 & : & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & : & 4 \\ 0 & 5 & 5 & : & 20 \\ 0 & -2 & -2 & : & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix},$$

$r(\bar{A}) = r(A) = 2$ , 可知方程组有无穷多解, 于是

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = -x_3 + 4 \end{cases}, \text{ 令 } x_3 = c, \text{ 则得通解为 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3c \\ 4-c \\ c \end{bmatrix}, \text{ 即 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**【例 4.8】** 设  $n$  维向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (n \geq 3)$  线性无关, 讨论:

当向量组  $a\alpha_2 - \alpha_1, b\alpha_3 - \alpha_2, a\alpha_1 - b\alpha_3$  线性相关时,

$$\text{方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 7x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_2 + x_3 + (a-2)x_4 = b-1 \end{cases} \text{的解,}$$

且当有无穷多解时,用其导出组的基础解系表示其通解.

$$\text{【解】} (a\alpha_2 - \alpha_1, b\alpha_3 - \alpha_2, a\alpha_1 - b\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 0 & b & -b \end{bmatrix},$$

因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$$\text{所以向量组 } a\alpha_2 - \alpha_1, b\alpha_3 - \alpha_2, a\alpha_1 - b\alpha_3 \text{ 线性相关的充要条件是 } \begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 0 & b & -b \end{vmatrix} = 0,$$

亦即  $b(a^2 - 1) = 0$ . 所以  $b = 0$  或  $a = \pm 1$ .

$$\text{方程组的增广矩阵 } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & a-2 & b-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \end{bmatrix},$$

- (1) 当  $a = 1, b \neq 0$  时, 方程组无解;
- (2) 当  $a \neq 1, b$  为任意数时, 方程组有唯一解;
- (3) 当  $b = 0, a \neq 1$  时, 方程组有唯一解;
- (4) 当  $a = 1, b = 0$  时, 方程组有无穷多解.

$$\text{在第(4)种情形下, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以该方程组的通解为 } C \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**【例 4.9】** 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 且方程组  $Ax = 0$  的解空间的维数为 2, 求  $Ax = 0$  的通解.

**【分析】** 由于解空间的维数等于  $Ax = 0$  的基础解系中所含解向量的个数, 所以  $4 - r(A) = 2$ , 即  $r(A) = 2$ . 由此可确定  $t$ , 进而求出  $Ax = 0$  的通解.

**【解】** 化  $A$  为阶梯形:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & t-2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-2t & 2-2t \\ 0 & 1 & t & t \\ 0 & 0 & -(t-1)^2 & -(t-1)^2 \end{bmatrix},$$

可见,由  $r(A) = 2$  知必有  $(t-1)^2 = 0$ , 即  $t = 1$ . 此时

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

其同解方程组为  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$ .

通解为 
$$x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中  $k_1, k_2$  为任意常数.

【例 4.10】问  $a, b$  为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1. \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多组解, 并求出其唯一解和一般解.

【解】用初等行变换, 化增广矩阵  $\bar{A}$  为

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right],$$

可见, (1) 当  $a \neq 1$  时, 秩  $(A) = \text{秩}(\bar{A}) = 4$ , 原方程组有唯一解, 且可求出唯一解为

$$x_1 = \frac{b-a+2}{a-1}, \quad x_2 = \frac{a-2b-3}{a-1}, \quad x_3 = \frac{b+1}{a-1}, \quad x_4 = 0.$$

(2) 当  $a = 1$  时, 秩  $(A) = 2$ .

① 当  $b \neq -1$  时, 秩  $(\bar{A}) = 3 > \text{秩}(A) = 2$ , 原方程组无解.

② 当  $b = -1$  时, 秩  $(\bar{A}) = \text{秩}(A) = 2 < 4$ , 原方程组有无穷多组解, 将  $a = 1$  及  $b = -1$  代入, 易求出其通解为

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中,  $k_1, k_2$  为任意常数.

【例 4.11】已知 3 阶矩阵  $A$  的第一行是  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c$  不全为零, 矩阵  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$  ( $k$  为常

数), 且  $AB = O$ , 求线性方程组  $Ax = 0$  的通解.

【解】由  $AB = O$  知  $r(A) + r(B) \leq 3$ , 此外  $A \neq O, B \neq O$ , 所以

$$1 \leq r(A) \leq 2, 1 \leq r(B) \leq 2.$$

(I) 当  $r(A) = 2$  时, 由  $AB = O$  知线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系为  $(1, 2, 3)^T$ , 从而通解为  $x = t(1, 2, 3)^T$  ( $t$  为任意常数).

(II) 当  $r(A) = 1$  时, 如果  $k \neq 9$ , 则由  $AB = O$  知线性方程组  $Ax = 0$  有基础解系,  $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (3, 6, k)^T$ , 从而通解为

$x = t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2$  ( $t_1, t_2$  是任意常数).

如果  $k = 9$ , 显然  $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$  是线性方程组  $Ax = 0$  的解, 此外由于线性方程组  $Ax = 0$

与方程  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  同解, 设  $a \neq 0$ , 则有与  $\alpha_1$  线性无关的解向量  $\beta = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)^T$ ,

从而线性方程组  $Ax = 0$  的通解为

$x = p_1 \alpha_1 + p_2 \beta$  ( $p_1, p_2$  是任意常数).

【例 4.12】设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,

(I) 求满足  $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$  的所有向量  $\xi_2, \xi_3$ ;

(II) 对(I)中的任意向量  $\xi_2, \xi_3$  证明  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  无关.

【解】(I)  $\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$

于是  $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ , 取  $x_2$  为自由变量, 可得

$$x_3 = -2x_2 + 1, x_1 = -x_2.$$

所以  $\xi_2 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 + 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , ( $x_2 = k$ , 为任意常数).

设  $B = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ,

则  $\bar{B} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$

于是  $r(B) = r(\bar{B}) = 1$ , 取  $x_2, x_3$  为自由变量, 则  $x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}$ , 所以

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} -x_2 - \frac{1}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(其中  $x_2 = k_2, x_3 = k_3$  为任意常数).



(II) 证法 1 由(I)知

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -k_2 - \frac{1}{2} \\ 1 & k & k_2 \\ -2 & -2k+1 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -k & -k_2 - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & k_3 + 2k_2 + 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

所以  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

证法 2 由题设可得  $A\xi_1 = 0$ . 设存在数  $k_1, k_2, k_3$ , 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0. \quad (1)$$

等式两端左乘  $A$ , 得

$$k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0, \text{ 则 } k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0, \text{ 即}$$

$$k_2\xi_1 + k_3A\xi_3 = 0. \quad (2)$$

等式两端再同乘  $A$ , 得  $k_2A\xi_1 + k_3A^2\xi_3 = 0$ , 即  $k_3\xi_1 = 0$ , 于是  $k_3 = 0$ , 代入 (2) 式得  $k_2\xi_1 = 0$ , 故  $k_2 = 0$ . 将  $k_2 = k_3 = 0$  代入 (1) 式可得  $k_1 = 0$ , 从而  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关.

【例 4.13】设有三维列向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

问  $\lambda$  取何值时,

(1)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表达式唯一.

(2)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表达式不唯一.

(3)  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

【分析】向量  $\beta$  是否可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 相当于方程组  $Ax = \beta$  是否有解, 其中  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , 因此本题实际上是线性方程组解的判定问题.

【解】设  $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ , 则

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

其增广矩阵

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 - 2\lambda & -\lambda^2(1+\lambda) \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & \lambda(1-2\lambda-\lambda^2) \end{array} \right], \end{aligned}$$

可见

(1) 若  $\lambda \neq 0$  且  $\lambda \neq -3$ , 方程组有唯一解,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  唯一线性表示;

(2) 若  $\lambda = 0$ , 则方程组有无穷多解,  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 但表达式不唯一;

(3) 若  $\lambda = -3$ , 则

$$\bar{A} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right],$$

系数矩阵与增广矩阵的秩不相同, 方程组无解, 故  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

**【例 4.14】** 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3 \end{cases},$$

(1) 证明: 若  $a_1, a_2, a_3, a_4$  两两不相等, 则线性方程组无解;

(2) 设  $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$  且已知  $\beta_1, \beta_2$  是该方程组的两个解, 其中  $\beta_1 = (-1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 1, -1)^T$ , 写出该方程组的通解.

**【分析】** (1) 注意到增广矩阵对应的行列式是著名的范德蒙行列式, 其值不为零, 由此即可导出结论. (2) 当  $a_1 = a_3 = k$  及  $a_2 = a_4 = -k$  时, 系数矩阵的秩为 2, 对应齐次组基础解系包含线性无关解向量的个数为 1, 要求通解只需找出对应齐次组的一个非零解 ( $\beta_1 - \beta_2$ ), 其可作为基础解系, 再加上非齐次组的特解  $\beta_1$  或  $\beta_2$  就可得到一般解.

**【解】** (1) 考虑增广矩阵

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{array} \right],$$

若  $a_1, a_2, a_3, a_4$  两两不相等, 则

$$|\bar{A}| = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (a_i - a_j) \neq 0,$$

因此方程组增广矩阵的秩为 4, 系数矩阵的秩为 3, 此线性方程组无解.

(2) **方法一:** 当  $a_1 = a_3 = k$  及  $a_2 = a_4 = -k$  时, 原方程组化为

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2 x_3 = k^3 \\ x_1 - kx_2 + k^2 x_3 = -k^3 \end{cases}.$$

系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2,  $\beta_2 - \beta_1 = (-2, 0, 2)^T$  是对应导出组的非零解, 即为其基础解系, 从而上述非齐次组的通解为

$$x = C(\beta_2 - \beta_1) + \beta_1 = C \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中,  $C$  为任意常数.

**方法二:** 当  $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$  时, 原方程组化为

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2 x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2 x_3 = -k^3. \end{cases} \quad (1)$$

把  $\beta_1 = (-1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 1, -1)^T$  代入上述方程组, 得  $k^2 = 1$ , 对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2 x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + k^2 x_3 = 0 \end{cases}.$$

即

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

解得  $x_1 = -x_3, x_2 = 0$ . ② 的基础解系为  $\eta = (-1, 0, 1)^T$ , 故方程组 ① 的通解为

$$x = \beta_1 + C\eta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中,  $C$  为任意常数.

### 题型三 讨论两个方程组的公共解

**提示** (1) 由通解表达式相等求公共解; (2) 由两个方程组合并为一个新的方程组求公共解.

**【例 4.15】** 设四元线性齐次方程组 (I)  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ , 又知某线性齐次方程组 (II) 的通解为

$$x = k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1).$$

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 与 (II) 有无非零公共解? 若有, 求出所有的非零公共解, 若没有, 则说明理由.

**【分析】** 回答 (2) 的关键在于“非零公共解”的理解上, 可以这样考虑: ① 方程组 (II) 的通解中满足方程组 (I) 的非零解, 即为方程组 (I) 与 (II) 的非零公共解. ② 既可以用方程组 (I) 的通解表示, 又可用方程组 (II) 的通解表示的非零解, 即为方程组 (I) 与 (II) 的非零公共解.

**【解】** (1) 由 (I) 可得  $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$ , 于是基础解系为  $(0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)$ , 方程 (I) 的通解可表示为

$$x = k_3(0, 0, 1, 0) + k_4(-1, 1, 0, 1).$$

(2) **方法一:** 将 (II) 的通解代入方程组 (I) 中, 得

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases}, \Rightarrow k_1 = -k_2,$$

当  $k_1 = -k_2 \neq 0$  时, 则向量

$k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1) = k_2(-1, 1, 1, 1)$  满足方程组 (I) [显然是 (II) 的解], 故方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解, 所有非零公共解为

$$k(-1, 1, 1, 1), \quad (k \neq 0 \text{ 的任意常数}).$$

**方法二:** 令  $k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1) = k_3(0, 0, 1, 0) + k_4(-1, 1, 0, 1)$ ,

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 = k_4 \\ k_1 + 2k_2 = k_4 \\ k_1 + 2k_2 = k_3 \\ k_2 = k_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 & -k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 & -k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_3 & = 0 \\ k_2 & -k_4 = 0 \end{cases},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{同解方程组为 } \begin{cases} k_1 = -k_4 \\ k_2 = k_4 \\ k_3 = k_4 \end{cases}, \quad \text{令 } k_1 = -k_2 = -k,$$

则  $k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1) = -k(0, 1, 1, 0) + k(-1, 2, 2, 1) = k(-1, 1, 1, 1)$ .  
方程组的解向量为  $k(-1, 1, 1, 1)$ , 此即方程组 (I) 与 (II) 的所有非零公共解.

**【例 4.16】** 已知下列非齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}, (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}.$$

(1) 求解方程组 (I), 用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组 (II) 中的参数  $m, n, t$  为何值时, 方程组 (I) 和 (II) 同解.

**【解】** (1) 对 (I) 的增广矩阵  $\bar{A}$  施行初等行变换

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right], \end{aligned}$$

所以 (I) 的导出组有基础解系  $\eta = (1, 1, 2, 1)^T$ ,

(I) 有特解  $\eta^* = (-2, -4, -5, 0)^T$ ,

因此 (I) 的通解为

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数});$$

(2) 若 (I) 和 (II) 同解, 则 (I) 的通解应是 (II) 的解.

将 (I) 的通解代入 (II) 的各个方程可得  $m, n, t$ . 为简便, 令  $k = 0$ , 则有

$$\begin{cases} -2 + m(-4) - (-5) = -5 \\ n(-4) - (-5) = -11 \\ (-5) = -t + 1 \end{cases}, \text{解之得 } m = 2, n = 4, t = 6.$$

#### 题型四 有关基础解系的证明

**提示**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为  $Ax = 0$  的基础解系, 要求满足:

(1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均为  $Ax = 0$  的解; (2)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关; (3)  $s = n - r(A)$ .

**【例 4.17】** 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

的系数行列式  $|A| = 0$ , 而  $A$  中某元素的代数余子式  $A_{ij} \neq 0$ , 试证  $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T$

是该方程组的一个基础解系.

【分析】由  $A_{ij} \neq 0$  知, 秩  $(A) = n-1$ , 故基础解系所含向量的个数为  $n-r(A) = 1$ , 任意一个非零解均可作为  $Ax = 0$  的基础解系, 只需证明  $(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T \neq 0$  且为解即可.

【证】因为  $|A| = 0$ , 所以  $AA^* = |A|E = 0$ .

$$\text{将 } A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \text{ 按列分块, 其中 } \alpha_i = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ .

$$AA^* = A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = [A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n] = [0, 0, \dots, 0],$$

即  $A\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 说明  $\alpha_i$  是  $Ax = 0$  的解.

因为  $|A| = 0, A_{ij} \neq 0$ , 即  $A$  有一个  $n-1$  阶非零子式, 所以秩  $(A) = n-1$ , 故方程组  $Ax = 0$  的基础解系含有一个解向量, 由  $A_{ij} \neq 0$ , 知  $\alpha_i \neq 0$ . 因此  $\alpha_i = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in})^T \neq 0$  是  $Ax = 0$  的一个基础解系.

【例 4.18】设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系,  $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$ , 其中  $t_1, t_2$  为实常数. 试问  $t_1, t_2$  满足什么关系时,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  也为  $Ax = 0$  的一个基础解系.

【解】由于  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, s)$  为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性组合, 所以  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, s)$  均为  $Ax = 0$  的解.

$$\text{设 } k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0,$$

$$\text{即 } (t_1k_1 + t_2k_s)\alpha_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\alpha_2 + \cdots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\alpha_s = 0,$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为  $Ax = 0$  的基础解系, 必线性无关, 因此有

$$\begin{cases} t_1k_1 + t_2k_s = 0 \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0 \\ \vdots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0 \end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当  $t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s \neq 0$ , 即当  $s$  为偶数,  $t_1 \neq \pm t_2$ ;  $s$  为奇数,  $t_1 \neq -t_2$  时, 方程组只有零解  $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ , 从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关, 此时  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  也为  $Ax = 0$  的一个基础解系.

【例 4.19】设  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$  与  $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -a \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ t \\ 10 \end{bmatrix}$  都是

$Ax = 0$  的基础解系, 求  $a, t$  的值.

【解】因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  都是  $Ax = 0$  的基础解系，

所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  可以互相线性表示，于是

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & t \\ -2 & a & -6 & -a & -2 & 10 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & t \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & t \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-4 \end{array} \right],$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  是基础解系，所以它们等价，且

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3,$$

故  $a \neq 2, t = 4$ .

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 若已知  $AB = 0$ ，则应将  $B$  的每列作为  $Ax = 0$  的解来处理。

【例 4.20】设  $A$  为  $n$  阶方阵，且  $r(A) = n-1$ ，证明：秩  $r(A^*) = 1$ ，其中  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵。

【证明】由  $AA^* = |A|E$ ，及  $r(A) = n-1$ ，知  $|A| = 0$ ，且  $AA^* = 0$ 。

令  $A^* = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ ，则  $AA^* = 0 \Rightarrow b_1, b_2, \dots, b_n$  均为  $Ax = 0$  的解，而  $Ax = 0$  的基础解系所包含解向量的个数为  $n - r(A) = n - (n-1) = 1$ ，故必有

$$r(b_1, b_2, \dots, b_n) = r(A^*) \leq n - r(A) = 1.$$

即  $r(A^*) \leq 1$ 。

又  $r(A) = n-1$ ，知必有非零的  $n-1$  阶子式，从而必有非零的代数余子式，即有  $A^* \neq 0$ 。

可见  $r(A^*) \geq 1$ 。

故  $r(A^*) = 1$ 。

#### 二、综合题解析

【例 4.21】已知四阶方阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为 4 维列向量，其中  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性

无关,  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ . 如果  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 求线性方程组  $Ax = \beta$  的通解.

【解】方法一: 令  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ , 则由  $Ax = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \beta$

得  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ,

将  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$  代入上式, 整理后得

$$(2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0.$$

由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  为任意常数.

方法二: 由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关和  $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4$ , 知  $A$  的秩为 3, 因此  $Ax = 0$  的基础解系中只包含一个向量. 由

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0$$

知,  $(1, -2, 1, 0)^T$  为齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个解, 所以其通解为  $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $k$  为任意常数.

再由  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  知,  $(1, 1, 1, 1)^T$  为非齐次线性方

程组  $Ax = \beta$  的一个特解, 于是  $Ax = \beta$  的通解为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

【例 4.22】如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

的系数矩阵的秩等于矩阵

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{bmatrix}$$

的秩,则该方程组有解.

【证】要证一个非齐次线性方程组有解,只要证明  $r(A) = r(\bar{A})$  即可,方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix},$$

显然有

$$r(A) \leq r(\bar{A}) \leq r(C), \text{ 又 } r(A) = r(C),$$

所以  $r(A) = r(\bar{A})$ , 故方程组有解.

【例 4.23】设  $Ax = b$  的导出组的基础解系为  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}, \eta^*$  为  $Ax = b$  的一个特解, 证明:

(1)  $\eta^*, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}$  线性无关; (2)  $\eta^*, \eta^* + \zeta_1, \eta^* + \zeta_2, \dots, \eta^* + \zeta_{n-r}$  线性无关.

【证】(1) 设存在  $n-r+1$  个常数  $k_0, k_1, \dots, k_{n-r}$  使得

$$k_0 \eta^* + k_1 \zeta_1 + \cdots + k_{n-r} \zeta_{n-r} = 0, \quad (1)$$

因为  $A\zeta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-r), A\eta^* = b$ ,

所以关系式的两边同时左乘  $A$ , 使得

$$k_0 A\eta^* + k_1 A\zeta_1 + \cdots + k_{n-r} A\zeta_{n-r} = 0.$$

$$\Rightarrow k_0 b = 0 \Rightarrow k_0 = 0.$$

于是

$$(1) \Rightarrow k_1 \zeta_1 + k_2 \zeta_2 + \cdots + k_{n-r} \zeta_{n-r} = 0,$$

因为  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}$  线性无关, 所以  $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$ .

故  $\eta^*, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}$  线性无关.

(2) 设存在  $n-r+1$  个常数  $C_0, C_1, \dots, C_{n-r}$ , 使得

$$C_0 \eta^* + C_1 (\eta^* + \zeta_1) + C_2 (\eta^* + \zeta_2) + \cdots + C_{n-r} (\eta^* + \zeta_{n-r}) = 0,$$

整理, 得

$$(C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-r}) \eta^* + C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2 + \cdots + C_{n-r} \zeta_{n-r} = 0, \quad (2)$$

两边左乘  $A$ , 使得

$$(C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-r}) b = 0 \Rightarrow C_0 + C_1 + \cdots + C_{n-r} = 0. \quad (3)$$

于是

$$(2) \Rightarrow C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2 + \cdots + C_{n-r} \zeta_{n-r} = 0,$$

因为  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}$  线性无关, 所以  $C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-r} = 0$ .

将它们代入 (3) 得  $C_0 = 0$ . 故  $\eta^*, \eta^* + \zeta_1, \eta^* + \zeta_2, \dots, \eta^* + \zeta_{n-r}$  线性无关.

【例 4.24】 $n$  阶方阵  $A$  的  $n$  个列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $n$  阶方阵  $B$  的  $n$  个列向量为  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$ . 试问: 当  $r(A) = n$  时, 齐次线性方程组  $Bx = 0$  是否有非零解? 并证明结论.

【解】 $B = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = AC,$



因为  $r(A) = n$ , 所以

$$Bx = 0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow 1 + (-1)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow n \text{ 是偶数.}$$

**【例 4.25】** 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 且  $A_{11} \neq 0$ , 证明:

方程组  $Ax = b (b \neq 0)$  有无穷多解的充要条件是  $b$  为  $A^*x = 0$  的解.

**【证】** 必要性.

因为  $Ax = b$  有无穷多解, 所以  $r(A) < n$ , 即  $|A| = 0$ ,

有

$$A^*b = A^*Ax = |A|x = 0,$$

即  $b$  是  $A^*x = 0$  的解.

充分性.

因为  $b$  是  $A^*x = 0$  的解, 即  $A^*x = 0$  有非零解.

所以  $r(A^*) < n$ . 又  $A_{11} \neq 0$ , 所以  $r(A^*) = 1$ ,  $r(A) = n - 1$ .

同时由  $A^*A = |A|E = 0$ ,  $A^*b = 0$ ,

令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $A^*x = 0$  的解,

因为  $A_{11} \neq 0$ , 所以  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  线性无关, 所以  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  是方程组  $A^*x = 0$  的基础解系,

$b$  可由  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  线性表示, 即  $b$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  线性表示,

因为  $Ax = b$  有解, 又  $r(A) = n - 1$ , 所以  $Ax = b$  有无穷多解.

**【例 4.26】** 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ , 求一秩为 2 的三阶方阵  $B$ , 使  $AB = 0$ .

**【分析】** 易知  $r(A) = 1$ , 于是  $Ax = 0$  的解空间的维数为  $3 - 1 = 2$ , 故可取  $Ax = 0$  的两个线性无关的解向量作为  $B$  的前两列, 而  $B$  的第三列可取  $Ax = 0$  的任一解向量(如零向量), 此时  $r(B) = 2$ .

**【解】** 方程组  $Ax = 0$  的基础解系为  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 故所求矩阵  $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**【例 4.27】** 若线性方程组 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

的全部解都是方程  $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0$  的解, 证明: 向量  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  可以被向量组  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) (i = 1, 2, \dots, m)$  线性表出.

**【证】** 考虑方程组 (I) 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

及方程组 (II) 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

由已知(I)的解都是(II)的解,显然(II)的解也都是(I)的解,即(I)与(II)是同解方程组,故其系数矩阵等秩,即

$$\text{秩}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \text{秩}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta).$$

从而  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表示.

【例 4.28】设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = c_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n = c_n \end{cases}. \quad (5)$$

其中,  $A_{ij}$  为  $a_{ij}$  在行列式  $|A| = |(a_{ij})_{n \times n}|$  中的代数余子式;  $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ;  $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  不全为 0. 证明方程组 (4) 有唯一解的充要条件是方程组 (5) 有唯一解.

【证】方程组 (4) 有唯一解的充要条件:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

方程组 (5) 有唯一解的充要条件:

$$|B| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\text{因为 } B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = (A^*)^T, \text{ 而 } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, A^* = |A| A^{-1},$$

$$\text{所以 } B = (A^*)^T = (|A| A^{-1})^T = |A| (A^{-1})^T, |B| = ||A| (A^{-1})^T| = |A|^{n-1}.$$

于是可知命题成立.

【例 4.29】设矩阵  $A_{n \times n}$  的秩为  $r$ , 线性方程组

$$Ax = b \quad (6)$$

(其中  $x, b$  为列向量,  $b \neq 0$ ) 有特解  $\zeta_0$ , 它的导出方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系为  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}$ , 证明:

(1) 向量  $\eta_0 = \zeta_0, \eta_1 = \zeta_0 + \zeta_1, \dots, \eta_{n-r} = \zeta_0 + \zeta_{n-r}$  是方程组 (6) 的线性无关解向量;

(2)  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$  的一切线性组合

$$k_0 \eta_0 + k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r}, \quad (\text{其中 } k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = 1)$$

是方程组 (6) 的全部解.

【证】(1) 因为  $A\zeta_0 = b, A\zeta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n-r$ , 所以

$$A\eta_i = A(\zeta_0 + \zeta_i) = A\zeta_0 + A\zeta_i = b (i = 1, 2, \dots, n-r),$$

因此  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$  是方程组 ⑥ 的解. 令

$$\lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} = 0,$$

$$\text{则} \quad (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r}) \eta_0 + \lambda_1 \zeta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \zeta_{n-r} = 0, \quad (7)$$

因  $A\eta_0 = b \neq 0$ , 由 ⑦ 得

$$A[(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r}) \eta_0 + \lambda_1 \zeta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \zeta_{n-r}] = 0,$$

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r}) b = 0,$$

所以有  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r} = 0$ ,

于是  $\lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 + \dots + \lambda_{n-r} \zeta_{n-r} = 0$ ,

但  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-r}$  线性无关, 从而  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ , 进而有  $\lambda_0 = 0$ , 可见  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$  线性无关.

(2) 由(1)知  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$  是方程组 ⑥ 的解, 故当  $k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = 1$  时, 易知  $k_0 \eta_0 + k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r}$  是方程组 ⑦ 的解, 因为

$$A(k_0 \eta_0 + k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r}) = (k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r}) b = b,$$

另一方面, 令  $\eta$  为方程组 ⑥ 的任一解, 则  $\eta - \zeta_0$  为 ⑥ 的导出组的解, 于是

$$\eta - \zeta_0 = k_1 \zeta_1 + k_2 \zeta_2 + \dots + k_{n-r} \zeta_{n-r},$$

令  $k_0 = 1 - k_1 - \dots - k_{n-r}$ , 即  $k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = 1$ ,

由于  $\eta_0 = \zeta_0, \eta_1 = \zeta_0 + \zeta_1, \dots, \eta_{n-r} = \zeta_0 + \zeta_{n-r}$ ,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \eta &= (k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r}) \zeta_0 + k_1 \zeta_1 + \dots + k_{n-r} \zeta_{n-r} \\ &= k_0 \zeta_0 + k_1 (\zeta_0 + \zeta_1) + \dots + k_{n-r} (\zeta_0 + \zeta_{n-r}) \\ &= k_0 \eta_0 + k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r}, \end{aligned}$$

这里  $k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = 1$ .

例 (1) 本题是对非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解的结构作进一步的分析和讨论, 即非齐次线性方程组一定存在着  $n-r+1$  个线性无关的解向量.

(2) 对非齐次线性方程组  $Ax = b$ , 有时也把题中所给的  $n-r+1$  个解称为  $Ax = b$  的基础解系, 所不同的是它的线性组合只有当线性组合系数之和为 1 时, 才是方程组的解.

### 习题四

#### 1. 填空题.

(1) 在齐次线性方程组  $A_{m \times n} x = 0$  中, 若秩  $(A) = k$  且  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  是它的一个基础解系, 则  $r =$  \_\_\_\_\_; 当  $k =$  \_\_\_\_\_ 时, 此方程组只有零解.

(2) 若  $n$  元线性方程组有解, 且其系数矩阵的秩为  $r$ , 则当 \_\_\_\_\_ 时, 方程组有唯一解; 当 \_\_\_\_\_ 时, 方程组有无穷多解.

$$(3) \text{ 齐次线性方程组 } \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解, 则  $k$  应满足的条件是 \_\_\_\_\_.

(4) 设  $A$  为四阶方阵, 且秩  $(A) = 2$ , 则齐次线性方程组  $A^* x = 0$  ( $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵) 的基础解系所包含的线性无关解向量的个数为 \_\_\_\_\_.

(5) 设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $Ax = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

(6) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解, 若  $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_s\alpha_s$  也是  $Ax = b$  的一个解, 则  $C_1 + C_2 + \dots + C_s =$ \_\_\_\_\_.

(7) 方程组  $Ax = 0$  以  $\eta_1 = (1, 0, 2)^T, \eta_2 = (0, 1, -1)^T$  为其基础解系, 则该方程的系数矩阵为\_\_\_\_\_.

(8) 设  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则使方程组有解的所有 } b \text{ 是} \underline{\hspace{2cm}}.$$

(9) 设  $A, B$  为三阶方阵, 其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ , 且已知存在三阶方阵  $x$ ,

使得  $Ax = B$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

## 2. 选择题.

(1) 要使  $\zeta_1 = (1, 0, 1)^T, \zeta_2 = (-2, 0, 1)^T$  都是线性方程组  $Ax = 0$  的解, 只要系数矩阵  $A$  为

A.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .    B.  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .    C.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .    D.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ . 【    】

(2) 设  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 则该方程组的基础解系还可以表成

A.  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  的一个等价向量组.    B.  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  的一个等秩向量组.  
C.  $\zeta_1, \zeta_2 + \zeta_1, \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$ .    D.  $\zeta_1 - \zeta_2, \zeta_2 - \zeta_3, \zeta_3 - \zeta_1$ . 【    】

(3)  $n$  阶方阵  $A$  可逆的充分必要条件是

A. 任一行向量都是非零向量.    B. 任一列向量都是非零向量.  
C.  $Ax = b$  有解.    D. 当  $x \neq 0$  时,  $Ax \neq 0$ , 其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . 【    】

## 3. 计算证明题.

(1) 求解下列线性方程组:

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

(2) 求方程组  $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5. \\ -x_1 - 9x_2 \quad \quad -4x_4 = 17 \end{cases}$

的通解, 并求满足方程组及条件  $5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1$  的全部解.

(3) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 + mx_3 = k \end{cases}$$

问  $m, k$  为何值时, 方程组有唯一解? 有无穷多解? 在有无穷多组解时, 求出一般解.

(4) 问  $\lambda$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$
 有解, 并求出解的一般形式.

(5) 问  $a$  为何值时, 线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$
 有解, 并求出解的一般形式.

(6) 已知  $\alpha_1 = (1, 2, 0)$ ,  $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)$ ,  $\alpha_3 = (-1, b+2, a+2b)$  及  $\beta = (1, 3, -3)$ .

①  $a, b$  为何值时,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合.

②  $a, b$  为何值时,  $\beta$  有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的唯一的线性表示, 并写出该表示式.

(7) 知方程组 
$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$$
 与 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

同解, 试确定  $a, b, c$  之值.

(8) 已知下列非齐次线性方程组 (I)、(II)

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}; \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases},$$

① 求解方程组 (I), 用其导出组的基础解系表示通解;

② 当方程组 (II) 中的参数  $m, n, t$  为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 同解.

(9) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $R$  为  $m \times n$  矩阵,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $B$  为  $m \times m$  矩阵, 求证: 若  $B$  可逆且  $BA$  的行向量都是方程组  $Rx = 0$  的解, 则  $A$  的每个行向量也都是该方程组的解.

(10)  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 秩为  $m$ ;  $B$  为  $n \times (n-m)$  矩阵, 秩为  $n-m$ ; 又知  $AB = 0$ ,  $\alpha$  是满足条件  $A\alpha = 0$  的一个  $n$  维列向量. 证明: 存在唯一的一个  $n-m$  维列向量  $\beta$  使得  $\alpha = B\beta$ .

(11) 矩阵  $A_{m \times n}$ , 证明:  $Ax = b$  有解的充要条件是  $A^T Z = 0$ , 则  $b^T Z = 0$ .

(12) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且  $A \neq 0$ . 证明: 存在一个  $n$  阶非零矩阵  $B$ , 使  $AB = 0$  的充分必要条件是  $|A| = 0$ .

(13) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 若对任意的  $n$  维向量  $x$ , 都有  $Ax = 0$ , 则  $A = 0$ .

(14) 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & c & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . 如果  $\eta$  是方程组  $Ax = b$  的一个解, 试求

$Ax = b$  的通解.

(15) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ . 如果矩阵方程  $Ax = B$  有解, 但解不唯一, 试确定

参数  $a$ .

(16) 设  $\eta_1, \eta_2$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的两个不同解 ( $A$  是  $m \times n$  矩阵),  $\zeta$  是对应的齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个非零解, 证明:

① 向量组  $\eta_1, \eta_1 - \eta_2$  线性无关;

② 若  $r(A) = n - 1$ , 则向量组  $\zeta, \eta_1, \eta_2$  线性相关.

### 参 考 答 案

1. (1)  $n - k, n$ ; (2)  $r = n, r < n$ ; (3)  $k \neq \frac{3}{5}$ ; (4) 4; (5)  $k(1, 1, 1)^T, k$  为任意常数; (6) 1;

(7)  $[-2, 1, 1]$ , 注: 答案不唯一; (8)  $b = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $k_1, k_2, k_3$  为任意常数;

(9)  $k = -2$ .

2. (1) D (2) C (3) D

3.

$$(1) \textcircled{1} x = k_1 \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \textcircled{2} x = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3) 当  $m \neq -1$  时, 方程组有唯一解; 当  $m = -1$  且  $k \neq 1$  时, 方程组无解; 当  $m = -1$  而  $k = 1$  时,  $\text{秩}(A) = \text{秩}(\bar{A}) = 2 < 3$ , 方程组有无穷多组解.

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \text{ 当 } \lambda = 1 \text{ 时, 方程组有解} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(5) 当  $a = 1$  时, 原方程组有解, 且解的一般形式为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(6)  $a=0, b$  为任何值时, 方程组无解,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合;  $a \neq b$ , 且  $a \neq 0$  时, 有唯一解  $x_1 = 1 - \frac{1}{a}, x_2 = \frac{1}{a}, x_3 = 0$ ,  $\beta$  有  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的唯一线性表示式, 且

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3.$$

(7) 把 ② 的特解代入 ①, 即得  $a=1, b=4, c=3$ .

(8)  $\mathbf{x} = (-2, -4, -5, 0) + k(1, 1, 2, 1)$ . 将  $\mathbf{x}$  代入 (II) 中的三个方程, 可得  $m=2, n=4, t=6$ .

(9) ~ (12) 略.

(13) 提示: 要证  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , 只需证秩  $(\mathbf{A}) = 0$ , 或者取  $\mathbf{x}$  分别为单位矩阵的各列  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , 则  $\mathbf{A}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] = \mathbf{0}$ , 又  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$  可逆, 从而有  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

$$(14) \text{ 当 } a=c \text{ 且 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } \mathbf{x} = \boldsymbol{\eta} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } \mathbf{x} = \boldsymbol{\eta} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(15)  $a=-2$ .

(16) ① 用定义 ②  $\zeta, \eta_1 - \eta_2$  线性相关, 由此可推知结论.

## 第五章 特征值和特征向量

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、矩阵的特征值和特征向量的概念

设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $\lambda$  是一个数, 若存在一个  $n$  维非零列向量  $x$  使关系式

$$Ax = \lambda x, \quad ①$$

成立, 则称  $\lambda$  为  $A$  的一个特征值, 相应的非零列向量  $x$  称为  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量.

$$① \text{ 式可等价地写为 } (\lambda E - A)x = 0, \quad ②$$

② 式存在非零列向量的充要条件是它的系数行列式

$$|\lambda E - A| = 0,$$

称矩阵  $\lambda E - A$  为  $A$  的特征矩阵.

称行列式  $|\lambda E - A|$  为  $A$  的特征多项式.

$|\lambda E - A| = 0$  称为  $A$  的特征方程, 它的根称为  $A$  的特征根,  $A$  的特征根即  $A$  的特征值.

- 注** (1) 在讨论矩阵  $A$  的特征值问题时,  $A$  必须是方阵, 其特征值可能是实数, 也可能是复数.
- (2) 如果  $x$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $x$  一定是非零向量, 且对任意非零常数  $k \neq 0$ ,  $kx$  也是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量.
- (3) 如果  $x_1, x_2$  都是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 且当  $k_1 x_1 + k_2 x_2 \neq 0$  时,  $k_1 x_1 + k_2 x_2$  也是  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量.
- (4) 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是方阵  $A$  的两个不同的特征值,  $x_1, x_2$  是  $A$  的分别属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 则  $x_1 + x_2$  不是  $A$  的特征向量.

**【例 5.1】** 设向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$  是方阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  的逆阵所对应的特征向量, 求常数  $k$ .

**【解】** 由题设可设  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $A^{-1}$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则有

$$\begin{aligned} A^{-1}\alpha &= \lambda\alpha \Rightarrow \alpha = \lambda(A\alpha) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3+k \\ 2+2k \\ 3+k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda(3+k) \\ k = \lambda(2+2k) \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{3+k}{2+2k} \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \text{ 或 } k = 1. \end{aligned}$$

#### 二、相似矩阵及其性质

设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得



$$B = P^{-1}AP,$$

成立,则称矩阵  $A$  与  $B$  相似,记为  $A \sim B$ .

如果  $A \sim B$ ,则有

- (1)  $A^T \sim B^T$ ;
- (2)  $A^{-1} \sim B^{-1}$  (若  $A, B$  均可逆);  $A^* \sim B^*$ ,
- (3)  $A^k \sim B^k$  ( $k$  为正整数);
- (4)  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ , 从而  $A, B$  有相同的特征值; 但特征向量不一定相同.
- (5)  $|A| = |B|$ , 从而  $A, B$  同时可逆或同时不可逆;
- (6) 秩( $A$ ) = 秩( $B$ ).

**注** 若  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ , 则  $A, B$  不一定相似.

### 三、矩阵可相似对角化的充要条件

若  $n$  阶矩阵  $A$  与对角矩阵  $\Lambda$  相似,则称  $A$  可以相似对角化,记为  $A \sim \Lambda$ ,并称  $\Lambda$  是  $A$  的相似标准形.

$A$  与对角矩阵相似的充要条件:  $n$  阶矩阵  $A$  与对角矩阵相似  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

由于不同特征值所对应的特征向量线性无关,因此若  $A$  有  $n$  个互不相等的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则  $A$  必与对角矩阵相似.

设  $\alpha_i$  为对应于特征值  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的特征向量,则有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n)$$

$$= (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \dots, \lambda_n \alpha_n) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ 为对角矩阵, 则 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

**注**  $A$  可对角化的充要条件是对  $A$  的任一特征根  $\lambda_i$ , 其重数 (设为  $k_i$ ) 与对应线性无关特征向量的个数相同, 即  $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$ .

### 四、实对称矩阵及其性质

设  $A$  为实对称矩阵 ( $A^T = A$ ), 则

- (1)  $A$  的特征值为实数, 且  $A$  的特征向量为实向量.
- (2)  $A$  的不同特征值对应的特征向量必定正交.
- (3)  $A$  一定有  $n$  个线性无关的特征向量, 从而  $A$  相似于对角矩阵, 且存在正交矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的特征值.

**注** (1) 当  $A$  有  $n$  个不同特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  时, 只需将对应特征向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  单位化得

$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1}, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}, \dots, \beta_n = \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}$ , 令  $Q = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ , 即为所求正交矩阵.

(2) 当  $A$  的特征值有重根  $\lambda_i$  时, 则需先将重根对应特征向量正交化 (Schmidt 正交化方法), 再次所得正交向量组单位化, 并以此作为矩阵  $Q$  的列向量, 则  $Q$  即为所求正交矩阵.

## 五、重要公式与结论

1. 设  $\lambda$  是方阵  $A$  的特征值, 则矩阵  $kA, A^2, aA + bE, A^m, A^{-1}, A^*$  分别有特征值为:  $k\lambda, \lambda^2, a\lambda + b, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$ .

设  $x$  是  $A$  对应  $\lambda$  的特征向量, 则  $x$  也是  $kA, A^2, aA + bE, A^m, A^{-1}, A^*$  对应特征值  $k\lambda, \lambda^2, a\lambda + b, \lambda^m, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$  的特征向量.

注 (1)  $A$  与  $A^T$  有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

(2)  $A^m$  的特征向量不一定是  $A$  的特征向量.

2. 若  $A \sim B, C \sim D$ , 则  $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ .

3. 若  $A \sim B$ , 则  $f(A) \sim f(B)$ ,  $|f(A)| = |f(B)|$ , 其中  $f(A)$  为关于  $n$  阶方阵  $A$  的多项式.

4. 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  的特征值, 则  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$ .

注 由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

可得

$$\begin{aligned} & \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \end{aligned}$$

比较同次幂的系数可得上述结论.

5. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  的秩  $r(A) = 1$ , 则  $A$  的  $n$  个特征值为  $\lambda_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ .

6. 若  $A$  为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数 (重根重复计算) = 秩  $(A)$ .

【例 5.2】设  $A$  为 3 阶方阵,  $A$  的逆阵的特征值为 1, 2, 3, 设  $A_{ij}$  为  $A$  的代数余子式, 求  $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ .

【解】由  $A^*$  的定义可知,  $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ .

$A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda}$ , 其中  $\lambda$  是  $A$  的特征值.

由题设可知  $A^{-1}$  的特征值为 1, 2, 3, 则  $A$  的特征值为  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ , 于是  $|A| = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ,

所以  $A^*$  的特征值为  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ , 故

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量

**提示** 一般通过  $|\lambda E - A| = 0$  直接计算即可. 若  $n \geq 4$ , 应注意能否分块.

设  $\lambda$  是  $A$  的一个特征值,  $x$  是  $A$  的属于  $\lambda$  的特征向量的充要条件是:  $\lambda$  为特征方程  $|\lambda E - A| = 0$  的根,  $x$  是齐次方程组  $(\lambda E - A)x = 0$  的非零解.

其计算步骤如下:

- (1) 计算  $|\lambda E - A|$ ;
- (2) 求  $|\lambda E - A| = 0$  的全部根, 即为  $A$  的全部特征值;
- (3) 对于每一个特征值  $\lambda_0$ , 求出  $(\lambda_0 E - A)x = 0$  的一个基础解系  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ , 其中  $r$  为矩阵  $\lambda_0 E - A$  的秩, 则  $A$  的属于  $\lambda_0$  的全部特征向量为  $k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r}$ , 其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  是不全为零的任意常数.

**例** 若  $|A| = 0$ , 则  $\lambda = 0$  为  $A$  的特征值, 且  $Ax = 0$  的基础解系即为属于  $\lambda = 0$  的线性无关的特征向量.

**【例 5.3】** 设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(1) 试求矩阵  $A$  的特征值;

(2) 利用(1)的结果, 求矩阵  $E + A^{-1}$  的特征值, 其中  $E$  是三阶单位矩阵.

**【解】** (1) 因为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 (\lambda+5), \end{aligned}$$

故矩阵  $A$  的特征值为:  $1, 1, -5$ .

(2) 设矩阵  $A$  对应于特征值  $\lambda$  的特征向量为  $x$ , 则

$$Ax = \lambda x,$$

于是  $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$ ,  $(E + A^{-1})x = Ex + A^{-1}x = (1 + \lambda^{-1})x$ , 故知  $1 + \lambda^{-1}$  是矩阵  $E + A^{-1}$

的特征值, 将  $\lambda = 1, 1, -5$  代入  $1 + \lambda^{-1}$ , 可得矩阵  $E + A^{-1}$  的特征值为  $2, 2, \frac{4}{5}$ .

注 若由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5$

求  $|\lambda E - A| = 0$  的根, 需要分解因式, 但三次多项式没有一般因式分解方法, 给计算带来困难. 或者说在计算这个三阶行列式时, 若直接展开得一个三次多项式, 如果不能分解因式 (或不会用试根法等分解因式), 往往特征值就求不出来, 若能在计算过程中就把因子 (一次因式) 分解出来, 这是最理想的, 通常也是可行的, 可以如下考查行列式  $|\lambda E - A|$ :

(1) 把  $|\lambda E - A|$  的各行 (或各列) 加起来, 若相等, 则把相等的部分提出来 (一次因式) 后, 剩下部分是一个二次多项式, 肯定可以分解因式.

(2) 把  $|\lambda E - A|$  的某一行 (或某一列) 中不含  $\lambda$  的两个元素之一化为一零, 往往会出现公因子, 本例即是这种情形.

【例 5.4】求矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$  的实特征值及对应的特征向量.

【分析】一个实矩阵的特征值、特征向量都可能是复数, 但注意本题只要求选出实特征值并求其对应的特征向量.

【解】把  $|\lambda E - A|$  的各列加到第一列, 得

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ \lambda-1 & \lambda-2 & -2 \\ \lambda-1 & 3 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 1 & 3 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2 - 8\lambda + 20), \end{aligned}$$

有唯一实特征值  $\lambda = 1$ , 对应  $\lambda = 1$ , 由  $(1 \cdot E - A)x = 0$

$$\begin{cases} -2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解得  $x_1 = x_2 = x_3$ , 基础解系为  $\eta = (1, 1, 1)^T$ , 故对应于  $\lambda = 1$  的全部特征向量为  $k(1, 1, 1)^T$ , 其中  $k$  为非零常数.

## 题型二 求抽象矩阵的特征值与特征向量

提示 若  $n$  阶方阵  $A$  满足  $f(A) = 0$ , 则由  $Ax = \lambda x, x \neq 0$ , 知  $A$  的任一特征值  $\lambda$  必满足  $f(\lambda) = 0$ .

【例 5.5】假设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 3A + 2E = O$ , 证明其特征值只能取值 1 或 2.

【证】设  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 对应特征向量设为  $x \neq 0$ , 则

$$Ax = \lambda x,$$

由已知

$$A^2 - 3A + 2E = O$$

得

$$O = (A^2 - 3A + 2E)x = A^2x - 3Ax + 2Ex = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x,$$

因为  $x \neq 0$ , 故  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , 解得  $\lambda = 1$  或  $\lambda = 2$ .

**【例 5.6】** 设  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$  都是非零向量, 且满足条件  $\alpha^T \beta = 0$ , 记  $n$  阶矩阵  $A = \alpha \beta^T$ , 求 (1)  $A^2$ ; (2) 矩阵  $A$  的特征值和特征向量.

**【解】** (1) 由

$$A = \alpha \beta^T \text{ 和 } \alpha^T \beta = 0,$$

有

$$A^2 = AA = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)\beta^T = 0,$$

即  $A^2 = 0$ .

(2) 设  $\lambda$  为  $A$  的任一特征值,  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量为  $x (x \neq 0)$ , 则  $Ax = \lambda x, x \neq 0$ , 于是

$$A^2 x = \lambda Ax = \lambda^2 x,$$

因为  $A^2 = 0$ , 所以  $\lambda^2 x = 0, x \neq 0$ . 故必有  $\lambda = 0$ , 即矩阵  $A$  的特征值全为零.

不妨设向量  $\alpha, \beta$  中分量  $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ , 对齐次线性方程组  $(0E - A)x = 0$  的系数矩阵施以初等行变换:

$$-A = \begin{bmatrix} -a_1 b_1 & -a_1 b_2 & \cdots & -a_1 b_n \\ -a_2 b_1 & -a_2 b_2 & \cdots & -a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n b_1 & -a_n b_2 & \cdots & -a_n b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

因此可得该方程组的基础解系为

$$\alpha_1 = \left(-\frac{b_2}{b_1}, 1, 0, \dots, 0\right)^T, \alpha_2 = \left(-\frac{b_3}{b_1}, 0, 1, \dots, 0\right)^T, \dots, \alpha_{n-1} = \left(-\frac{b_n}{b_1}, 0, 0, \dots, 1\right)^T.$$

于是,  $A$  的属于特征值  $\lambda = 0$  的全部特征向量为

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{n-1} \alpha_{n-1}, \quad (k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \text{ 是不全为零的任意常数}).$$

**【注】** 若  $r(A) = 1$ , 则  $A$  一定可分解为  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n]$ , 且

$$A^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)A,$$

从而其特征值为  $\lambda_1 = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ .

**【例 5.7】** 设  $A$  为  $n$  阶实矩阵,  $AA^T = E, |A| < 0$ , 试求  $(A^{-1})^*$  的一个特征值.

**【解】** 由于  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ , 故可先算  $A^*$  的特征值. 而这需算出  $A$  的特征值及  $|A|$ .

因为  $AA^T = E$ , 所以  $|A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$ , 又  $|A| < 0$ , 所以  $|A| = -1$ .

而  $|A + E| = |A + AA^T| = |A| |A^T + E| = -|A + E| \Rightarrow |A + E| = 0$ , 即  $\lambda = -1$  是  $A$  的一个特征值, 于是可得  $A^*$  的一个特征值为  $\frac{|A|}{\lambda} = 1$ , 所以  $(A^{-1})^*$  的一个特征值为 1.

### 题型三 特征值与特征向量的逆问题

**【提示】** 若已知特征向量  $\zeta$ , 一般用  $A\zeta = \lambda_0 \zeta$  进行分析; 若只知特征值  $\lambda_0$ , 一般用  $|\lambda_0 E - A| = 0$  进行讨论.

**【例 5.8】** 已知  $\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$  的一个特征向量,

(1) 试确定参数  $a, b$  及特征向量  $\zeta$  所对应的特征值;

(2) 问  $A$  能否相似于对角矩阵?说明理由.

【分析】已知矩阵及其特征向量,反求参变量,可用定义法: $A\zeta = \lambda\zeta$ ,得到关于  $\lambda, a, b$  的方程组,由此可解出  $\lambda, a$  和  $b$ , $A$  能否相似于对角矩阵,充要条件是能否有 3 个线性无关的特征向量,求出参数  $a, b$  后,可直接计算  $A$  的特征值及线性无关的特征向量的个数.

【解】(1) 由  $A\zeta = \lambda\zeta$ ,得

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{即} \begin{cases} \lambda = 2 - 1 - 2, \\ \lambda = 5 + a - 3, \\ -\lambda = -1 + b + 2. \end{cases}$$

解得  $\lambda = -1, a = -3, b = 0$ .

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3,$$

知  $\lambda = -1$  是  $A$  的三重特征值.

$$\text{由于} \quad \text{秩}(-E - A) = \text{秩} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

从而  $\lambda = -1$  对应的线性无关的特征向量个数为  $3 - \text{秩}(-E - A) = 1$ ,故  $A$  不能相似于对角矩阵.

【例 5.9】设三阶矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ ,对应的特征向量依次为:

$\zeta_1 = (1, -1, 0)^T, \zeta_2 = (1, -1, 1)^T, \zeta_3 = (0, 1, -1)^T$ ,求矩阵  $A$ .

【分析】这是关于特征值与特征向量的逆问题,即已知  $A$  的特征值、特征向量反求矩阵  $A$ ,可用定义求解.

【解】由定义有

$$A\zeta_1 = \lambda_1\zeta_1, A\zeta_2 = \lambda_2\zeta_2, A\zeta_3 = \lambda_3\zeta_3,$$

于是

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (A\zeta_1, A\zeta_2, A\zeta_3) = (\lambda_1\zeta_1, \lambda_2\zeta_2, \lambda_3\zeta_3),$$

即有

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

故所求

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

【例 5.10】已知  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$  是实对称矩阵  $A$  的三个特征值.且对应于  $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$  的特征向量为  $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (1, -2, 1)^T$ ,求  $A$  对应于  $\lambda_1 = 6$  的特征向量及矩阵  $A$ .

【分析】这是已知全部特征值和部分特征向量反求矩阵  $A$  的问题.关键在于利用已知条件中  $A$  为对称矩阵,而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交,依此即可求解.

【解】设  $A$  对应于  $\lambda_1 = 6$  的特征向量是  $\alpha_1 = [x_1, x_2, x_3]^T$ ,由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量彼此正交,故有  $(\alpha_1^T, \alpha_2) = (\alpha_1^T, \alpha_3) = 0$ ,即

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

解得  $x_1 = x_2 = x_3$ , 取  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ , 即是矩阵  $A$  属于  $\lambda_1 = 6$  的特征向量.

进一步, 由  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \lambda_3 \alpha_3)$ ,

$$\text{得} \quad A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

【例 5.11】设  $A$  为三阶实对称矩阵, 其特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , 属于  $\lambda_1$  的特征向量为  $\xi_1$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{求 } A.$$

【分析】本题已知实对称矩阵的特征值和其中一个特征向量, 反求矩阵. 求实对称矩阵的正交的特征向量, 有时用观察法求解会更便捷.

【解】设  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ , 由于实对称阵不同特征值对应的特征向量相互正交, 故

$$\xi_1^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \text{即 } x_2 + x_3 = 0,$$

上式中  $x_1$  的系数为零, 为了使得  $\xi_2, \xi_3$  正交, 可取  $x_1$  为 1 或 0, 则有

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

现正交化  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 得

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}}, \eta_2 = \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\sqrt{2}}.$$

令  $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , 则  $P^{-1} = P^T$ , 于是有

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PAP^{-1} = PAP^T \\ \Rightarrow A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因为不同特征值对应的特征向量是正交的, 所以我们利用观察法一般求解特征值为重根的

情况,最常见的情况为求 3 阶对称阵 2 重根所对应的特征值,具体如下:

设所求特征向量为  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ , 则根据题设条件(如,利用不同特征值对应的特征向量正交或  $(A - \lambda E)x = 0$ ) 可得方程

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

(1) 若  $a, b, c$  有一为零,不妨设  $a = 0$ , 则方程为  $bx_2 + cx_3 = 0$ , 此时可取  $x_1 = 1$  或 0, 则可得正交的特征向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{bmatrix};$$

(2) 若  $a, b, c$  有两个为零,不妨设  $a = b = 0$ , 则方程为  $cx_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ , 此时只要保证  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  部分正交即可, 则可得正交的特征向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

(2) 若  $a, b, c$  均非零, 可先取其中一个分量为零, 不妨取  $x_1 = 0$ , 得一特征向量  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{bmatrix}$ ,

另外一个特征向量只需考虑  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  的  $x_2, x_3$  部分, 使其与  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{bmatrix}$  正交, 可取  $\xi_2 =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b^2 + c^2}{a} \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

#### 题型四 相似的判定及其逆问题

**提示** (1) 若  $A \sim A, B \sim A$ , 则可推出  $A \sim B$ .

(2) 若  $A \sim B$ , 则  $|A| = |B|$ ,  $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii}$ , 且对  $\forall \lambda$ , 有  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ .

**【例 5.12】** 设有三阶方阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  和  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ , 试判断  $A, B$  是否相似, 若相似, 求

出可逆矩阵  $M$ , 使得  $B = M^{-1}AM$ .

**【分析】** 若直接由  $B = M^{-1}AM$  求  $M$ , 显然是相当复杂的, 可以变换一下思路: 若  $A, B$  都相似于同一对角矩阵, 则也可证得  $A$  与  $B$  相似.

**【解】** 由  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1),$



得  $A$  的特征值为:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ .

$$\text{又由 } |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

得  $B$  的特征值为:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ .

$A$  与  $B$  均有三个不相同的特征值, 因此  $A$  与  $B$  同时与对角矩阵  $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$  相似, 由相似关

系的对称性与传递性知  $A \sim B$ .

又对应特征值  $\lambda = 2, 1, -1$ ,  $A$  有特征向量分别为

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \zeta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

对应特征值  $\lambda = 2, 1, -1$ ,  $B$  有特征向量分别为

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{故存在 } P = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = [\eta_1, \eta_2, \eta_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{使得 } P^{-1}AP = Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{从而有 } B = QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}).$$

令  $M = PQ^{-1}$ , 则  $M$  可逆, 且使得  $B = M^{-1}AM$ . 这里

$$M = PQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**【例 5.13】** 设矩阵  $A$  与  $B$  相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

(1) 求  $x$  和  $y$  的值; (2) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

**【分析】** 这是相似矩阵的逆问题, 即已知两矩阵相似, 反过来求矩阵的参数, 根据矩阵  $A, B$  的特征及相似矩阵的性质, 可以考虑用如下办法确定参数  $x, y$ :

① 相似矩阵有相同的特征多项式;

②  $B$  为对角矩阵,  $A$  的特征值即为  $B$  的对角线元素, 依此求出  $x, y$ .

**【解】** (1) 方法一: 因  $A \sim B$ , 故  $A, B$  有相同的特征多项式, 即

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|,$$

得  $(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$ ,

令  $\lambda=0$ , 得,  $2(x-2)=2y$ , 即  $y=x-2$ ;

令  $\lambda=1$ , 得,  $y=-2$ , 从而  $x=0$ .

方法二: 因  $B$  是对角矩阵, 故知  $A$  有特征值  $-1, 2, y$ , 而特征方程为

$$|\lambda E - A| = (\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)],$$

以  $\lambda=-1$  代入得  $x=0$ , 由  $x=0$  知  $A$  有特征方程

$$|\lambda E - A| = (\lambda+2)[\lambda^2-\lambda-2] = (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0,$$

故特征值为  $-1, 2, -2$ , 比较特征值知  $y=-2$ .

(2) 由(1) 知

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$A$  的特征值为:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ , 对应特征向量分别可求出为

$$x_1 = (0, 2, -1)^T, x_2 = (0, 1, 1)^T, x_3 = (1, 0, -1)^T,$$

令

$$P = [x_1, x_2, x_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

则  $P$  可逆, 且  $P^{-1}AP = B$ .

### 题型五 判断 $A$ 是否可对角化

**提示** 方法一:  $n$  阶方阵  $A$  可对角化  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

方法二: 对  $n$  阶方阵  $A$  的任一特征值  $\lambda_i$  (设为  $k_i$  重根), 有  $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$ .

**【例 5.14】** 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,

(1) 求出  $A$  的所有特征值和特征向量;

(2) 判断  $A$  能否对角化? 如能对角化, 则求出相似变换矩阵  $P$ , 使  $A$  化为对角形矩阵.

**【解】** (1) 由

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2) & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4), \end{aligned}$$

得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ ,

对应  $\lambda_1 = 1$ , 解方程  $(\lambda_1 E - A)x = 0$ , 得  $x_1 = (1, -1, -1)^T$ , 则  $\lambda_1$  的全部特征向量为  $k_1 x_1 (k_1 \neq 0)$ ;

对应  $\lambda_2 = 2$ , 解方程  $(\lambda_2 E - A)x = 0$ , 得  $x_2 = (0, 1, -1)^T$ , 则  $\lambda_2$  的全部特征向量为

$k_2 \mathbf{x}_2 (k_2 \neq 0)$ ;

对应  $\lambda_3 = 4$ , 解方程  $(\lambda_3 \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 得  $\mathbf{x}_3 = (2, 1, 1)^T$ , 则  $\lambda_3$  的全部特征向量为  $k_3 \mathbf{x}_3 (k_3 \neq 0)$ .

(2)  $\mathbf{A}$  有三个不同的特征值, 对应的特征向量  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  一定线性无关, 因此  $\mathbf{A}$  可以对角化.

$$\text{令 } \mathbf{P} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

【例 5.15】设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ a+5 & -a-2 & 2a \end{bmatrix}$ , 问  $\mathbf{A}$  能否对角化.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -4 \\ -a-5 & a+2 & \lambda-2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ -2(\lambda-1) & \lambda-1 & 0 \\ -a-5 & a+2 & \lambda-2a \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -a-5 & a+2 & \lambda-2a \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & a+2 & \lambda-2a \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ a-1 & \lambda-2a \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)[\lambda-(2a-1)], \end{aligned}$$

(1) 当  $2a-1 \neq 1, 2$  即  $a \neq 1, \frac{3}{2}$  时,  $\mathbf{A}$  有三个不同的特征值, 所以  $\mathbf{A}$  可对角化.

(2) 当  $2a-1 = 1$ , 即  $a = 1$  时,  $\mathbf{A}$  的特征值为 1 (二重), 2.

$$1 \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } r(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2,$$

所以  $\mathbf{A}$  不能对角化.

(3) 当  $2a-1 = 2$ , 即  $a = \frac{3}{2}$  时,  $\mathbf{A}$  的特征值为 1, 2 (二重),

$$2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } r(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2.$$

所以  $\mathbf{A}$  不能对角化.

综上所述, 当  $a \neq 1, \frac{3}{2}$  时,  $\mathbf{A}$  可对角化.

**【例 5.16】** 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ , 已知  $A$  有三个线性无关的特征向量,  $\lambda = 2$  是  $A$  的二重

特征值. 试求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角形矩阵.

**【解】** 因为  $A$  有三个线性无关的特征向量,  $\lambda = 2$  是  $A$  的二重特征值, 所以  $A$  的对应于  $\lambda = 2$  的线性无关的特征向量有两个, 故秩  $r(2E - A) = 1$ .

经过行的初等变换

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是, 解得  $x = 2, y = -2$ .

矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ , 其特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

由此得特征值:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$ .

解  $(2E - A)x = 0$ , 得对应  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  的特征向量为

$$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (1, 0, 1)^T.$$

解  $(6E - A)x = 0$ , 得对应  $\lambda_3 = 6$  的特征向量为  $\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$ .

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{则 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

**【例 5.17】** 设二阶矩阵  $A$  的行列式为负数, 证明  $A$  可以相似于一个对角矩阵.

**【证】** 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的特征值, 由于  $|A| = \lambda_1\lambda_2 < 0$ , 故  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 即二阶矩阵  $A$  有两个不同的特征值, 从而有两个线性无关的特征向量, 故可以相似于一个对角矩阵.

**【例 5.18】** 设  $\alpha, \beta$  为三维单位列向量, 且  $\alpha^T\beta = 0$ ,

$$\text{令 } A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T, \quad \text{证明: } A \text{ 与 } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \text{ 相似.}$$

**【证】** 因为  $\alpha^T\beta = 0$ , 所以  $\beta^T\alpha = (\alpha^T\beta)^T = 0$ .

又

$$A\alpha = \alpha\beta^T\alpha + \beta\alpha^T\alpha = \beta,$$

$$A\beta = \alpha\beta^T\beta + \beta\alpha^T\beta = \alpha,$$

所以

$$A(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, \quad A(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta),$$

又因为  $\alpha, \beta$  为单位正交向量组, 所以  $\alpha, \beta$  线性无关.  $\alpha + \beta \neq 0, \alpha - \beta \neq 0$ .  $1, -1$  是  $A$  的特征值.

又因为  $r(A) = r(\alpha\beta^T + \beta\alpha^T) \leq r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) = 2$ , 所以  $A$  不可逆,  $0$  是  $A$  的特征值.

$A$  有三个不同的特征值  $1, -1, 0$ , 故

$$A \text{ 与 } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \text{ 相似.}$$

【例 5.19】设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 3A + 2E = 0$ , 证明  $A$  相似于一个对角矩阵.

【分析】只要证明  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量即可.

【证】由  $A^2 - 3A + 2E = 0$  可知  $A$  的特征值  $\lambda$  满足  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , 解得

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \text{ 又由 } A^2 - 3A + 2E = (2E - A)(E - A) = 0,$$

$$\text{知} \quad \text{秩}(2E - A) + \text{秩}(E - A) \leq n.$$

$$\text{另外, } \text{秩}(2E - A) + \text{秩}(E - A) = \text{秩}(2E - A) + \text{秩}(A - E) \geq \text{秩}(2E - A + A - E) \\ = \text{秩}(E) = n.$$

$$\text{于是} \quad \text{秩}(2E - A) + \text{秩}(E - A) = n.$$

设  $(2E - A)x = 0$  的线性无关解个数为  $r_1$ , 则  $r_1 = n - \text{秩}(2E - A)$ .

设  $(E - A)x = 0$  的线性无关解个数为  $r_2$ , 则  $r_2 = n - \text{秩}(E - A)$ .

$$\text{所以 } r_1 + r_2 = n - \text{秩}(2E - A) + n - \text{秩}(E - A) = n,$$

所以  $A$  相似于一个对角矩阵.

#### 题型六 有关特征值与特征向量的证明题

【例 5.20】设  $\lambda_1, \lambda_2$  为  $n$  阶矩阵  $A$  的不同特征值,  $\zeta_1, \zeta_2$  分别是  $A$  的属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 证明:

$\zeta_1 + \zeta_2$  不是  $A$  的特征向量.

【分析】 $A$  为抽象矩阵, 可考虑从特征值、特征向量的定义出发求证.

【证】用反证法证明. 若  $\zeta_1 + \zeta_2$  为  $A$  的属于某特征值  $\lambda$  的特征向量, 则由定义有

$$A(\zeta_1 + \zeta_2) = \lambda(\zeta_1 + \zeta_2),$$

根据已知  $A\zeta_1 = \lambda_1\zeta_1, A\zeta_2 = \lambda_2\zeta_2$ , 得

$$A(\zeta_1 + \zeta_2) = A\zeta_1 + A\zeta_2 = \lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2,$$

$$\text{从而有} \quad \lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2 = \lambda(\zeta_1 + \zeta_2),$$

$$\text{即} \quad (\lambda - \lambda_1)\zeta_1 + (\lambda - \lambda_2)\zeta_2 = 0,$$

因为  $\zeta_1, \zeta_2$  属于不同的特征值, 所以  $\zeta_1, \zeta_2$  线性无关, 于是

$$\lambda - \lambda_1 = 0, \quad \lambda - \lambda_2 = 0,$$

即有  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , 此与题设矛盾, 故  $\zeta_1 + \zeta_2$  不是  $A$  的特征向量.

【例 5.21】设方阵  $A$  满足条件  $A^T A = E$ , 其中  $A^T$  是  $A$  的转置矩阵,  $E$  为单位阵, 试证  $A$  的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

【证】设  $\alpha$  为  $A$  的实特征向量, 其所对应的特征值为  $\lambda$ , 则

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow (A\alpha)^T = (\lambda\alpha)^T \Rightarrow \alpha^T A^T = \lambda\alpha^T \Rightarrow \alpha^T A^T (A\alpha) = \lambda\alpha^T (\lambda\alpha) \Rightarrow \alpha^T (A^T A)\alpha = \lambda^2 \alpha^T \alpha,$$

因为  $A^T A = E$ , 所以  $\alpha^T \alpha = \lambda^2 \alpha^T \alpha$ , 从而  $(\lambda^2 - 1)\alpha^T \alpha = 0$ ,

因为  $\alpha$  为实特征向量,  $\alpha^T \alpha > 0$ , 所以

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

故  $|\lambda| = 1$ .

【例 5.22】设  $A$  为正交矩阵, 若  $|A| = -1$ , 求证  $A$  一定有特征值  $-1$ .

【证】设矩阵  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |A - \lambda E|,$$

$$\text{则} \quad f(-1) = |A + E|, \quad (1)$$

又因为  $A$  为正交阵, 所以  $AA^T = E$ ,

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad f(-1) &= |A + AA^T| = |A| |E + A^T| \quad (\text{因为 } |A| = -1) \\ &= -|E + A^T| = -|(E + A)^T| = -|A + E|, \end{aligned} \quad (2)$$

由 ①②  $\Rightarrow |A + E| = 0$ , 即  $|A - (-1)E| = 0$ ,

故  $-1$  为  $A$  的一个特征根.

**【例 5.23】** 试证:  $n$  阶方阵 
$$A = a^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

的最大特征值是  $\lambda_1 = a^2[1 + (n-1)\rho]$ , 其中  $0 < \rho < 1$ .

**【证】**  $A$  的特征多项式为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a^2 - \lambda & a^2 \rho & a^2 \rho & \cdots & a^2 \rho \\ a^2 \rho & a^2 - \lambda & a^2 \rho & \cdots & a^2 \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^2 \rho & a^2 \rho & a^2 \rho & \cdots & a^2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a^2 + a^2 \rho)^{n-1} [\lambda - a^2 + (1-n)a^2 \rho],$$

于是  $A$  的特征值为

$$\lambda_1 = a^2[1 + (n-1)\rho], \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = a^2(1-\rho).$$

由于  $0 < \rho < 1, a^2 > 0$ , 故  $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n$ , 即  $\lambda_1 = a^2[1 + (n-1)\rho]$  为  $A$  的最大特征值.

**【例 5.24】** 设  $A, B$  是  $n$  阶矩阵. 证明:

(1)  $AB$  与  $BA$  有相同的特征值;

(2)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . 其中  $\text{tr}(AB), \text{tr}(BA)$  分别表示  $AB, BA$  的主对角线上的元素相加之和.

**【证】** 设  $\lambda \neq 0$  是  $AB$  的任一特征值,  $\alpha \neq 0$  是  $AB$  与  $\lambda$  对应的特征向量, 即

$$(AB)\alpha = \lambda\alpha, \quad (3)$$

用  $B$  左乘上式两端, 有

$$(BA)(B\alpha) = \lambda(B\alpha), \quad (4)$$

若记  $\beta = B\alpha$ , 则 ④ 式可写成

$$(BA)\beta = \lambda\beta,$$

由 ③ 式知  $\beta = B\alpha \neq 0$  (否则就有  $\alpha = 0$ ). 因此  $\lambda$  是矩阵  $BA$  的特征值.

设  $\lambda = 0$  是  $AB$  的特征值,  $\alpha \neq 0$  是对应的特征向量, 即

$$(AB)\alpha = 0 \cdot \alpha = 0,$$

亦即  $\alpha$  是齐次方程组

$$(AB)\alpha = 0$$

的非零解, 于是齐次方程组的系数行列式

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |BA| = 0.$$

因而齐次方程组  $(BA)x = 0$  有非零解  $\beta$ , 所以  $\beta$  满足

$$(BA)\beta = 0 \cdot \beta,$$

故  $\lambda = 0$  是矩阵  $BA$  的特征值.

综上所述, 矩阵  $AB$  的特征值都是矩阵  $BA$  的特征值, 同理可证  $BA$  的特征值都是  $AB$  的特征值, 故(1)中结论成立.

又若设  $AB, BA$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则由公式

$$\operatorname{tr}(AB) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

有  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ , 即(2)成立.

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 若已知  $A$  的特征向量  $\zeta_0$ , 则先用定义  $A\zeta_0 = \lambda_0\zeta_0$  处理一下再说.

**【例 5.25】** 已知  $\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$  的一个特征向量.

(1) 试确定参数  $a, b$  及特征向量  $\zeta$  所对应的特征值;

(2) 问  $A$  能否相似于对角阵? 说明理由.

**【解】** (1) 设与  $\zeta$  对应的特征值为  $\lambda$ , 则  $\lambda$  满足  $(A - \lambda E)\zeta = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda) - 1 - 2 = 0, \\ 5 + (a-\lambda) - 3 = 0, \\ -1 + b + (-2-\lambda) = 0. \end{cases}$$

解得  $\lambda = -1, a = -3, b = 0$ .

(2) 将(1)结果代入  $A$  中,  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ , 其特征多项式

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3,$$

解得特征值  $\lambda = -1$  (三重根),

$$\text{而 } r(A + E) = r \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

因而  $(A + E)x = 0$  只有一个线性无关的解向量, 故  $A$  不能相似于对角矩阵.

#### 二、综合题解析

**提示** (1) 利用特征值与相似矩阵求行列式.

①  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的  $n$  个特征值.

② 若  $A \sim B$ , 则  $|A| = |B|$ .

(2) 利用相似对角化求  $A^n$ .

若  $A \sim \Lambda$ , 即存在可逆阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则  $A = PAP^{-1}$ , 从而  $A^n = PA^nP^{-1}$ .

【例 5.26】(1) 设  $\alpha = (1, 0, -1)^T$ , 矩阵  $A = \alpha\alpha^T$ ,  $n$  为正整数, 则  $|aE - A^n| =$  \_\_\_\_\_.

(2) 已知四阶矩阵  $A$  与  $B$  相似, 矩阵的特征值为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ , 则行列式  $|B^{-1} - E| =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设  $A$  为 3 阶方阵, 且  $|A - 2E| = |A + 2E| = |3A - 2E| = 0$ , 则  $|3A^n - 2A^{-1}| =$  \_\_\_\_\_.

【解】(1) 因为  $\alpha^T\alpha = (1, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$ ,

所以  $A = \alpha\alpha^T$  的三个特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

于是  $aE - A^n$  的三个特征值为  $\mu_i = a - \lambda_i^n$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), 即

$$\mu_1 = a - 2^n, \mu_2 = \mu_3 = a,$$

故行列式  $|aE - A^n| = \mu_1\mu_2\mu_3 = a^2(a - 2^n)$ .

【注】本题也可先求出  $A^n = 2^{n-1}A$ , 再计算行列式  $|aE - A^n|$ .

(2) 因为  $A \sim B$ , 所以  $B$  的四个特征值为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ .

于是  $B^{-1}$  的四个特征值为  $2, 3, 4, 5$ , 进而  $B^{-1} - E$  的四个特征值为  $1, 2, 3, 4$ , 故行列式  $|B^{-1} - E| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .

(3) 【分析】利用特征值的以下性质:

若  $\lambda$  为  $A$  的特征值, 则  $A^{-1}, A^*$  的特征值为  $\frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}$ .

【解】由  $|A - 2E| = |A + 2E| = |3A - 2E| = 0$  可得  $A$  的特征值

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \frac{2}{3}, \text{ 于是 } |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\frac{8}{3}.$$

$$\text{所以 } |3A^n - 2A^{-1}| = |3|A|A^{-1} - 2A^{-1}| = |-9A^{-1}| = \frac{(-9)^3}{|A|} = \frac{(-9)^3}{(-\frac{8}{3})} = \frac{2187}{8}.$$

【例 5.27】设三阶矩阵  $A$  的特征值分别为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ , 对应的特征向量依次为

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \zeta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

又向量  $\beta = (3, -2, 0)^T$ .

(1) 将  $\beta$  用  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  线性表示;

(2) 求  $A^n\beta$  ( $n$  为正整数).

【分析】为了简化与方阵的高次幂有关的运算, 往往可以从矩阵的特征值、特征向量和矩阵的相似概念着手. 设  $\zeta$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $A\zeta = \lambda\zeta, A^k\zeta = \lambda^k\zeta$ ; 若  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则  $A = PAP^{-1}, A^k = PA^kP^{-1}$  转化为对角矩阵  $\Lambda$  的高次幂.

【解】(1) 设  $\beta = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3$ , 得方程



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{由于 } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

从而解得  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ , 故

$$\beta = 2\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3.$$

(2) 方法一: 利用  $A\zeta_i = \lambda_i\zeta_i, A^n\zeta_i = \lambda_i^n\zeta_i (i = 1, 2, 3)$ ,

有  $A^n\beta = A^n(2\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) = 2\lambda_1^n\zeta_1 + \lambda_2^n\zeta_2 + \lambda_3^n\zeta_3$

$$= 2(-1)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^n + 1 \\ 2(-1)^{n+1} + 3^n - 1 \\ 1 - 3^n \end{bmatrix}.$$

方法二:

$$\text{令 } P = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

于是  $A = PAP^{-1}, A^n = PA^nP^{-1}$ , 从而

$$\begin{aligned} A^n\beta &= P \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}^n P^{-1}\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & & \\ & 1^n & \\ & & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^n + 1 \\ 2(-1)^{n+1} + 3^n - 1 \\ 1 - 3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{这里利用了(1)的结果 } P^{-1}\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**【例 5.28】** 已知三阶矩阵  $A$  与三维向量  $x$ , 使得向量组  $x, Ax, A^2x$  线性无关, 且满足  $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ .

(1) 记  $P = [x, Ax, A^2x]$ , 求三阶矩阵  $B$ , 使  $A = PBP^{-1}$ .

(2) 计算行列式  $|A + E|$ .

**【解】** 方法一: 设  $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ , 则由  $AP = PB$ , 得

$$[Ax, A^2x, A^3x] = [x, Ax, A^2x] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

上式可写成

$$Ax = a_1x + b_1Ax + c_1A^2x \quad ①$$

$$A^2x = a_2x + b_2Ax + c_2A^2x, \quad ②$$

$$A^3x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x, \quad ③$$

将  $A^3x = 3Ax - 2A^2x$  代入 ③ 式得

$$3Ax - 2A^2x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x, \quad ④$$

由于  $x, Ax, A^2x$  线性无关, 故

$$\text{由 ① 式可得 } a_1 = c_1 = 0, b_1 = 1;$$

$$\text{由 ② 式可得 } a_2 = b_2 = 0, c_2 = 1;$$

$$\text{由 ④ 式可得 } a_3 = 0, b_3 = 3, c_3 = -2.$$

从而

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

方法二: 利用  $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ , 有

$$A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x]$$

$$= [x, Ax, A^2x] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

由  $x, Ax, A^2x$  线性无关知,  $P$  可逆, 且

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

方法三: 将  $A^3x = 3Ax - 2A^2x$  改写成  $A(A^2x - Ax) = -3(A^2x - Ax)$ , 故  $\lambda_1 = -3$  为  $A$  的特征值,  $A^2x - Ax$  为属于  $-3$  的特征向量. 同理可得  $\lambda_2 = 1$  也是  $A$  的一个特征值,  $3Ax + A^2x$  为属于  $1$  的特征向量;  $\lambda_3 = 0$  也是  $A$  的一个特征值,  $A^2x + 2Ax - 3x$  为属于  $0$  的特征向量, 令

$$Q = [x, Ax, A^2x] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

但另一方面,  $Q$  为由特征向量组成的矩阵, 所以  $Q^{-1}AQ$  为由对应的特征值组成的对角矩阵:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(2) 由(1)知  $A$  与  $B$  相似, 从而  $A+E$  与  $B+E$  相似, 故

$$|A+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

【例 5.29】选择题.

(1) 设  $\lambda = 2$  是非奇异矩阵  $A$  的特征值, 则矩阵  $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$  有一特征值等于

- (A)  $\frac{4}{3}$ . (B)  $\frac{3}{4}$ . (C)  $\frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{1}{4}$ . 【 】

(2) 若  $n$  阶矩阵  $A$  的任意一行中  $n$  个元素的和都是  $a$ , 则  $A$  的一个特征值为

- (A)  $a$ . (B)  $-a$ . (C)  $0$ . (D)  $a^{-1}$ . 【 】

(3) 设  $A$  为  $n$  阶可逆矩阵,  $\lambda$  是  $A$  的一个特征值, 则  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  的特征值之一是

- (A)  $\lambda^{-1} |A|^n$ . (B)  $\lambda^{-1} |A|$ . (C)  $\lambda |A|$ . (D)  $\lambda |A|^n$ . 【 】

(4) 设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $A$  的特征值,  $\zeta_1, \zeta_2$  是  $A$  的分别对应于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 则

- (A)  $\lambda_1 = \lambda_2$  时,  $\zeta_1, \zeta_2$  一定成比例. (B)  $\lambda_1 = \lambda_2$  时,  $\zeta_1, \zeta_2$  一定不成比例.  
(C)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  时,  $\zeta_1, \zeta_2$  一定成比例. (D)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  时,  $\zeta_1, \zeta_2$  一定不成比例. 【 】

【分析】(1)  $A^2$  有一个特征值  $2^2 = 4$ ,  $\frac{1}{3}A^2$  有一个特征值  $\frac{4}{3}$ ,  $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$  有一个特征值  $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$ , 故(B)为正确答案.

(2) 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则把  $|\lambda E - A|$  的各列加到第一列可提出公因子  $\lambda - a$ , 可见  $\lambda = a$  是  $A$  的一个特征值. 故正确答案为(A).

(3) 由  $AA^* = |A|E$  知,  $A^* = |A|A^{-1}$ , 故  $A^*$  有一特征值  $\frac{1}{\lambda} |A| = \lambda^{-1} |A|$ , (B)为正确选项.

(4) 当  $\lambda_1 = \lambda_2$  为重根时, 可能有多于一个线性无关的特征向量, 也可能只有一个线性无关的特征向量, 显然(A), (B)均不成立, 当  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  时, 属于不同特征值的特征向量一定线性无关, 故(D)成立.

【例 5.30】选择题.

(1) 若  $A \sim B$ , 则有

- (A)  $\lambda E - A = \lambda E - B$ .  
(B)  $|A| = |B|$ .

(C) 对于相同的特征值  $\lambda$ , 矩阵  $A$  与  $B$  有相同的特征向量.

(D)  $A$  与  $B$  均与同一个对角矩阵相似. 【 】

(2) 设  $A$  为三阶方阵, 有特征值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ , 其对应特征向量分别为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 记  $P = [2\xi_2, -3\xi_3, 4\xi_1]$ , 则  $P^{-1}AP$  等于

(A)  $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ . (B)  $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ . (C)  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ . (D)  $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ .

【 】

(3)  $n$  阶矩阵有  $n$  个不同的特征值是  $A$  与对角矩阵相似的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.

(D) 既非充分也非必要条件. 【 】

(4)  $n$  阶矩阵与对角矩阵相似的充分必要条件是

(A)  $A$  有  $n$  个不全相同的特征值.

(B)  $A^T$  有  $n$  个不全相同的特征值.

(C)  $A$  有  $n$  个不相同的特征向量.

(D)  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量. 【 】

(5)  $n$  阶方阵  $A$  与某对角矩阵相似, 则

(A) 方阵  $A$  的秩等于  $n$ .

(B) 方阵  $A$  有  $n$  个不同的特征值.

(C) 方阵  $A$  一定是对称阵.

(D) 方阵  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量. 【 】

(6) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $A$  有特征值  $\lambda_1 = 6, \lambda = 2$  (二重), 且  $A$  有三个线性无关的

特征向量, 则  $x$  为

(A) 2.

(B) -2.

(C) 4.

(D) -4. 【 】

【分析】(1)  $A \sim B$ , 则存在可逆矩阵  $P$ , 使  $B = P^{-1}AP$ , 从而  $|B| = |P^{-1}| |A| |P| = |A|$ , 故 (B) 为正确答案. (A), (C) 一般不成立,  $A$  或  $B$  不一定可以与对角矩阵相似, 故 (D) 也是错误的.

(2) 因  $\eta_2 = 2\xi_2, \eta_3 = -3\xi_3, \eta_1 = 4\xi_1$  仍为  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1$  的特征向量, 故

$$AP = A[\eta_2, \eta_3, \eta_1] = [A\eta_2, A\eta_3, A\eta_1]$$

$$= [\eta_2, \eta_3, \eta_1] \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \lambda_3 & \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

注意化为对角矩阵时, 特征值与特征向量的对应关系.

(3) 矩阵有  $n$  个不同的特征值, 则一定有  $n$  个线性无关的特征向量, 从而一定可对角化, 反过来不成立, 故  $A$  具有  $n$  个不同的特征值是  $A$  与对角矩阵相似的充分但非必要条件, (B) 为正确答案.

(4) 显然 (D) 为正确答案. 注意 (A), (B) 中“不全相同”和“全不相同”的差别. (C) 中有  $n$  个不相同的特征向量不是充分条件, 因这  $n$  个不相同的特征向量可以线性相关.

(5) (B), (C) 是充分但非必要条件,  $A$  的秩与  $A$  是否可对角化没有直接关系, (A) 也不成立, 只有 (D) 为  $A$  与对角矩阵相似的必要条件, 是正确选项.

(6)  $A$  有三个线性无关的特征向量, 说明存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

于是  $|A| = 24$ , 得  $x = -2$ .

或直接由  $|\lambda E - A| = (\lambda - 6)(\lambda - 2)^2$ ,

也可得  $x = -2$ , 故 (B) 为正确答案.

### 习 题 五

#### 1. 填空题.

(1) 设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵,  $|A| = 5$ , 则方阵  $B = AA^*$  的特征值是 \_\_\_\_\_, 特征向量是 \_\_\_\_\_.

(2) 三阶方阵  $A$  的特征值为  $1, -1, 2$ , 则  $B = 2A^3 - 3A^2$  的特征值为 \_\_\_\_\_.

(3) 设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,

且  $A$  的特征值为  $2$  和  $1$  (二重), 那么  $B$  的特征值为 \_\_\_\_\_.

(4) 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$  与  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  相似, 则  $x =$  \_\_\_\_\_,  $y =$  \_\_\_\_\_.

(5) 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且  $|A| \neq 0$ , 则  $AB$  和  $BA$  相似, 这是因为存在可逆矩阵  $P =$  \_\_\_\_\_, 使得  $P^{-1}ABP = BA$ .

#### 2. 选择题.

(1) 零为矩阵  $A$  的特征值是  $A$  为不可逆的

A. 充分条件.

B. 必要条件.

C. 充要条件.

D. 非充分也非必要条件.

【 】

(2) 设  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  是矩阵  $A$  的两个不相同的特征值,  $\zeta, \eta$  是  $A$  的分别属于  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 则

A. 对任意  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_1\zeta + k_2\eta$  都是  $A$  的特征向量.

B. 存在常数  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ , 使  $k_1\zeta + k_2\eta$  是  $A$  的特征向量.

C. 当  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$  时,  $k_1\zeta + k_2\eta$  不可能是  $A$  的特征向量.

D. 存在唯一的一组常数  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ , 使  $k_1\zeta + k_2\eta$  是  $A$  的特征向量.

【 】

(3) 设  $\lambda_0$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值, 且齐次线性方程组  $(\lambda_0 E - A)x = 0$  的基础解系为  $\eta_1$  与  $\eta_2$ , 则  $A$  的属于  $\lambda_0$  的全部特征向量是

A.  $\eta_1$  和  $\eta_2$ .

B.  $\eta_1$  或  $\eta_2$ .

C.  $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$  ( $C_1, C_2$  为任意常数).

D.  $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$  ( $C_1, C_2$  为不全为零的任意常数).

【 】

(4) 设  $\lambda_1, \lambda_2$  为  $A$  的两个不相同的特征值,  $\alpha$  与  $\beta$  为  $A$  的分别属于  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  的特征向量, 则有  $\alpha$  与  $\beta$  是

A. 线性相关.

B. 线性无关.

C. 对应分量成比例.

D. 可能有零向量.

【 】

(5) 与  $n$  阶单位矩阵  $E$  相似的矩阵是

A. 数量矩阵  $kE$  ( $k \neq 1$ ).

B. 对角矩阵  $D$  (主对角元素不为 1).

C. 单位矩阵  $E$ .

D. 任意  $n$  阶矩阵  $A$ .

【    】

(6)  $A, B$  是  $n$  阶方阵, 且  $A \sim B$ , 则

A.  $A, B$  的特征矩阵相同.

B.  $A, B$  的特征方程相同.

C.  $A, B$  相似于同一个对角阵.

D. 存在正交矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT = B$ .

【    】

### 3. 计算证明题.

(1) 设  $\lambda = 1$  是矩阵  $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}$  的特征值, 求: ①  $t$  的值; ② 对应于  $\lambda = 1$  的所有特征向量.

(2) 求  $n$  阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$  的特征值与特征向量.

(3) 假定  $n$  阶矩阵  $A$  的任意一行中,  $n$  个元素的和都是  $a$ , 试证  $\lambda = a$  是  $A$  的特征值, 且  $(1, \dots, 1)^T$  是对应于  $\lambda = a$  的特征向量, 又问此时  $A^{-1}$  的每行元素之和为多少?

(4) 设  $A, B$  均是  $n$  阶矩阵, 且秩  $r(A) + r(B) < n$ , 证明:  $A, B$  有公共的特征向量.

(5) 设三阶矩阵  $A$  满足  $A\alpha_i = i\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 其中列向量  $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, -2, 1)^T$ ,  $\alpha_3 = (-2, -1, 2)^T$ , 试求矩阵  $A$ .

(6) 设矩阵  $A$  与  $B$  相似, 其中  $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

① 求  $x$  和  $y$  的值; ② 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

(7) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 矩阵  $B = (kE + A)^2$ , 其中  $k$  为实数,  $E$  为单位矩阵, 求对角矩阵

$\Lambda$ , 使  $B$  与  $\Lambda$  相似, 并求  $k$  为何值时,  $B$  为正定矩阵.

(8) 设  $n$  阶矩阵  $A$  的特征值为  $1, 2, \dots, n$ , 试求  $|2A + E|$ .

(9) 判断矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

是否可对角化? 若可对角化, 求出可逆矩阵  $U$ , 使  $U^{-1}AU$  为对角矩阵.

(10) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ , 求  $A^{100}$ .

(11) 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将  $\frac{1}{6}$  熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践, 至年终考核有  $\frac{2}{5}$  成为熟练工, 设第  $n$  年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为  $x_n$

和  $y_n$ , 记成向量  $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ .

(I) 求  $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$  的关系式并写成矩阵形式  $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ;

(II) 验证  $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $\mathbf{A}$  的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

(III) 当  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  时, 求  $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$ .

(12) 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是方阵  $\mathbf{A}$  的特征根,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ;  $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_r$  是  $\mathbf{A}$  的对应于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量,  $\boldsymbol{\zeta}_1, \dots, \boldsymbol{\zeta}_s$  是  $\mathbf{A}$  的对应于  $\lambda_2$  的线性无关的特征向量, 证明  $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_r, \boldsymbol{\zeta}_1, \dots, \boldsymbol{\zeta}_s$  线性无关.

### 参 考 答 案

1. (1) 5 ( $n$  重), 任意  $n$  维非零向量; (2)  $-1, -5, 4$ ; (3)  $2, 1$  (二重); (4)  $0, 1$ ; (5)  $\mathbf{A}$ .

2. (1) C (2) C (3) D (4) B (5) C (6) B

3. (1)  $t$  为任意实数,  $k \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . (2)  $\lambda = 0$  ( $n$  重), 特征向量为  $k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  ( $k \neq 0$ ).

(3)  $\frac{1}{a}$ . (4) 略. (5)  $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$ .

(6)  $x = 1, y = -1, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

(7)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2 \end{bmatrix}, k \neq -2 \text{ 且 } k \neq 0$ . (8)  $|2\mathbf{A} + \mathbf{E}| = \prod_{i=1}^n (2i+1)$ .

(9) 可对角化,  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

(10)  $\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{101} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}(1 - 2^{100}) & 1 \end{bmatrix}$ .

(11) (I)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ; (II) 略; (III)  $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$ .

(12) 略.

## 第六章 二次型

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、二次型及其矩阵表示

$n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

其中,  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 称为  $n$  元二次型, 简称二次型.

若令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则二次型  $f$  可改写成矩阵向量形式

$$f = x^T A x.$$

其中,  $A$  称为二次型矩阵, 因为  $a_{ji} = a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 所以二次型矩阵均为对称矩阵, 且二次型与对称矩阵一一对应, 并把矩阵  $A$  的秩称为二次型的秩.

#### 二、化二次型为标准型

二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$  经过合同变换  $x = Cy$  化为

$$f = x^T A x = y^T C^T A C y = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2, \quad (r \leq n)$$

称为  $f$  的标准形.

在一般的数域内, 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的合同变换有关, 但系数不为零的平方项的个数由  $r(A)$  (的秩) 唯一确定.

任一实二次型  $f$  都可经合同变换化为规范型

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

其中,  $r$  为  $A$  的秩;  $p$  为正惯性指数;  $r - p$  为负惯性指数, 且规范型唯一.

化二次型为标准型的方法有: 配方法、正交变换法.

① 对于任一二次型, 不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准形, 其正负惯性指数与所选变换无关, 这就是所谓的惯性定理.

② 两个  $n$  阶实对称矩阵  $A$  和  $B$ , 若存在可逆矩阵  $C$ , 使得

$$C^T A C = B,$$



则称矩阵  $A$  和  $B$  合同.

任一实对称矩阵合同于一个对角矩阵; 实对称矩阵  $A$  与  $B$  合同的充要条件是二次型  $x^T A x$  与  $x^T B x$  有相同的正、负惯性指数.

### 三、配方法和正交变换法

#### 1. 配方法

若  $f$  含有平方项, 即若某平方项系数  $a_{ii} \neq 0$ , 就把含  $x_i$  的项归并在一起, 并对其进行配方; 若  $f$  没有平方项, 应先变换出平方项 [如  $a_{12} \neq 0$ , 可令  $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_i = y_i (i \geq 3)$ ], 再进行配方.

**注** 所作的线性变换一定要是可逆的线性变换.

**【例 6.1】** 用配方法化二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$  为标准形.

**【解】** 因为  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$

$$\begin{aligned} &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right]^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - 3x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right]^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2, \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \text{则可将原二次型化为标准形}$$

$$f = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2.$$

**注** 本题切不可令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3, \text{想当然地将二次型化为 } f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \\ y_3 = x_3 + x_1 \end{cases}$$

上述解法是错误的, 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{所以} \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 + x_1 \end{cases} \text{不是可逆的线性变换.}$$

利用配方法化二次型为标准形时, 所作的线性变换一定要是可逆的.

#### 2. 正交变换法

设  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵, 按以下步骤进行:

(1) 求出  $A$  的全部特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ ;

(2) 对每个  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, t)$ , 求出  $(\lambda_i E - A)x = 0$  的一个基础解系  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{s_i}}$ ;

(3) 将  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{s_i}}$  正交化、单位化, 得  $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{i_{s_i}}$ , 它是单位正交向量组, 而且是  $A$  的属于  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量;

(4) 以  $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1s_1}, r_{21}, \dots, r_{2s_2}, \dots, r_{t1}, \dots, r_{ts_t}$  为列向量, 构造出正交矩阵  $T$ ,  $T$  即为所求的正交变换矩阵, 可使  $T^{-1}AT$  为对角矩阵.

对于二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 令  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{y}$ , 将二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  化为标准型  $f = \mathbf{y}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}$ , 其中,  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ .

#### 四、二次型和矩阵的正定性及其判别法

如果实二次型  $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 对任意一组不全为零的实数  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 都有  $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , 则称该二次型为正定二次型, 正定二次型的矩阵  $\mathbf{A}$  称为正定矩阵.

合同变换不改变二次型的正定性.

实二次型  $f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  正定的充要条件是以下条件之一成立:

- (1) 正惯性指数为  $n$ ;
- (2)  $\mathbf{A}$  的特征值全大于零;
- (3)  $\mathbf{A}$  的所有顺序主子式全大于零;
- (4) 存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$ ;

$$(5) \text{ 存在正交矩阵 } \mathbf{Q}, \text{ 使 } \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

- 注 (1) 若  $\mathbf{A}$  为正定矩阵, 则  $k\mathbf{A} (k > 0)$ ,  $\mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{A}^*$  也是正定矩阵.
- (2) 若  $\mathbf{A}$  为正定矩阵, 则有  $|\mathbf{A}| > 0$ , 从而  $\mathbf{A}$  可逆.
- (3) 若  $\mathbf{A}$  为正定矩阵, 则  $\mathbf{A}$  的主对角线上元素  $a_{ii} > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ .

【例 6.2】填空.

(1) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$  的矩阵是 \_\_\_\_\_, 二次型的秩为 \_\_\_\_\_.

(2) 已知二次型的系数矩阵为  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ , 那么与它相对应的二次型  $f(x_1, x_2, x_3) =$  \_\_\_\_\_.

(3) 若二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$  是正定的, 那么  $t$  应满足不等式 \_\_\_\_\_.

(4)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$  是正定矩阵, 则  $k$  满足条件 \_\_\_\_\_.

(5) 实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$  的秩为 \_\_\_\_\_, 正惯性指数为 \_\_\_\_\_, 负惯性指数为 \_\_\_\_\_.

(6) 若实对称矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  合同, 则二次型  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  的规范形为 \_\_\_\_\_.

【解】(1)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 3; (2)  $2x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$ ;

$$(3) -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}; \quad (4) k > 1; \quad (5) 3, 2, 1; \quad (6) y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

【分析】(1) 题设中二次型矩阵为  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 由于其对应行列式不为零, 故其秩为 3.

$$\begin{aligned} (2) f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3. \end{aligned}$$

(3) 题设二次型矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 为使二次型正定, 各阶顺序主子式应满足:

$$|A_1| = 1 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2t^2 > 0,$$

故当  $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$  时, 二次型正定.

(4) 为使  $A$  正定, 应有

$$|A_1| = 1 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k - 1 > 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = k^2(k - 1) > 0,$$

故当  $k > 1$  时,  $A$  正定.

(5) 经过非退化线性变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 \end{cases}$$

可把  $f$  化为  $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ .

故  $f$  的秩为 3, 正惯性指数为 2, 负惯性指数为 1.

(6) 因为  $A$  与  $B$  合同, 所以  $A$  与  $B$  有相同的正负惯性指数.

又因为  $B$  的特征值为  $1, 3, -2$ , 所以  $B$  的正负惯性指数分别为 2 和 1, 故二次型  $x^T A x$  的规范形为  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ .

【例 6.3】选择题.

(1) 实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$  为正定的充分必要条件是

(A)  $|A| > 0$ .

(B) 存在  $n$  阶可逆矩阵  $C$ , 使  $A = C^T C$ .

(C) 负惯性指数为零.

(D) 对某一  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq 0$ , 有  $x^T A x > 0$ .

(2) 实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + tx_2^2 + 3x_3^2$ , 当  $t = (\quad)$  时, 其秩为 2.

【 】

- (A)0. (B)1. (C)2. (D)3. 【 】
- (3) 设  $A$  是一个三阶实矩阵, 如果对任一三维列向量  $x$ , 都有  $x^T A x = 0$ , 那么  
 (A)  $|A| = 0$ . (B)  $|A| > 0$ . (C)  $|A| < 0$  (D) 以上都不对. 【 】
- (4)  $n$  阶实对称矩阵  $A$  为正定矩阵的充分必要条件是  
 (A) 所有  $k$  级子式为正 ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). (B)  $A$  的所有特征值非负.  
 (C)  $A^{-1}$  为正定矩阵. (D) 秩( $A$ ) =  $n$ . 【 】
- (5) 设  $A, B$  都是  $n$  阶实对称矩阵, 且都正定, 那么  $AB$  是  
 (A) 实对称矩阵. (B) 正定矩阵. (C) 可逆矩阵. (D) 正交矩阵. 【 】

(6) 与  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  合同的矩阵是

(A)  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 9 \end{bmatrix}$ .

(B)  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$ .

(C)  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ .

(D)  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ .

【 】

【分析】(1) (A), (C), (D) 均只是二次型  $f$  正定的必要条件而非充分条件. 对任意  $x \neq 0$ ,  $C$  为可逆矩阵, 故  $Cx \neq 0$ , 从而  $f = x^T A x = x^T C^T C x = (Cx)^T C x > 0$ , 说明  $f$  是正定的, 故 (B) 为正确答案.

(2) 题设二次型对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,

可见当  $t = 1$  时, 其秩为 2, 故 (B) 为正确选项.

(3) 由  $x^T A x = 0$ , 得  $(x^T A x)^T = x^T A^T x = 0$ , 于是  $x^T (A + A^T) x = 0$ , 对任一三维列向量  $x$  均成立, 其中  $A^T + A$  为对称矩阵, 故必有  $A + A^T = 0$ , 即  $A^T = -A$ ,  $A$  为三阶反对称矩阵, 于是  $|A| = 0$ , 故 (A) 为正确答案.

(4) (A) 是充分但非必要条件, (B), (D) 是必要但非充分条件, 只有 (C) 为正确选项. 事实上, 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则  $A^{-1}$  的特征值为  $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ , 因为  $A^{-1}$  正定,

故  $\frac{1}{\lambda_i} > 0$ , 从而  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 即  $A$  为正定矩阵.

(5) 由于  $A$  与  $B$  不一定可交换, 显然 (A), (B) 不成立, 又  $A, B$  不一定是正交矩阵, 故  $AB$  也非正交矩阵, (D) 错误, 只有 (C) 是正确选项. 因为  $|A| > 0, |B| > 0$  故  $|AB| = |A| |B| \neq 0$ , 从而  $AB$  可逆.

(6) 由结论: 同阶实对称阵合同的充要条件是它们具有相同的正、负惯性指数. 而实对称矩阵的正、负惯性指数分别等于正、负特征值的个数.

$A$  的特征值为  $1, 2, -2$ , 所以选 (B).

## 第2节 重要题型的解题方法和技巧

## 题型一 二次型所对应的矩阵及其性质

**提示** 将二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  写成  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{A}$  就是二次型所对应的矩阵. 由此可求出二次型的秩和正、负惯性指数 ( $\mathbf{A}$  的正、负特征值的个数).

**【例 6.4】** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$  的秩为 2, 求参数  $c$  及此二次型对应矩阵的特征值.

**【分析】** 二次型的秩为 2 是指二次型对应矩阵  $\mathbf{A}$  的秩为 2, 由于  $\mathbf{A}$  是三阶矩阵, 故行列式  $|\mathbf{A}| = 0$ , 由此即可求出参数  $c$ , 再由  $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ , 求特征值.

**【解】** 此二次型对应矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{bmatrix}$ ,

$$\text{因秩}(\mathbf{A}) = 2, \text{故 } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix} = 0, \text{解得 } c = 3.$$

容易验证, 此时  $\mathbf{A}$  的秩的确是 2.

$$\text{另外, 由 } |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9),$$

知所求特征值为  $\lambda = 0, \lambda = 4, \lambda = 9$ .

**【例 6.5】** 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶实对称矩阵, 秩  $r(\mathbf{A}) = n$ ;  $A_{ij}$  是  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式 ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{|\mathbf{A}|} x_i x_j.$$

(1) 记  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 把  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  写成矩阵形式, 并证明二次型  $f(\mathbf{x})$  的矩阵为  $\mathbf{A}^{-1}$ ;

(2) 二次型  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  与  $f(\mathbf{x})$  的规范型是否相同? 说明理由.

**【分析】** (1) 要求将  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  写成  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$ , 并验证  $\mathbf{A}^{-1}$  为对称矩阵;

(2) 关键是证明  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^{-1}$  是合同阵, 因为合同矩阵对应的二次型的规范形是相同的.

**【解】** (1) 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的矩阵形式为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

因秩  $r(\mathbf{A}) = n$ , 故  $\mathbf{A}$  可逆, 且  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$ , 从而

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1},$$

故  $\mathbf{A}^{-1}$  也是实对称矩阵, 因此二次型的矩阵为  $\mathbf{A}^{-1}$ .

(2) 方法一: 因为

$$(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

所以  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^{-1}$  合同, 于是  $g(x) = x^T \mathbf{A} x$  与  $f(x)$  有相同的规范形.

方法二: 对二次型  $g(x) = x^T \mathbf{A} x$ , 作可逆线性变换  $x = \mathbf{A}^{-1} y$ , 其中  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ .

$$\begin{aligned} g(x) &= x^T \mathbf{A} x = (\mathbf{A}^{-1} y)^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^{-1} y) = y^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} y \\ &= y^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} y = y^T \mathbf{A}^{-1} y. \end{aligned}$$

由此得知  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^{-1}$  合同. 于是  $f(x)$  与  $g(x)$  必有相同的规范形.

方法三: 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $\mathbf{A}$  的  $n$  个特征值, 对应特征向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 即

$$\mathbf{A} \alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

由秩  $r(\mathbf{A}) = n$  知  $\lambda \neq 0$ , 且有  $\mathbf{A}^{-1} \alpha_i = \lambda^{-1} \alpha_i$ , 即  $\mathbf{A}^{-1}$  的  $n$  个特征值为  $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ . 可见

$\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^{-1}$  中大于零的特征值的个数和小于零的特征值的个数对应相同, 即  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}^{-1}$  具有相同的正、负惯性指数. 从而  $f(x) = x^T \mathbf{A}^{-1} x$  与  $g(x) = x^T \mathbf{A} x$  有相同的规范形.

### 题型二 化二次型为标准形

**提示** 化二次型为标准形的基本方法有二: 配方法和正交变换法, 其中重点是正交变换法. 首先须正确写出二次型矩阵, 二次型矩阵的对角线元素  $a_{ii}$  为  $x_i^2$  的系数,  $a_{ij} = a_{ji}$  为  $x_i x_j$  系数的一半. 把二次型化为标准形的一般步骤是:

- (1) 求出二次型矩阵的特征根及对应的特征向量;
- (2) 将重特征根的特征向量正交化, 再将所得特征向量单位化, 以此为列构成的矩阵即为正交矩阵  $\mathbf{Q}$ ;
- (3) 作变换  $x = \mathbf{Q} y$ , 即可将二次型化为标准形.

**【例 6.6】** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$ ,

- (1) 写出二次型  $f$  的矩阵表达式;
- (2) 用正交变换把二次型  $f$  化为标准型, 并写出相应的正交矩阵.

**【解】** (1)  $f$  的矩阵表达式为

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

(2) 二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}$  的特征方程为

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 36) = 0.$$

由此得  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$ , 对应的特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

对应的单位特征向量为

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

由此可得正交矩阵

$$Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

对二次型  $f$  作正交变换  $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ , 则此二次型可化为如下标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2.$$

**【例 6.7】** 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$  的秩为 2.

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求正交变换  $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ , 把  $f(x_1, x_2, x_3)$  化成标准形.

**【解】** (1) 二次型矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2, 知  $|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , 得  $a = 0$ .

(2) 由 (1) 知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 可求出其特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$ .

$$\text{因为 } 2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $(2E - A)\mathbf{x} = 0$  的同解方程组为  $x_1 - x_2 = 0$ ,

可解得  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  为一个特征向量, 第二个特征向量  $\alpha_2$  既满足方程  $x_1 - x_2 = 0$  又与  $\alpha_1$

正交, 可取  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ , 则由  $\alpha_1^T \alpha_2 = 0 \Rightarrow a = 0$ , 即得属于特征值  $\lambda = 2$  的正交特征向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

设  $\alpha_3$  为属于特征值  $\lambda = 0$  的特征向量, 所以  $\alpha_1^T \alpha_3 = 0, \alpha_2^T \alpha_3 = 0$ .

$$\text{设 } \alpha_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \text{ 故取 } \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  已经正交, 直接将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令  $Q = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$ , 它即为所求的正交变换矩阵. 由  $x = Qy$ , 可化原二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

在求有重根的特征值对应的特征向量时, 要求相互正交的特征向量, 标准正交化的过程有时计算较繁, 可以如本题所解一样, 在解方程的过程中同时考虑正交性的要求, 有意取正交的两个向量, 这样可省去化为正交的步骤, 简化计算.

【例 6.8】设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

(1) 已知  $A$  的一个特征值为 3, 试求  $y$ ; (2) 求矩阵  $P$ , 使  $(AP)^T(AP)$  为对角阵.

【分析】(1) 由定义  $|3E - A| = 0$  可求出  $y$ ; (2)  $(AP)^T AP = P^T A^T AP$ , 而  $A^T A$  为对称矩阵, 因此问题转化为求合同变换所对应的矩阵  $P$ , 使  $P^T(A^T A)P$  为对角矩阵, 而这可以通过配方法或正交变换法求得.

【解】(1) 由  $|3E - A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , 解得  $y = 2$ .

(2)  $(AP)^T AP = P^T A^T AP$ , 而  $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  为对称矩阵, 考虑二次型

$$x^T(A^T A)x = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$$

$$\text{配方得 } x^T(A^T A)x = x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2,$$

$$\text{令 } y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, y_4 = x_4, \text{ 得}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$



$$\text{取 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则有 } (AP)^T(AP) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

● 若先求出  $A^T A$  的特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 9$  以及对应  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  的特征向量为  $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, -1, 1)^T$ , 经正交标准化后, 得向量组

$$\beta_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \beta_3 = \left(0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

对应于  $\lambda_4 = 9$  的特征向量  $\alpha_4 = (0, 0, 1, 1)^T$ , 经单位化后, 得  $\beta_4 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ . 令

$$P = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

则

$$P^T(A^T A)P = (AP)^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

【例 6.9】设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ , 已知线性方程组  $Ax = \beta$  有解但不唯一, 试求

(1)  $a$  的值; (2) 正交矩阵  $Q$ , 使  $Q^T A Q$  为对角矩阵.

【解】(1) 对线性方程组  $Ax = \beta$  的增广矩阵作行的初等变换, 有

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+1) & a+2 \end{array} \right],$$

因为方程组  $Ax = \beta$  有解但不唯一, 所以秩  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 故  $a = -2$ .

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 对应特征方程为}$$

$$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3),$$

得特征值为  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0$ .

对应特征向量分别为:  $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1)^T$ .

将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  单位化, 得

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T, \beta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$

$$\text{令 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ 则有 } Q^T A Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数

**提示** 设  $A, B$  为变换前后对应的二次型矩阵,若  $x = Qy$  为正交变换,则  $A$  和  $B$  不仅是合同的,而且是相似的.根据相似矩阵的性质, $A$  和  $B$  有相同的特征多项式,由此可求出相关参数.

**【例 6.10】** 设二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_2 x_3 + 2x_1 x_3$$

经正交变换  $x = Qy$  化成

$$f = y_2^2 + 2y_3^2,$$

其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$  是三维列向量, $Q$  是正交矩阵,试求参数  $\alpha, \beta$  的值.

**【解】** 变换前后二次型的矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

二次型可以写成

$$f = x^T A x \quad \text{和} \quad f = y^T B y.$$

由于  $Q^T A Q = B, Q$  为正交矩阵,故

$$Q^{-1} A Q = B,$$

因此  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ ,

$$\text{即} \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\alpha & -1 \\ -\alpha & \lambda - 1 & -\beta \\ -1 & -\beta & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix},$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + (2 - \alpha^2 - \beta^2)\lambda + (\alpha - \beta)^2 \equiv \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda.$$

令  $\lambda = 0$  和  $\alpha = \beta$ , 令  $\lambda = 1$  知  $\alpha\beta = 0$ . 解得  $\alpha = \beta = 0$  为所求参数.

**【例 6.11】** 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 2\alpha x_2 x_3$  经正交变换  $X = QY$ ,

化成  $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + \beta y_3^2$ , 其中  $X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T$  是三维列向量, $P$  是 3 阶正交矩阵,试

(1) 确定常数  $\alpha (< 0), \beta$  的值;

(2) 求正交矩阵  $Q$ ;

(3) 若  $X^T X = 3$ , 求  $f(x_1, x_2, x_3)$  的最大值.

**【解】** 变换前后二次型的矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & \beta \end{bmatrix}$$

(1) 由  $A \sim B \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ ,  $A, B$  特征值相同, 即

$$\begin{cases} 1+1+1=2+2+\beta \\ 2 \cdot 2 \cdot \beta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ (\alpha-1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \text{ 或 } \alpha = 3 \text{ (舍去)} \end{cases}$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 先求  $\lambda = 2$  对应的特征向量  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ , 由于

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

取  $x_2$  为 0, 可得

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

要想  $\xi_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  与  $\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  正交, 只需考虑  $x_1, x_3$  即可, 取  $x_1 = 1, x_3 = 1$ , 则有

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再求  $\lambda = -1$  的特征向量, 设其为  $\xi_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ , 由于实对称阵不同特征值对应的特征向量相

互正交, 所以

$$\begin{cases} \xi_1^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \xi_2^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3,$$

故取  $\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  即可.

现正交化  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 得

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{|\xi_1|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \eta_2 = \frac{\xi_2}{|\xi_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \eta_3 = \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

令  $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , 则有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) 由题设可知

$$3 = X^T X = (QY)^T (QY) = Y^T Q^T QY = Y^T Y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

$$\text{而 } f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 \leq 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 6,$$

$$\text{取 } y_1 = \sqrt{3}, y_2 = 0, y_3 = 0, \text{ 可得 } f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 = 6,$$

$$\text{故 } \max_{X^T X=3} f(x_1, x_2, x_3) = 6.$$

#### 题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明

**提示** 二次型  $f = x^T A x$  正定的充要条件之一是:

①  $A$  的所有顺序主子式全大于零; ②  $A$  的特征值全大于零; ③ 对  $\forall x \neq 0$ , 恒有  $x^T A x > 0$ .

**【例 6.12】** 设有  $n$  元实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$ , 其中  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为实数, 试问: 当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足何种条件时, 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为正定二次型.

**【解】** 由题设条件知, 对于任意的  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 有  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . 其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0 \\ x_2 + a_2 x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0 \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

方程组 ① 仅有零解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

所以, 当  $1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$  时, 对于任意的不全为零的  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 有  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ , 即当  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$  时, 二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为正定二次型.

**【例 6.13】** 设  $A$  为  $m$  阶实对称矩阵且正定,  $B$  为  $m \times n$  实矩阵,  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵. 试证:  $B^T A B$  为正定矩阵的充分必要条件是  $B$  的秩  $r(B) = n$ .

【证】必要性. 设  $B^T A B$  为正定矩阵, 则对任意的实  $n$  维列向量  $x \neq 0$ , 有  $x^T (B^T A B) x > 0$ , 即  $(Bx)^T A (Bx) > 0$ . 于是  $Bx \neq 0$ , 因此  $Bx = 0$  只有零解, 从而  $r(B) = n$ .

充分性. 因  $(B^T A B)^T = B^T A^T B = B^T A B$ , 即  $B^T A B$  为实对称矩阵. 若秩  $r(B) = n$ , 则线性方程组  $Bx = 0$  只有零解, 从而对任意实  $n$  维列向量  $x \neq 0$  有  $Bx \neq 0$ .

又  $A$  为正定矩阵, 所以对于  $Bx \neq 0$ , 有  $(Bx)^T A (Bx) > 0$ . 于是当  $x \neq 0$  时,

$$x^T (B^T A B) x > 0,$$

故  $B^T A B$  为正定矩阵.

【例 6.14】设  $A$  是  $n$  阶正定矩阵,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 证明  $E + A$  的行列式大于 1.

【证】方法一: 因为  $A$  为正定矩阵, 不妨设  $A$  的特征值分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  且  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则  $A + E$  的特征值分别为  $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1$ , 且有  $\lambda_i + 1 > 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 从而有

$$|A + E| = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) > 1.$$

方法二: 因为  $A$  是正定矩阵, 故存在正交矩阵  $Q$ , 使

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

其中  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  是  $A$  的特征值, 因此

$$A = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

$$\text{于是 } A + E = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} Q^{-1} + Q E Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 + 1 & & & \\ & \lambda_2 + 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n + 1 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

$$\begin{aligned} \text{从而有 } |A + E| &= |Q| \begin{vmatrix} \lambda_1 + 1 & & & \\ & \lambda_2 + 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n + 1 \end{vmatrix} |Q^{-1}| \\ &= (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \cdots (\lambda_n + 1) > 1. \end{aligned}$$

【例 6.15】证明: 若  $A$  是正定矩阵, 则  $A^*$  也是正定矩阵.

【证】若  $A$  是正定阵,  $A$  是对称阵, 易知  $A^*$  是对称阵.

方法一: 用定义证明.

$$\text{由 } A A^* = A^* A = |A| E \text{ 知 } A^* = |A| A^{-1},$$

已知  $A$  正定, 故有  $|A| > 0$ , 且对任何  $y \neq 0$ , 恒有  $y^T A y > 0$ , 于是

$$\begin{aligned} x^T A^* x &= x^T |A| A^{-1} x = |A| x^T A^{-1} x = |A| x^T A^{-1} A A^{-1} x \\ &= |A| (A^{-1} x)^T A (A^{-1} x), \end{aligned}$$

因为  $A$  可逆, 当  $x \neq 0$  时,  $y = A^{-1} x \neq 0$ , 从而有对任何  $x \neq 0$ ,

$$x^T A^* x = |A| y^T A y > 0,$$

根据定义知,  $A^*$  是正定矩阵.

方法二: 利用  $A$  正定  $\Leftrightarrow A$  的全部特征值大于零.

设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 由  $A$  正定知  $\lambda_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$  且  $|A| > 0$ , 又  $A^*$  的特征值为:  $\frac{|A|}{\lambda_1}, \frac{|A|}{\lambda_2}, \dots, \frac{|A|}{\lambda_n}$ , 于是  $\frac{|A|}{\lambda_i} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 即  $A^*$  的全部特征值大于零, 故  $A^*$  是正定矩阵.

方法三:  $A$  正定  $\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $A = C^T C$ .

由  $A$  正定知,  $|A| > 0$ , 且存在可逆矩阵  $C$ , 使  $A = C^T C$ , 于是

$$A^* = |A| A^{-1} = |A| C^{-1} (C^{-1})^T = \sqrt{|A|} C^{-1} \cdot [\sqrt{|A|} C^{-1}]^T = P^T P,$$

其中,  $P = (\sqrt{|A|} C^{-1})^T$  为可逆矩阵, 故  $A^*$  是正定阵.

**【例 6.16】** 设  $A$  为实对称矩阵, 则当  $t$  充分大时,  $A + tE$  为正定矩阵.

**【证】** 设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_i$  为实数), 取  $t > \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$ , 则  $A + tE$  的特征值  $\lambda_i + t$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 全部大于零, 因此当  $t > \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$  时,  $A + tE$  是正定矩阵.

**【例 6.17】** 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 且  $A^3 - 3A^2 + 5A - 3E = 0$ , 证明:  $A$  正定.

**【分析】** 只要证明  $A$  的全部特征值大于零.

**【证】** 设  $\lambda$  是  $A$  的任一特征值, 对应特征向量为  $x \neq 0$ , 即  $Ax = \lambda x$ , 代入已知等式

$$A^3 - 3A^2 + 5A - 3E = 0,$$

$$\text{有} \quad (A^3 - 3A^2 + 5A - 3E)x = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3)x = 0,$$

$$\text{因为 } x \neq 0, \text{ 故 } \lambda \text{ 满足} \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0.$$

得  $\lambda = 1$  或  $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$ , 因  $A$  为实对称矩阵, 其特征值一定为实数, 故只有  $\lambda = 1$ , 即  $A$  的全部特征值就是  $\lambda = 1 > 0$ , 这就证明  $A$  是正定矩阵.

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势** 若要证明抽象的  $n$  阶实对称矩阵  $A$  为正定矩阵, 先用定义处理一下再说.

**【例 6.18】** 设  $A$  为  $m$  阶实对称矩阵且正定,  $B$  为  $m \times n$  实矩阵,  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵. 试证:  $B^T A B$  为正定矩阵的充分必要条件是  $B$  的秩  $r(B) = n$ .

**【证】** 必要性.

设  $B^T A B$  为正定矩阵, 则对任意的实  $n$  维列向量  $x \neq 0$ , 有  $x^T (B^T A B) x > 0$ ,

即  $(Bx)^T A (Bx) > 0$ , 必有  $Bx \neq 0$ , 即  $Bx = 0$  只有零解.

从而  $r(B) = n$ .

充分性.

因  $(B^T A B)^T = B^T A^T B = B^T A B$ , 故  $B^T A B$  为实对称矩阵.

若  $r(B) = n$ , 则方程组  $Bx = 0$  只有零解.

从而对任意实  $n$  维列向量  $x \neq 0$  有  $Bx \neq 0$ .

因为  $A$  为正定矩阵, 所以对于  $Bx \neq 0$ ,

有  $(Bx)^T A (Bx) > 0$ .

于是当  $x \neq 0$  时,  $x^T (B^T A B) x > 0$ , 故  $B^T A B$  为正定矩阵.

## 二、综合题解析

**【例 6.19】** 设  $A$  为三阶实对称矩阵, 且满足关系式  $A^2 + 2A = 0$ , 已知  $A$  的秩  $r(A) = 2$ .

(1) 求  $A$  的全部特征值;

(2) 当  $k$  为何值时, 矩阵  $A + kE$  为正定矩阵, 其中  $E$  为三阶单位矩阵.

**【解】** (1) 设  $\lambda$  为  $A$  的一个特征值, 对应的特征向量为  $\alpha$ , 则

$$A\alpha = \lambda\alpha, \quad (\alpha \neq 0), A^2\alpha = \lambda^2\alpha.$$

于是

$$(A^2 + 2A)\alpha = (\lambda^2 + 2\lambda)\alpha.$$

由条件  $A^2 + 2A = 0$  推知  $(\lambda^2 + 2\lambda)\alpha = 0$ .

又由于  $\alpha \neq 0$ , 故有  $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ , 解得  $\lambda = -2, \lambda = 0$ .

因为  $A$  为实对称矩阵, 必可对角化, 且  $r(A) = 2$ , 所以

$$A \sim \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \Lambda.$$

因此矩阵  $A$  的全部特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$ .

(2) 矩阵  $A + kE$  仍为实对称矩阵. 由 (1) 知,  $A + kE$  的全部特征值为  $-2 + k, -2 + k, k$ .

于是, 当  $k > 2$  时, 矩阵  $A + kE$  的全部特征值大于零, 此时矩阵  $A + kE$  为正定矩阵.

**【例 6.20】** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求二次曲面  $f = x_1^2 + 2x_2^2 + Yx_3^2 + 2x_1x_2 + 2Xx_1x_3 = 1$  为椭球面的概率.

**【解】** 二次型  $f = x_1^2 + 2x_2^2 + Yx_3^2 + 2x_1x_2 + 2Xx_1x_3$  的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & X \\ 1 & 2 & 0 \\ X & 0 & Y \end{bmatrix}$ ,

设  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 存在正交矩阵  $Q$ , 使

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \text{即二次型 } f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2.$$

所以要使二次曲面  $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$  为椭球面, 必须  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  均大于 0 或均小于 0.

又因为  $A$  的顺序主子式  $a_{11} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$ , 所以  $A$  只能是正定阵.

$$\text{所以 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & X \\ 1 & 2 & 0 \\ X & 0 & Y \end{vmatrix} = Y - 2X^2 > 0,$$

故, 二次曲面  $f = 1$  为椭球面的概率为

$$P\{Y - 2X^2 > 0\} = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 \frac{1}{4} dy = \frac{2}{3}.$$

## 习 题 六

### 1. 填空题.

(1) 二次型  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$  的矩阵是\_\_\_\_\_.

(2) 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  对应的二次型是\_\_\_\_\_.

(3) 当  $t$  \_\_\_\_\_ 时, 实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  是正定的.

(4) 设  $A$  是实对称可逆矩阵, 则将  $f = x^T A x$  化为  $f = y^T A^{-1} y$  的线性变换为

(5) 设  $n$  阶实对称矩阵  $A$  的特征值分别为  $1, 2, \dots, n$ , 则当  $t$  \_\_\_\_\_ 时,  $tE - A$  为正定矩阵.

## 2. 选择题.

(1) 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 且  $x^T A x = x^T B x$ , 当( )时,  $A = B$ .

A. 秩(A) = 秩(B).

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$
$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{B}.$$
$$D, A^T = A \text{ 且 } B^T = B.$$

[ ]

(2) 下列矩阵为正定的是

A.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

B.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$C. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ . **【      】**

(3) 设  $A, B$  是  $n$  阶正定矩阵, 则( ) 是正定矩阵.

$$A, A^* + B^*$$
$$\mathbf{B}, \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^*.$$
$$C, A^*, B^*,$$
$$\text{D. } k_1 \mathbf{A}^* + k_2 \mathbf{B}^* .$$

【 〇 】

### 3. 计算证明题.

(1) 用合同变换将下列二次型化为标准形:

$$\textcircled{1} f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_2 - 2x_3)^2;$$
$$\textcircled{2} f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \dots + x_n x_{n+1}.$$

(2) 用正交变换将下列实二次型化为标准形:

$$\textcircled{1} f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3;$$
$$\textcircled{2} f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

(3) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$ , 通过正交变换化为标准形  $f = y_1^2 + ay_2^2 + by_3^2$ , 求  $a, b$  的值及所用的正交变换矩阵.

(4) 设  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵, 且满足

$$\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 3\mathbf{E},$$

证明  $A$  是正定矩阵.

(5) 设实对称矩阵  $A$  的特征值全大于  $a$ , 实对称矩阵  $B$  的特征值全大于  $b$ , 证明  $A+B$  的特征值全大于  $a+b$ .

(6) 设  $A$  是一个  $n$  阶实对称矩阵, 证明:  $\text{秩}(A) = n$  的充分必要条件为存在一个  $n$  阶实矩阵  $B$ , 使  $AB + B^T A$  是正定矩阵.



- (7) 设  $A, B$  是正定矩阵, 证明:  $AB$  是正定矩阵的充要条件是  $A$  与  $B$  可交换.
- (8)  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵, 求证: 对充分小的正数  $\epsilon$ ,  $E + \epsilon A$  为正定矩阵.
- (9) 二次型  $f = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 3ax_1x_3$  的正负惯性指数都是 1, 求参数  $a$  及曲面  $f = 1$  在点  $(1, 1, 0)$  处的切平面方程.
- (10) 对一般的  $n$  元实二次型  $f = x^T A x$ , 其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 证明:  $f$  在条件  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$  下的最大值恰为矩阵  $A$  的最大特征值.

## 参 考 答 案

$$1. (1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$(3) -\frac{5}{4} < t < 0. \quad (4) A^{-1}y. \quad (5) t > n.$$

2. (1) D (2) D (3) A

3. (1) ①  $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ , ②  $f = y_1^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \dots - y_{2n}^2$ .

(2) ①  $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$ , ②  $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$ .

$$(3) \text{无解, } \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

(4) ~ (8) 略.

(9)  $a = -2$ ,  $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$ .

(10) 略.

# 第三篇 概率论与数理统计

## 第一章 随机事件和概率

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、随机试验和随机事件

##### 1. 随机试验

概率论中将满足下面三个条件的试验称为随机试验,简称试验:

- 1° 可在相同的条件下重复进行;
- 2° 每次试验的结果不止一个;
- 3° 试验之前不能确定哪一个结果会发生,但所有的结果是明确可知的.

##### 2. 样本空间

随机试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间,常记为 $\Omega$ , $\Omega$ 中的元素称为样本点.

##### 3. 随机事件

样本空间的子集,即试验的结果称为随机事件,简称事件,由一个样本点组成的单点集,称为基本事件.另外,两个特殊的事件分别为:必然事件 $\Omega$ ——每次试验中一定发生的事件;不可能事件 $\emptyset$ ——每次试验中一定不发生的事件.

**【例 1.1】**写出下列随机试验的样本空间及相应的事件:

- (1) 同时掷三颗骰子,记录其出现的点数之和, $A = \{\text{点数之和为偶数}\}$ ;
- (2) 相继掷硬币两次, $A = \{\text{第一次出现正面}\}$ , $B = \{\text{两次出现同一面}\}$ ;
- (3) 在“1,2,3,4”这4个数字中可重复地任取2个数字, $A = \{\text{一个数是另一个数的2倍}\}$ ;
- (4) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度, $A = \{\text{以三段为边可构成三角形}\}$ .

**【解】**(1) 样本空间 $\Omega = \{3,4,5,\dots,18\}$ ,事件 $A = \{4,6,\dots,16,18\}$ .

(2) 样本空间 $\Omega = \{(\text{正面}, \text{反面}), (\text{反面}, \text{正面}), (\text{正面}, \text{正面}), (\text{反面}, \text{反面})\}$ ,  
事件 $A = \{(\text{正面}, \text{正面}), (\text{正面}, \text{反面})\}$ ,事件 $B = \{(\text{正面}, \text{正面}), (\text{反面}, \text{反面})\}$ .

(3) 样本空间 $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$ , $A = \{(1,2), (2,1), (2,4), (4,2)\}$ .

(4) 设 $x, y, z$ 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度,则样本空间

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}$$

事件

$$A = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \Omega, x + y > z, x + z > y, y + z > x\}.$$

## 二、事件的关系及其运算

### 1. 事件的包含

若事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生, 则称事件  $B$  包含  $A$  (或  $A$  包含于  $B$ ), 记为  $B \supset A$ .

### 2. 事件相等

若  $A \supset B$  且  $B \supset A$ , 则称事件  $A$  与  $B$  相等, 记为  $A = B$ .

### 3. 事件 $A$ 与 $B$ 之和(并)

$A \cup B$  (或  $A + B$ ) 表示事件  $A$  与  $B$  至少有一个发生.

推广:  $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$  表示  $n$  个事件  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  至少一个发生.

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  表示  $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$  至少一个发生.

性质: (1)  $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$ .

(2)  $A \cap (A \cup B) = A, B \cap (A \cup B) = B$ .

(3)  $A \cup A = A$ .

### 4. 事件 $A$ 与 $B$ 的差

$A - B$  表示事件  $A$  发生而  $B$  不发生.

性质: (1)  $A - B \subset A$ .

(2)  $(A - B) \cup A = A, (A - B) \cup B = A \cup B$ .

(3)  $(A - B) \cap A = A - B, (A - B) \cap B = \emptyset$ .

### 5. 事件 $A$ 与 $B$ 的积

$A \cap B$  (或  $AB$ ) 表示事件  $A$  与  $B$  同时发生.

推广:  $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$  表示  $n$  个事件  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  表示无穷个事件  $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$  同时发生.

性质: (1)  $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$ .

(2)  $(A \cap B) \cup A = A, (A \cap B) \cup B = B$ .

(3)  $A \cap A = A$ .

### 6. 互斥事件

在试验中, 若事件  $A$  与  $B$  不能同时发生, 即  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A, B$  为互斥事件.

推广: 在试验中, 若事件组  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  任意两个都是互斥的, 则该事件组称为互斥事件组.

**注** 在一次试验中, 基本事件都是两两互斥的.

### 7. 对立事件

每次试验中, “事件  $A$  不发生” 的事件称为事件  $A$  的对立事件或逆事件.  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ .

性质: (1)  $A + \bar{A} = \Omega$  (必然事件),

(2)  $A\bar{A} = \emptyset$  (不可能事件).

由定义可知: 对立事件一定是互斥事件, 但互斥事件不一定是对立事件.

### 8. 事件的运算律

与集合的运算律相似.

- (1) 交换律  $A \cup B = B \cup A, AB = BA$ .  
 (2) 结合律  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .  
 (3) 分配律  $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC), A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$ .  
 (4) 摩根律  $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ .

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}, \overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k}.$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}, \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}.$$

- (5) 对减法运算满足  $A - B = A\overline{B}$  (或  $A \cap \overline{B}$ )

**注** (1) 事件的运算律非常重要, 务必娴熟, 这是因为在今后的概率计算中, 经常将一些事件用另一些事件的运算来表示.

(2) 经常用文氏图帮助分析和理解事件的运算, 尤其是两个事件的运算更是如此.

**【例 1.2】** 设  $A, B, C$  表示三个随机事件, 试将下列事件用  $A, B, C$  表示出来.

- (1)  $A$  出现,  $B, C$  都不出现; (2)  $A, B$  都出现,  $C$  不出现;  
 (3) 三个事件都出现; (4) 三个事件中至少有一个出现;  
 (5) 三个事件都不出现; (6) 不多于一个事件出现;  
 (7) 不多于两个事件出现; (8) 三个事件至少有两个出现;  
 (9)  $A, B$  至少有一个出现,  $C$  不出现; (10)  $A, B, C$  中恰好有两个出现.

**【解】** (1)  $A\overline{B}\overline{C}$ . (2)  $AB\overline{C}$ . (3)  $ABC$ . (4)  $A+B+C$ . (5)  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ .

(6)  $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$  或  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ .

(7)  $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$  或  $\overline{ABC}$ .

(8)  $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$  或  $AB + BC + AC$ .

(9)  $(A+B)\overline{C}$ .

(10)  $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$ .

**【例 1.3】** 设一个工人生产了四个零件,  $A_i$  表示他生产的第  $i$  个零件是正品 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 试用  $A_i$  表示下列各事件:

- (1) 没有一个是次品; (2) 至少有一个是次品;  
 (3) 只有一个次品; (4) 至少有三个不是次品;  
 (5) 恰好有三个是次品; (6) 至多有一个是次品.

**【解】** (1)  $A_1A_2A_3A_4$ .

(2)  $\overline{A_1A_2A_3A_4}$  或  $\overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1A_2A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\overline{A_4} + \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4}$ .

(3)  $\overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1A_2A_3\overline{A_4}$ .

(4)  $A_1A_2A_3\overline{A_4} + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1A_2A_3A_4$ .

(5)  $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\overline{A_4} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}A_4$ .

(6)  $A_1A_2A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1A_2A_3\overline{A_4}$ .

**【例 1.4】** 下列各式说明什么包含关系?

- (1)  $AB = A$ ; (2)  $A + B = A$ ; (3)  $A + B + C = A$ .

【解】(1)  $AB = A \Leftrightarrow AB \subset A$  且  $A \subset AB$ ,

由  $A \subset AB \Rightarrow A \subset A$  且  $A \subset B \Rightarrow A \subset B$ .

(2)  $A + B = A \Leftrightarrow A + B \subset A$  且  $A \subset A + B$ ,

由  $A + B \subset A \Rightarrow B \subset A$ .

(3)  $A + B + C = A \Leftrightarrow A + B + C \subset A$  且  $A \subset A + B + C$ ,

由  $A + B + C \subset A \Rightarrow B + C \subset A$ .

### 三、事件的概率及其性质

#### 1. 概率的定义

设随机试验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ , 则称满足下列条件的事件集上的函数  $P(\cdot)$  为概率:

(1) 对于任意事件  $A$ ,  $P(A) \geq 0$ ;

(2) 对于必然事件  $\Omega$ ,  $P(\Omega) = 1$ ;

(3) 设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  为两两互不相容的事件, 即  $A_i A_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots)$ , 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

#### 2. 概率的性质

(1)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;

(2)  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ , 特别地, 当  $B \subset A$  时,  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ , 且  $P(B) \leq P(A)$ ;

(3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$ ;

(4) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

一般地, 对任意  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n). \end{aligned}$$

【例 1.5】已知  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(AB) = 0$ ,  $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$ , 则  $A, B, C$  全不发生的概率为\_\_\_\_\_.

【解】 $P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC)$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{6} - P(ABC) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{7}{12} \text{ (因为 } ABC \subset AB \text{),}$$

【例 1.6】 $P(A) = 0.7$ ,  $P(A - B) = 0.3$ , 则  $P(\bar{AB}) =$ \_\_\_\_\_.

【解】因为

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.3,$$

故

$$P(AB) = 0.4.$$

$$P(\bar{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

#### 四、条件概率与事件的独立性

##### 1. 条件概率

设  $A, B$  是两个事件, 且  $P(A) > 0$ , 称

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的条件概率.

##### 2. 事件的独立性

设  $A, B$  是两个事件, 若有等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称  $A$  与  $B$  相互独立.

一般地, 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个事件, 如果对于任意  $k (k \leq n)$  和任意  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , 具有等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为相互独立的事件; 如果其中任意两个是相互独立的, 则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为两两独立的事件.

**注** (1) 从直观上说,  $A$  与  $B$  相互独立即其中任意一事件的发生不影响另一事件发生的概率, 亦即有

$$P(B | A) = P(B) \quad (\text{或 } P(A | B) = P(A)).$$

(2)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立  $\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$  两两独立.

(3)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两独立  $\nRightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立.

(4)  $A$  与  $B$  相互独立和  $A$  与  $B$  互斥没有蕴涵关系; 若  $A$  与  $B$  既相互独立, 又互斥, 则  $A$  与  $B$  至少有一个为零概率事件.

(5) 一般并没有不等式  $P(B | A) > P(B)$ , 但若此不等式成立, 则也有  $P(A | B) > P(A)$ .

(6) 四对事件  $A, B; A, \bar{B}; \bar{A}, B; \bar{A}, \bar{B}$  中有一对相互独立, 则另外三对也相互独立.

(7) 条件概率  $P(\cdot | A)$  也是一种概率, 从而满足概率的所有基本性质.

(8) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 则由其中任意部分事件所产生的事件与另一部分事件所产生的事件相互独立.

**【例 1.7】** 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%, 30%, 10%, 从中随意取出一种, 结果不是三等品, 则取到的是一等品的概率为\_\_\_\_\_.

**【解】**  $A_i = \{\text{取到的一个产品为 } i \text{ 等品}\} \quad i = 1, 2, 3.$  显然,  $A_1, A_2, A_3$  为互斥事件组, 由题意有

$$P(\bar{A}_3) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{90}{100},$$

$$P(A_1 | \bar{A}_3) = \frac{P(A_1 \bar{A}_3)}{P(\bar{A}_3)} = \frac{P[A_1(A_1 \cup A_2)]}{P(\bar{A}_3)} = \frac{P(A_1)}{P(\bar{A}_3)} = \frac{60\%}{90\%} = \frac{2}{3}.$$

**【例 1.8】** 设  $0 < P(A) < 1, \quad 0 < P(B) < 1, \quad P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = 1$ , 则

(A) 事件  $A$  与  $B$  互不相容.

(B) 事件  $A$  与  $B$  互相对立.

(C) 事件  $A$  和  $B$  互不独立.

(D) 事件  $A$  和  $B$  相互独立.

**【解】** 因为  $P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = P(A | B) + 1 - P(A | \bar{B}) = 1$ ,

所以  $P(A | B) - P(A | \bar{B}) = 0$ ,

即

$$P(A | B) = P(A | \bar{B})$$

↓

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$\Rightarrow P(AB)[1 - P(B)] = P(B)P(A\bar{B})$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(B)[P(AB) + P(A\bar{B})] = P(B)P[A(B + \bar{B})] = P(B)P(A).$$

故应选(D).

【例 1.9】设  $A, B, C$  三个事件两两独立, 则  $A, B, C$  相互独立的充分必要条件是

(A)  $A$  与  $BC$  独立.

(B)  $AB$  与  $A \cup C$  独立.

(C)  $AB$  与  $AC$  独立.

(D)  $A \cup B$  与  $A \cup C$  独立.

【 】

【解】 $A, B, C$  相互独立的充要条件:

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

由  $P[A(BC)] = P(A)P(BC) = P(A)P(B) \cdot P(C)$ , 可知(A)入选.

注 由前面关于事件独立性的注(8) 即可知(A) 为正确答案.

## 五、重要题型

### 1. 古典概型

如果随机试验  $E$  满足下面条件:

(1) 试验的样本空间  $\Omega$  的元素只有有限个;

(2) 样本空间中每个元素, 即基本事件发生的可能性相同, 则称此试验为古典概型. 对于古典概型, 事件  $A$  的概率有下列计算公式:

$$P(A) = \frac{A \text{ 中基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

### 2. 几何概型

如果随机试验  $E$  的样本空间  $\Omega$  为欧氏空间中的一个区域, 且每个样本点的出现具有等可能性, 则称此试验为几何概型. 对于几何概型, 事件  $A$  的概率有下列计算公式:

$$P(A) = \frac{A \text{ 的度量(长度, 面积, 体积)}}{\Omega \text{ 的度量(长度, 面积, 体积)}}.$$

### 3. 伯努利(Bernoulli) 概型

如果试验  $E$  的结果只有两个:  $A$  与  $\bar{A}$ , 则称此试验为伯努利概型(试验). 若将伯努利试验独立重复  $n$  次, 则称为  $n$  重伯努利概型, 简称伯努利概型. 在伯努利概型中, 若  $P(A) = p$ , 则  $n$  次试验中事件  $A$  发生  $k$  次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

## 六、重要公式

### 1. 乘法公式

设  $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0$ , 则

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = P(A_2)P(A_1 | A_2).$$

一般地, 设  $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ , 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}).$$

## 2. 全概率公式

设  $B_1, B_2, \cdots, B_n$  为一完备事件组, 即  $B_i B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ , 则对事件  $A$  有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i).$$

## 3. 贝叶斯(Bayes) 公式

设  $B_1, B_2, \cdots, B_n$  为一完备事件组,  $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n, P(A) > 0$ , 则有

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

**注** (1) 乘法公式主要用来计算没有相互独立性的若干个事件之积的概率.

(2) 全概率公式和贝叶斯公式中完备事件组可以是有限个, 也可以是可列个. 另外, 对于具体问题, 正确找出完备事件组是求解的关键.

**【例 1.10】** 设 10 件产品中有 2 件次品, 8 件正品. 现每次从中任取一件产品, 且取后不放回, 试求下列事件的概率:

- (1) 前两次均取到正品;
- (2) 第二次取到次品;
- (3) 若已知第二次取到次品, 则第一次也取到次品.

**【解】** 设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到次品}\}, i = 1, 2$ .

(1) 前两次均取到正品的概率为

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) &= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \\ &= \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}. \end{aligned}$$

(2)  $A_1, \bar{A}_1$  构成一个完备事件组, 于是由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 | A_1)P(A_1) + P(A_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} + \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(3) 由贝叶斯公式有

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_2 | A_1)P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{9} \times \frac{2}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{9}.$$

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 古典概型与几何概型

**提示** 首先要正确判断概型, 其次弄清样本空间与有利事件的结构, 再按相应的概率计算公式



进行计算. 古典概型中概率的计算常需要用到排列组合中的几个基本结论.

(1) 加法原理.

设完成一件事有  $n$  类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事), 若第一类方法有  $m_1$  种, 第二类方法有  $m_2$  种,  $\dots$ , 第  $n$  类方法有  $m_n$  种, 则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

种方法.

(2) 乘法原理.

设完成一件事须有  $n$  个步骤(仅当  $n$  个步骤都完成, 才能完成这件事), 若第一步有  $m_1$  种方法, 第二步有  $m_2$  种方法,  $\dots$ , 第  $n$  步有  $m_n$  种方法, 则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$$

种方法.

**注** 加法原理与乘法原理的区别: 前者完成一步即完成一件事; 后者须  $n$  步均完成才完成一件事.

(3) 排列.

从  $n$  个不同元素中任取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个按照一定的顺序排成一列, 称为从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个排列. 从  $n$  个不同元素取出  $m$  个元素的所有排列种数, 记为

$$P_n^m = n(n-1) \cdot \dots \cdot [n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

从  $n$  个不同元素中全部取出的排列称为全排列, 其排列的种数, 记为

$$P_n^n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

规定  $0! = 1$ .

(4) 允许重复的排列.

从  $n$  个不同元素中有放回地取  $m$  个按照一定顺序排列成一列. 其排列的种数为

$$N = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{m\text{个}} = n^m.$$

(5) 不全相异元素的全排列.

若  $n$  个元素中, 有  $m$  类 ( $1 < m \leq n$ ) 本质不同的元素, 而每类元素中分别有  $k_1, k_2, \dots, k_m$  个元素 ( $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, 1 < k_i < n, i = 1, 2, \dots, m$ ), 则  $n$  个元素全部取出的排列称为不全相异元素的一个全排列. 其排列的种数为

$$N = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

(6) 组合.

从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素, 不管其顺序并成一组, 称为从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合, 其组合总数, 记为  $C_n^m$ , 且有

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

组合的性质: (1)  $C_n^m = C_n^{n-m}$ , (2)  $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ .

**注** 排列与组合的区别: 前者与次序有关, 后者与次序无关.

**【例 1.11】** 袋中有 9 个球(4 白, 5 黑), 现从中任取两个, 求:

- (1) 两个均为白球的概率;
- (2) 两个球中一个是白的, 另一个是黑的概率;

(3) 至少有一个黑球的概率.

**【解】**(1) 方法一: 随机试验为从 9 个球中任取两个, 假设其与先后次序有关, 则基本事件总数为  $P_9^2$ , 且每事件为等可能性, 有利于取两个白球的事件  $A_1$  的基本事件个数  $P_4^2$ , 故

$$P(A_1) = \frac{P_4^2}{P_9^2} = \frac{1}{6}.$$

方法二: 随机试验为从 9 个球中任取两个, 设其与先后次序无关, 则基本事件总数为  $C_9^2$ , 且每事件为等可能性, 有利于取两个白球的事件  $A_1$  的基本事件数  $C_4^2$ , 故

$$P(A_1) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}.$$

(2) 方法一: 取球与先后次序有关, 则基本事件总数为  $P_9^2$ , 两球中一白一黑 = {先白后黑, 先黑后白}, 其有利于取一白一黑事件  $A_2$  的基本事件个数  $P_4^1 P_5^1 + P_5^1 P_4^1 = 2P_4^1 P_5^1$ , 故

$$P(A_2) = \frac{2P_4^1 P_5^1}{P_9^2} = \frac{5}{9}.$$

方法二: 取球与先后次序无关, 则基本事件总数为  $C_9^2$ , 有利于取一白一黑事件  $A_2$  的基本事件个数  $C_4^1 \cdot C_5^1$  故

$$P(A_2) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}.$$

(3) 至少有一个黑球的事件  $A_3$  的对立事件  $\overline{A_3}$  是: 任取的两个球均是白球, 即  $\overline{A_3} = A_1$ , 由概率的性质有

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

**【例 1.12】**在电话号码簿中任取一个电话号码, 求后面四个数全不相同的概率(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0, 1, 2, ..., 9).

**【解】**本题与电话号码的位数无关. 电话号码的数字是允许重复的, 因此由 0, 1, 2, ..., 9 所构成的后四个数字的个数为  $10^4$ , 后“四个数字全不相同”的个数为  $P_{10}^4$ , 故

$$P(A) = \frac{P_{10}^4}{10^4} = 0.504.$$

**【例 1.13】**把 10 本书随意地放在书架上, 求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

**【解】**基本事件总数  $10!$ , 有利于将指定的 5 本书放在一起的基本事件个数为  $6! \cdot 5!$  (其中  $6!$  是指 5 本书当做一个元素进行全排列的总数,  $5!$  是 5 本书相互之间进行全排列的总数), 故

$$P(A) = \frac{6! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{42}.$$

**【例 1.14】**从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 求此 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率.

**【分析】**本例的基本事件总数容易计算, 即为  $C_{10}^4$ , 但有利事件数相对较难, 下面给出几种不同解法.

**【解法一】**首先从 5 双鞋中取出一双, 并将此两只鞋全部取出, 然后从剩下的 4 双中取出两双, 再在每双中各取 1 只, 于是取法共有  $C_5^1 C_2^2 C_4^2 C_2^2 C_2^2$  种.

显然, 这样取得的 4 只鞋仅有一双成对, 而 4 只鞋配成两双的取法有  $C_5^2$  种, 故取得的 4 只鞋至少有一双的取法有  $C_5^1 C_2^2 C_4^2 C_2^2 C_2^2 + C_5^2$  种.

故所求概率  $P = (C_5^1 C_2^2 C_4^2 C_2^2 C_2^2 + C_5^2) / C_{10}^4 = \frac{13}{21}.$

**【解法二】** 设  $A$  表示“至少有两只鞋子成一双”，于是  $\bar{A}$  表示“没有成双的鞋子”，故有利于  $\bar{A}$  的基本事件数为  $C_5^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1$ ，即从 5 双中取出 4 双再从每双中各取 1 只的取法总数，所以

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - C_5^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 / C_{10}^4 = \frac{13}{21}.$$

**注** (1) 从上面的例题可以发现，概率的求逆公式  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$  常可使问题大为简化，这是概率计算中的一个重要技巧，必须熟练掌握，而且通常用在“至少”或“至多”的问题中。

(2) 古典概型中概率的计算是一个难点，但并不是考试的重点，故只需掌握较简单的古典概型的计算即可。

(3) **【例 1.14】** 有下面易犯的错误的解法，试指出错误所在：

首先从 5 双鞋中任取 1 双，其 2 只全部取出，然后在剩下的 8 只鞋中任取 2 只，于是总的取法为  $C_5^1 C_2^2 C_8^2$ ，并且这样取出的 4 只鞋可保证至少有两只成一双，故所求概率为  $P(A) = C_5^1 C_2^2 C_8^2 / C_{10}^4$ 。

**【例 1.15】** 在长度为  $a$  的线段内任取两点将其分成三段，求它们可以构成一个三角形的概率。

**【解】** 设线段被分成的三段长分别为  $x, y$  和  $a - x - y$ ，则样本空间为由  $x \geq 0, y \geq 0$  及  $x + y \leq a$  所构成的图形，其面积  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}a^2$ ，有利于事件  $A$  (即  $x, y, a - x - y$  三段构成三角形) 的基本事件集：由线段  $x, y, a - x - y$  所围成的三角形，其面积记为  $S_{\triangle DCE}$  (如图 1-1 所示)。

由三角形两边之和大于第三边的性质，有

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}, 0 \leq a - x - y \leq \frac{a}{2}.$$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \leq x + y \leq a$  (它们构成三角形  $DCE$ )，则其面积  $S_{\triangle DCE} =$

$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2$ ，于是由几何概型的概率计算公式有

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2}{\frac{1}{2} a^2} = \frac{1}{4}.$$

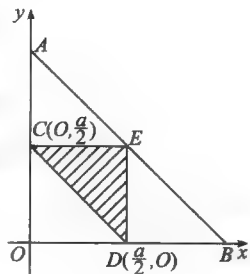


图 1-1

**【例 1.16】** 从  $(0, 1)$  中随机地取两个数  $x$  和  $y$ ，则满足条件的  $xy < \frac{1}{4}$  的概率是\_\_\_\_\_。

**【解】** 显然本题为几何概型，如图 1-2 所示。

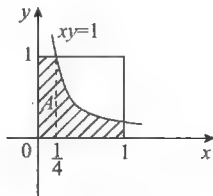


图 1-2

则  $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $A = \{(x, y) | xy < \frac{1}{4}, (x, y) \in \Omega\}$

于是  $S_n = 1$ ,  $S_A = \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ ,

故所求概率为  $p = \frac{S_A}{S_n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ .

### 题型二 事件的关系和概率性质的命题

**提示** 这类问题多以填空题、选择题的形式出现,只要充分利用事件的关系、运算律和概率的基本性质不难求解.

**【例 1.17】** 设  $A, B$  是任意两个随机事件, 则  $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【解】** 因为  $(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) = (\bar{A}A + AB + \bar{A}B + B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$   
 $= (AB + \bar{A}B + B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) = B(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$   
 $= B\bar{A}(A+\bar{B}) = B\bar{A}A + B\bar{A}\bar{B} = \emptyset$ .

故应填 0.

**【例 1.18】** 设两个相互独立的事件  $A$  和  $B$  都不发生的概率为  $\frac{1}{9}$ ,  $A$  发生  $B$  不发生的概率与  $B$  发生  $A$  不发生的概率相等, 则  $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【解】** 由已知条件有

$$P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}, P(A\bar{B}) = P(B\bar{A}).$$

另外由  $A, B$  的独立性得  $\bar{A}, \bar{B}$  也独立, 从而

$$P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{9},$$

$$\text{即} \quad [1 - P(A)][1 - P(B)] = \frac{1}{9},$$

$$\text{又} \quad P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB), P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB),$$

故  $P(A) = P(B)$ , 所以  $[1 - P(A)]^2 = \frac{1}{9}$ , 即  $P(A) = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$  (舍去). 应填  $\frac{2}{3}$ .

**【例 1.19】** 假设事件  $A$  和  $B$  满足  $P(B | A) = 1$ , 则

- (A)  $A$  是必然事件. (B)  $A \supset B$ . (C)  $A \subset B$ . (D)  $P(A\bar{B}) = 0$ .

【 】

**【解】** 由  $P(B | A) = 1 \Rightarrow P(A) - P(AB) = 0 \Rightarrow P(A\bar{B}) = 0$ . 故应选 (D).

**【例 1.20】** 当事件  $A$  与  $B$  同时发生时, 事件  $C$  必发生, 则下列结论正确的是

- (A)  $P(C) = P(AB)$ . (B)  $P(C) = P(A \cup B)$ .  
 (C)  $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$ . (D)  $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$ . 【 】

**【解】** 由于  $AB \subset C$ , 故

$$P(C) \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1. \text{ 即选 (C).}$$

**【例 1.21】** 设  $P(A) = a, P(B) = b, P(A+B) = c$ , 则  $P(A\bar{B})$  为

- (A)  $a - b$ . (B)  $c - b$ . (C)  $a(1 - b)$ . (D)  $a(1 - c)$ .

**【解】** 利用恒等式  $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ ,

于是  $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB)$ ,  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ,  
由上面两式有  $P(\overline{AB}) = P(A+B) - P(B) = c-b$ , 故(B)入选.

【例 1.22】设  $A, B$  为两个互斥事件, 且  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , 则结论正确的是

(A)  $P(B|A) > 0$ .

(B)  $P(A|B) = P(A)$ .

(C)  $P(A|B) = 0$ .

(D)  $P(AB) = P(A)P(B)$ . 【 】

【解】因为  $A, B$  互斥即  $AB = \emptyset$ , 所以  $P(AB) = 0$ .

又  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , 由公式  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ , 可得  $P(A|B) = 0$ . 故(C)入选.

【例 1.23】设  $A$  和  $B$  是任意两个概率不为零的不相容事件, 则下列结论中肯定正确的是

(A)  $\overline{A}$  与  $\overline{B}$  不相容.

(B)  $\overline{A}$  与  $\overline{B}$  相容.

(C)  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

(D)  $P(A-B) = P(A)$ . 【 】

【解】由  $P(AB) = 0$  以及  $P(A-B) = P(A) - P(AB)$  知应选(D). 另外要特别注意(B)不一定正确, 因为当  $A, B$  互为对立事件时,  $A, B$  互不相容, 但  $\overline{A}, \overline{B}$  也互不相容.

【例 1.24】对于任意二事件  $A$  和  $B$ , 与  $A \cup B = B$  不等价的是

(A)  $A \subset B$ .

(B)  $\overline{B} \subset \overline{A}$ .

(C)  $A\overline{B} = \emptyset$ .

(D)  $\overline{A}\overline{B} = \emptyset$ . 【 】

【解】由  $A \cup B = B$ , 立即可知  $A \subset B$ , 从而正确答案为(D).

【例 1.25】设  $P(A) > 0$ , 试证:  $P(B|A) \geq 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}$ .

【分析】通常用逆推法, 若不等式成立, 则  $P(A)P(B|A) \geq P(A) - P(\overline{B})$ , 即

$$P(AB) \geq P(A) - 1 + P(B).$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1.$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) \leq 1.$$

【证】因为  $P(A \cup B) \leq 1$ , 即  $P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1$ .

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A)P(B|A) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A)P(B|A) \geq P(A) - [1 - P(B)]$$

$$\Rightarrow P(A)P(B|A) \geq P(A) - P(\overline{B})$$

因为  $P(A) > 0$ , 所以  $P(B|A) \geq 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}$ .

【例 1.26】设  $A, B$  独立,  $AB \subset D, \overline{A}\overline{B} \subset \overline{D}$ , 证明

$$P(AD) \geq P(A)P(D).$$

【证明】因  $\overline{A}\overline{B} \subset \overline{D} \Rightarrow D \subset A \cup B$ , 于是有如图 1-3 所示的关系.

由于

$$AD = AB + D\overline{B},$$

故

$$P(AD) = P(AB) + P(D\overline{B}).$$

而

$$P(AB) = P(A)P(B) \geq P(A)P(DB)$$

$$P(D\overline{B}) \geq P(A)P(D\overline{B}).$$

$$\Rightarrow P(AD) = P(AB) + P(D\overline{B}) = P(A)P(B) + P(D\overline{B})$$

$$\geq P(A)P(DB) + P(A)P(D\overline{B}) = P(A)[P(DB) + P(D\overline{B})]$$

$$= P(A)P(D).$$

即

$$P(AD) \geq P(A)P(D).$$

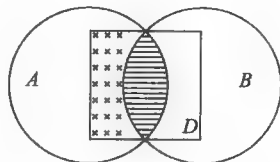


图 1-3

题型三 条件概率与积事件概率的计算

**提示** 正确理解两种概率是求解的关键,对于具体问题,我们可以从下面几点进行判断:

1° 从样本空间上讲,积事件概率  $P(AB)$  是在原样本空间  $\Omega$  中考虑,而条件概率  $P(B|A)$  是在一个缩小的样本空间  $\Omega_A = A$  中考虑;

2° 积事件概率  $P(AB)$  指  $A, B$  同时发生的概率,而  $P(B|A)$  指已知  $A$  发生的条件下  $B$  发生的条件概率,故此时  $A, B$  在时间上一定有“先后”关系或逻辑上有“主从”关系.

**【例 1.27】**某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8,活到 25 岁的概率为 0.4,问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率是多少?

**【解】**设  $A = \{\text{活到 20 岁以上}\}, B = \{\text{活到 25 岁以上}\}$ ,显然  $A, B$  之间有“先后”关系,即  $A$  先发生,  $B$  后发生,故该问题属于条件概率  $P(B|A)$ .

因为  $P(A) = 0.8, P(B) = 0.4$ , 且  $B \subset A, AB = B, P(AB) = P(B) = 0.4$ .

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}.$$

**【例 1.28】**甲、乙两班共有 70 名同学,其中女同学 40 名,设甲班有 30 名同学,而女生 15 名,问在碰到甲班同学时,正好碰到一名女同学的概率.

**【解】**设  $A = \{\text{碰到甲班同学}\}, B = \{\text{碰到女同学}\}$ .

这是一个有前提条件—— $\{\text{碰到甲班同学}\}$  的问题,因此是条件概率  $P(B|A)$ .

$$\text{因为 } P(AB) = \frac{15}{70}, P(A) = \frac{30}{70}, \text{ 所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}.$$

**【例 1.29】**某厂的产品中有 4% 的废品,在 100 件合格品中有 75 件一等品,试求在该厂的产品中任取一件是一等品的概率.

**【解】**设  $A = \{\text{任取的一件是合格品}\}, B = \{\text{任取的一件是一等品}\}$ .

因为所求的是在某厂的产品中任取一件,即样本空间是某厂的产品,因此这是属于  $P(AB)$  的问题.

$$\text{因为 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 96\%, P(B|A) = 75\%,$$

$$\text{所以 } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{96}{100} \cdot \frac{75}{100} = 0.72.$$

**【例 1.30】**设某公司有 7 个顾问,每个顾问提供正确意见的百分比为 0.6,现为某事可行与否个别征求顾问意见,并按多数人的意见作出决策,试求作出正确决策的概率.

**【分析】**作出正确决策是指某事实际上可行且作出可行决策或某事实际上不可行且作出不可行决策,故所求概率为两个乘积事件的和的概率,而在求积事件概率时通常转化为条件概率,则利用乘法公式.

**【解】**设  $A$  表示“某事实际上可行”,  $B$  表示“多数顾问说可行”,则所求概率为

$$P(AB + \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}).$$

$$\text{而 } P(B|A) = P(\bar{B}|\bar{A}) = \sum_{i=4}^7 C_7^i (0.6)^i (0.4)^{7-i} \approx 0.7102,$$

$$\text{故 } P(AB + \bar{A}\bar{B}) = [P(A) + P(\bar{A})]P(B|A) \approx 0.7102.$$

题型四 全概率公式与贝叶斯公式的命题

**提示** “由因果果”利用全概率公式，“由果索因”利用逆概率公式，即贝叶斯公式。如何判别一个概率型是否是全概率呢？一般有三种方法：

方法一：全概率很容易与概率的和公式（即概率的加法公式）相混淆，若用概率的和公式去做，题设中的某些条件就用不上，此时应马上想到用全概率来计算。

方法二：如果能找出完备事件组，即可肯定适用全概率和逆概率公式来做；

方法三：如果所求的概率可分成两步来完成。第一步有多种情况发生，情况比较复杂，第二步只有一种明确的情况，要求的是第二步的结果发生的概率，则用全概率公式。

**【例 1.31】**三个箱子中，第一箱装有 4 个黑球 1 个白球，第二箱装有 3 个黑球 3 个白球，第三箱装有 3 个黑球 5 个白球，现先任取一箱，再从该箱中任取一球，试求：(1) 取出的球是白球的概率。(2) 若取出的为白球，则该球属于第二箱的概率。

**【分析】**本题的试验过程是分两个阶段进行的，即先取箱子，然后取球，并且第一阶段的结果，即取哪一个箱子不知道。(1) 中是求第二阶段结果发生的概率，于是可用全概率公式计算；(2) 中是第二阶段结果已知，追究此结果由第一阶段哪一个结果所引起的概率，故用贝叶斯公式计算。

**【解】**设  $A_i$  表示“取出第  $i$  个箱子”， $i = 1, 2, 3$ ,  $B$  表示“取出白球”。

于是 
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(B | A_1) = \frac{1}{5}, P(B | A_2) = \frac{3}{6}, P(B | A_3) = \frac{5}{8},$$

(1) 由全概率公式得 
$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B | A_i) P(A_i) = \frac{53}{120}.$$

(2) 由贝叶斯公式得 
$$P(A_2 | B) = \frac{P(B | A_2) P(A_2)}{P(B)} = \frac{20}{53}.$$

**【例 1.32】**设一人群中 37.5% 的人血型为 A 型，20.9% 为 B，33.7% 为 O 型，7.9% 为 AB 型，已知能允许输血的血型配对见表 1-1，现在人群中任选一人为输血者，再选一个为受血者，问输血能成功的概率是多少？

表 1-1

输血者 受血者	A	B	AB	O
A	✓	×	×	✓
B	×	✓	×	✓
AB	✓	✓	✓	✓
O	×	×	×	✓
注：✓ 表示允许输血；× 表示不允许输血。				

**【分析】**本题的试验过程可看做分两个阶段进行，第一阶段是选择输血者，结果不确定；第二阶段是选择受血者，其试验结果为“成功”与“不成功”，现求“成功”的概率，故用全概率公式。

【解】设  $B_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示“从人群中任选一人, 其血型分别为 A, B, AB, O 型”,  $A^*$  “表示受血者输血成功”, 于是

$$P(A^* | B_1) = P(B_1) + P(B_3) = 45.4\%,$$

$$P(A^* | B_2) = P(B_2) + P(B_3) = 28.8\%,$$

$$P(A^* | B_3) = P(B_3) = 7.9\%,$$

$$P(A^* | B_4) = \sum_{i=1}^4 P(B_i) = 100\%.$$

由全概率公式得到

$$\begin{aligned} P(A^*) &= \sum_{i=1}^4 P(A^* | B_i) P(B_i) \\ &= 0.454 \times 0.375 + 0.288 \times 0.209 + 0.079 \times 0.079 + 1 \times 0.337 \\ &= 0.5737. \end{aligned}$$

【例 1.33】发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·”和“—”, 由于通信系统受到干扰, 当发出信号“·”时, 收报台未必收到信号“·”, 而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“·”和“—”; 同样, 当发出信号“—”时, 收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号“—”和“·”, 求:

(1) 收报台收到信号“·”的概率;

(2) 当收报台收到信号“·”时, 发报台是发出信号“·”的概率.

【解】设  $B_1, B_2$  分别表示发出信号“·”和“—”,  $A$  表示收到信号“·”, 则有

$$P(B_1) = 0.6, P(B_2) = 0.4, P(A | B_1) = 0.8, P(A | B_2) = 0.1.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) = 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1 = 0.52.$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1)P(A | B_1)}{P(A)} = \frac{0.6 \times 0.8}{0.52} = \frac{12}{13}.$$

【例 1.34】设一个口袋中有 6 个球, 令  $A_1, A_2, A_3$  依次表示这 6 个球分别为 4 红, 2 白; 3 红, 3 白; 2 红, 4 白. 设验前概率为  $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{6}, P(A_3) = \frac{1}{3}$ . 现从这口袋中任取

一球, 得到白球, 求相应的后验概率?

【解】令  $B = \{\text{任取一球为白球}\}$ .

$$\text{由题设} \quad P(B | A_1) = \frac{2}{6}, P(B | A_2) = \frac{3}{6}, P(B | A_3) = \frac{4}{6}.$$

由贝叶斯公式有

$$\begin{aligned} P(A_1 | B) &= \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + P(A_3)P(B | A_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{6}{17}. \end{aligned}$$

同理可得

$$P(A_2 | B) = \frac{3}{17}, P(A_3 | B) = \frac{8}{17}.$$



**【例 1.35】**有两个盒子,第一盒中装有 2 个红球,1 个黑球,第二盒中装有 2 个红球,2 个黑球,现从这两盒中各任取一球放在一起,再从中任取一球,问

(1) 这个球是红球的概率;

(2) 若发现这个球是红球,问第一盒中取出的球是红球的概率.

**【解】**(1) 令  $A = \{\text{取得一个红球}\}$ ,  $B_i = \{\text{从第 } i \text{ 个盒中取出一个红球}\}$ ,  $i = 1, 2$ . 于是

$$P(B_1 B_2) = \frac{2 \times 2}{3 \times 4} = \frac{1}{3}, P(A | B_1 B_2) = 1.$$

$$P(B_1 \bar{B}_2) = \frac{2 \times 2}{3 \times 4} = \frac{1}{3}, P(A | B_1 \bar{B}_2) = \frac{1}{2}.$$

$$P(\bar{B}_1 B_2) = \frac{1 \times 2}{3 \times 4} = \frac{1}{6}, P(A | \bar{B}_1 B_2) = \frac{1}{2}.$$

$$P(\bar{B}_1 \bar{B}_2) = \frac{1 \times 2}{3 \times 4} = \frac{1}{6}, P(A | \bar{B}_1 \bar{B}_2) = 0.$$

由全概率公式有

$$P(A) = P(A | B_1 B_2)P(B_1 B_2) + P(A | B_1 \bar{B}_2)P(B_1 \bar{B}_2) + P(A | \bar{B}_1 B_2)P(\bar{B}_1 B_2) + P(A | \bar{B}_1 \bar{B}_2)P(\bar{B}_1 \bar{B}_2) = \frac{7}{12}.$$

$$(2) P(B_1 | A) = P(B_1 B_2 + B_1 \bar{B}_2 | A) = P(B_1 B_2 | A) + P(B_1 \bar{B}_2 | A)$$

$$= \frac{P(A | B_1 B_2)P(B_1 B_2) + P(A | B_1 \bar{B}_2)P(B_1 \bar{B}_2)}{P(A)} = \frac{6}{7}.$$

**【提示】**本题中的完备事件组为  $B_1 B_2, B_1 \bar{B}_2, \bar{B}_1 B_2, \bar{B}_1 \bar{B}_2$ , 故在求  $P(B_1 | A)$  时应先转化为完备事件组中的事件的条件概率  $P(B_1 B_2 + B_1 \bar{B}_2 | A)$ , 再按 Bayes 公式进行计算.

### 题型五 有关伯努利概型的命题

**【提示】**若试验可以看成或分解成独立重复进行的试验,且每次试验的结果只需考虑两个  $A$  与  $\bar{A}$ , 则该试验就是一个伯努利试验,有关概率用二项分布概率公式:  $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$  进行计算.

**【例 1.36】**设在 3 次独立试验中,事件  $A$  出现的概率均相等且至少出现 1 次的概率为  $\frac{19}{27}$ ,则在 1 次试验中,事件  $A$  出现的概率为\_\_\_\_\_.

**【解】**令  $P(A) = p$ , 则  $1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = \frac{19}{27}$ , 即  $(1-p)^3 = \frac{8}{27}$ .

$$\text{故, } p = \frac{1}{3}.$$

**【例 1.37】**在伯努利试验中,若  $A$  出现的概率为  $p$ ,求在出现  $m$  次  $\bar{A}$  之前出现  $k$  次  $A$  的概率.

**【分析】**事件“在出现  $m$  次  $\bar{A}$  之前出现  $k$  次  $A$ ”等价于事件“在前  $k+m-1$  次试验中出现  $k$  次  $A$ ,  $m-1$  次  $\bar{A}$ , 且第  $m+k$  次出现  $\bar{A}$ ”.

**【解】**由上面分析即得所求概率为

$$\begin{aligned} P &= C_{k+m-1}^k p^k (1-p)^{m-1} \cdot (1-p) \\ &= C_{k+m-1}^k p^k (1-p)^m. \end{aligned}$$

**【例 1.38】**一本 500 页的书,共有 100 个错字,每个错字等可能地出现在每一页上,按照泊松定理,在给定的一页上至少有 2 个错字的概率为

(A) 1.

(B)  $1 - e^{-\frac{1}{5}}$ .

(C)  $1 - e^{-\frac{2}{5}}$ .

(D)  $1 - e^{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}}$ .

【 】

**【分析】**本题的关键是如何建立其概型,由题意,每个错字出现在某页上的概率均为  $\frac{1}{500}$ ,100 个错字就可看成做 100 次伯努利试验,于是问题就迎刃而解了.

**【解】**设  $A$  表示“某页上至少有 2 个错字”,于是有

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^1 C_{100}^i \left(\frac{1}{500}\right)^i \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{100-i} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{100} - 100 \times \frac{1}{500} \times \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{99} \end{aligned}$$

由泊松定理得  $\approx 1 - e^{-1/5} - \frac{1}{5}e^{-1/5}$

所以(D) 为答案.

**注 1°** 泊松定理:设随机变量  $X_n$  服从二项分布  $B(n, p_n)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$  ( $\lambda$  为正常数), 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

**2°** 也就是当  $n$  很大,  $p$  很小时, 二项分布  $B(n, p)$  近似于泊松分布  $p(\lambda)$ , 其中  $\lambda = np$  (一般当  $n > 10, p < 0.1$  时可用该定理).

**【例 1.39】**假设一厂家生产的每台仪器,以概率 0.70 可直接出厂;以概率 0.30 需进一步调试,经调试后以概率 0.80 可以出厂,以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了  $n$  ( $n \geq 2$ ) 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立). 求:(1) 全部能出厂的概率  $\alpha$ ;  
(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率  $\beta$ ;(3) 其中至少有两件不能出厂的概率  $\theta$ .

**【解】**(1) 对于新生产的每台仪器,  $A$  表示“仪器需进一步调试”,  $B$  表示“仪器能出厂”, 则  $\bar{A}$  表示“仪器能直接出厂”,  $AB$  表示“仪器需进一步调试且能出厂”, 于是

$$B = \bar{A} + AB, P(A) = 0.30, P(B | A) = 0.80,$$

$$P(AB) = P(A)P(B | A) = 0.30 \times 0.80 = 0.24,$$

$$P(B) = P(\bar{A} + AB) = P(\bar{A}) + P(AB) = 0.70 + 0.24 = 0.94.$$

设  $X$  为所生产的  $n$  台仪器中能出厂的台数, 则  $X$  作为  $n$  次独立试验成功(仪器能出厂) 的次数,  $X$  服从参数  $p = 0.94$  的  $n$  重伯努利概型, 故

$$\alpha = P\{X = n\} = C_n^n (0.94)^n (1 - 0.94)^0 = (0.94)^n,$$

$$(2) \beta = P\{X = n - 2\} = C_n^2 (0.94)^{n-2} (0.06)^2.$$

$$\begin{aligned} (3) \theta &= P\{X \leq n - 2\} = 1 - P\{X = n - 1\} - P\{X = n\} \\ &= 1 - n \times 0.94^{n-1} \times 0.06 - 0.94^n. \end{aligned}$$

### 第3节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势 1** 如果要求的是若干事件中“至少”有一个发生的概率,则马上联想到概率加法公式;当事件组相互独立时,则用对立事件的概率公式  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ .

**【例 1.40】** 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立,  $P(A_k) = p_k$ , 求诸事件中至少发生一个的概率.

**【解】**  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n)$   
 因为  $A_1, A_2, \dots, A_n$  互相独立  $\underline{\underline{1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)}}$   
 $= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$

**思维定势 2** 若给出的试验可分解成(0-1)的  $n$  重独立重复试验,则马上联想到 Bernoulli 试验,及其概率计算公式

$$P\{z = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

**【例 1.41】** 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对  $X$  独立地重复观察 4 次,试求观察值大于  $\frac{\pi}{3}$  的次数为 2 的概率.

**【解】**  $p = P\left\{X > \frac{\pi}{3}\right\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx$   
 $= \sin \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{1}{2}.$

设  $\zeta$  表示 4 次观察中观察值大于  $\frac{\pi}{3}$  的次数.

于是  $\zeta \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ , 故

$$P\{\zeta = 2\} = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

**思维定势 3** 若某事件是伴随着一个完备事件组的发生而发生,则马上联想到该事件的发生概率是用全概率公式计算. 关键:寻找完备事件组.

**【例 1.42】** 设  $A_n$  表示“每天进入图书馆的人数是  $n$ ”的事件,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $P(A_n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ ,  $\lambda >$

0. 每个进入图书馆的人以概率  $p$  ( $0 < p < 1$ ) 借书,且各个人是否借书彼此间没有关系, (1) 求进入图书馆的人中恰有  $k$  个人借书的概率; (2) 若某天借书的人数为  $k$ , 试求该天进馆人数为  $n$  的概率.

【分析】显然  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega, A_n A_m = \emptyset (m \neq n)$ , 即  $\{A_n\}$  是一个完备事件组, 借书人数是伴随  $A_n$  的发生而发生的, 因此进馆人中恰有  $k$  个人借书的概率用全概率公式求. (2) 由果 ( $k$  个人借书) 索因 (进馆人数) 这样的问题用贝叶斯公式.

【解】(1) 令  $B_k$  表示“进馆的人恰有  $k$  个人借书”的事件, 则由伯努里概型有

$$P\{B_k | A_n\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, n = k, k+1, \dots$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \cdot P(B_k | A_n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}, (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

(2) 由 Bayes 公式

$$\begin{aligned} P(A_n | B_k) &= \frac{P(A_n) P(B_k | A_n)}{P(B_k)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} \\ &= \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}. \end{aligned}$$

## 二、综合题解析

【例 1.43】假设某段时间内来百货公司的顾客数服从参数为  $\lambda$  的 Poisson 分布, 而在百货公司里每个顾客购买电视机的概率为  $p$ , 且顾客之间是否购买电视机相互独立, 试求这段时间内, 百货公司售出  $k$  台电视机的概率. (设每个顾客至多买一台)

【解】设  $X$  表示售出电视机的台数,  $Y$  表示来到百货公司的顾客数, 则

$$P(Y = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X = k | Y = i) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, k-1, \\ C_i^k p^k (1-p)^{i-k}, & i = k, k+1, \dots \end{cases}$$

故由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X = k | Y = i) P(Y = i) = \sum_{i=k}^{\infty} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

注 (1) 本题说明百货公司所售出的电视机的台数仍服从泊松分布, 这就是泊松分布在随机选

择下的不变性.

- (2) 本题说明全概公式中条件事件数, 即引发结果的“原因”数可以为可列个, 且条件概率  $P(X = k | Y = i)$  为伯努利概型中的概率.

### 习 题 一

#### 1. 填空题.

- (1) 设  $A, B, C$  为三个事件, 且  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9, P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 0.97$ , 则  $P(AB - C) =$  \_\_\_\_\_.
- (2) 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 另一件也是不合格品的概率为 \_\_\_\_\_.
- (3) 设一次试验成功的概率为  $p$ , 进行 100 次独立重复试验, 当  $p =$  \_\_\_\_\_ 时, 成功次数的标准差的值最大, 其最大值为 \_\_\_\_\_.
- (4) 随机地向半圆  $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$  ( $a$  为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与  $x$  轴的夹角小于  $\frac{\pi}{4}$  的概率为 \_\_\_\_\_.
- (5) 设随机事件  $A, B$  及其事件  $A \cup B$  的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6, 若  $\overline{B}$  表示  $B$  的对立事件, 则积事件  $A\overline{B}$  的概率  $P(A\overline{B}) =$  \_\_\_\_\_.
- (6) 某市有 50% 住户订日报, 有 65% 住户订晚报, 有 85% 住户至少订这两种报纸中的一种, 则同时订这两种报纸的住户的百分比是 \_\_\_\_\_.
- (7) 三台机器相互独立运转, 设第一, 第二, 第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9, 0.8, 0.7, 则这三台机器中至少有一台发生故障的概率 \_\_\_\_\_.
- (8) 电路由元件  $A$  与两个并联的元件  $B, C$  串联而成, 若  $A, B, C$  损坏与否是相互独立, 且它们损坏的概率依次为 0.3, 0.2, 0.1, 则电路断路的概率是 \_\_\_\_\_.
- (9) 甲乙两人投篮, 命中率分别为 0.7, 0.6, 每人投三次, 则甲比乙进球数多的概率是 \_\_\_\_\_.
- (10) 三人独立破译一密码, 他们能单独译出的概率分别为  $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ , 则此密码被译出的概率 \_\_\_\_\_.

#### 2. 单项选择题.

- (1) 以  $A$  表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则对立事件  $\overline{A}$  为  
 A. “甲种产品滞销, 乙种产品畅销”.      B. “甲、乙产品均畅销”.  
 C. “甲种产品滞销”.      D. “甲产品滞销或乙种产品畅销”.      【    】
- (2) 设  $A, B, C$  是三个事件, 与事件  $A$  互斥的事件是  
 A.  $\overline{AB} + \overline{AC}$ .      B.  $\overline{A(B+C)}$ .  
 C.  $\overline{ABC}$ .      D.  $\overline{A+B+C}$ .      【    】
- (3) 设  $A, B$  为两个任意的事件, 则  
 A.  $P(A \cup B)P(AB) \geq P(A)P(B)$ .  
 B.  $P(A \cup B)P(AB) \leq P(A)P(B)$ .  
 C.  $P(A-B)P(B-A) \leq P(A)P(B) - P(AB)$ .  
 D.  $P(A-B)P(B-A) \geq \frac{1}{4}$ .      【    】
- (4) 设  $A_1, A_2, A_3$  是三个事件, 则  $A_1, A_2, A_3$  中至少发生两个事件可表示为

A.  $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$ .

B.  $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$ .

C.  $\Omega - (A_1 + A_2 + A_3)$ .

D.  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_3 + \bar{A}_2 \bar{A}_3$ .

【   】

(5) 事件  $A$  与  $B$  相互独立的充要条件为

A.  $A + B = \emptyset$ .

B.  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

C.  $AB = \emptyset$ .

D.  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

【   】

(6) 对于任意两个事件  $A$  与  $B$ , 有  $P(A - B)$  为

A.  $P(A) - P(B)$ .

B.  $P(A) - P(B) + P(AB)$ .

C.  $P(A) - P(AB)$ .

D.  $P(A) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})$ .

【   】

(7) 设  $A, B$  为两事件, 且  $P(AB) = 0$ , 则

A.  $A$  与  $B$  互斥.

B.  $AB$  是不可能事件.

C.  $AB$  未必是不可能事件.

D.  $P(A) = 0$  或  $P(B) = 0$ .

【   】

(8)  $n$  张奖券中含有  $m$  张有奖的,  $k$  个人购买, 每人一张, 其中至少有一个人中奖的概率是

A.  $1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$ .

B.  $\frac{m}{C_n^k}$ .

C.  $\frac{C_m^1 C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$ .

D.  $\sum_{r=1}^k \frac{C_m^r}{C_n^k}$ .

【   】

(9) 设  $A, B$  为任意两个事件, 且  $A \subset B, P(B) > 0$ , 则下列选项必然成立的是

A.  $P(A) < P(A | B)$ .

B.  $P(A) \leq P(A | B)$ .

C.  $P(A) > P(A | B)$ .

D.  $P(A) \geq P(A | B)$ .

【   】

(10) 已知  $0 < P(B) < 1$ , 且  $P[(A_1 + A_2) | B] = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$ , 则下列选项成立的是

A.  $P[(A_1 + A_2) | \bar{B}] = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B})$ .

B.  $P(A_1 B + A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$ .

C.  $P(A_1 + A_2) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$ .

D.  $P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$ .

【   】

### 3. 计算题.

(1) 两封信随机地投向标号为 I, II, III, IV 的四个邮筒, 问第 II 个邮筒恰好投入一封信的概率是多少?

(2) 在 1 500 个产品中有 400 个次品, 1 100 个正品, 任取 200 个, 问:

① 恰有 90 个次品的概率;   ② 至少有 2 个次品的概率.

(3) 某厂生产的产品次品率为 0.05, 每 100 个产品为一批, 抽查产品质量时, 在每批中任取一半来检查, 如果发现次品不多于 1 个, 则这批产品可以认为是合格的, 求一批产品被认为是合格的概率.

(4) 书架上按任意次序摆着 15 本教科书, 其中有 5 本是数学书, 从中随机地抽取 3 本, 至少有一本是数学书的概率.

(5) 全年级 100 名学生中有男生 80 名, 来自北京的 20 名中有男生 12 名, 免修英语的 40 名学生中有男生 32 名, 求出下列概率:

① 碰到男生情况不是北京男生的概率;

② 碰到北京来的学生的情况下是一名男生的概率;

- ③ 碰到北京男生的概率；
- ④ 碰到非北京学生情况下是女生的概率；
- ⑤ 碰到免修英语的男生的概率。
- (6) 为了防止意外，在矿内同时设有两种警报系统  $A$  与  $B$ ，每种系统单独使用时，其有效概率  $A$  为 0.92,  $B$  为 0.93, 在  $A$  失灵条件下,  $B$  有效的概率为 0.85, 求：
- ① 发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；
- ②  $B$  失灵条件下,  $A$  有效的概率。
- (7) 三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子有 3 个黑球 5 个白球，现随机地取一个箱子，再从这个箱子取出 1 个球，问：
- ① 这个球是白球的概率；
- ② 已知取出的球为白球，此球属于第二个箱子的概率。
- (8) 假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品。现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回），试求：
- ① 先取的零件是一等品的概率；
- ② 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的条件概率。
- (9) 袋中有 12 个球，其中有 9 个是新的，第一次比赛时从中任取 3 个用，比赛后仍放回袋中，第二次比赛再从袋中任取 3 个，求：
- ① 第二次取出的球都是新球的概率；
- ② 又已知第二次取出的球都是新球，第一次取到的都是新球的概率。
- (10) 设甲、乙两袋，甲袋中装有  $n$  个白球， $m$  个红球，乙袋中装有  $N$  个白球， $M$  个红球，今从甲袋中任取一只放入乙袋，再从乙袋中任取一个球，问取到白球的概率。
- (11) 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份。
- ① 求先抽到的一份是女生表的概率  $p$ ；
- ② 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率  $q$ 。
- (12) 1 架长机和 2 架僚机一同飞往某目的地进行轰炸，但要到达目的地，非有无线电导航不可，而只有长机具有此项设备，一旦到达目的地，各机将独立地进行轰炸，且炸毁目标的概率为 0.3，在到达目的地之前，必须经过高射炮阵地上空，此时任一飞机被击落的概率为 0.2，求目标被炸毁的概率。

### 参 考 答 案

$$1. (1) 0.07. \quad (2) P = \frac{1}{5}. \quad (3) \frac{1}{2}, 5. \quad (4) P = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}. \quad (5) P(A\bar{B}) = 0.3. \quad (6) P = 30\%.$$

$$(7) P = 0.496. \quad (8) P = 0.314. \quad (9) P = 0.436240 \approx 0.436. \quad (10) P = \frac{3}{5}.$$

$$2. (1) D \quad (2) D \quad (3) B \quad (4) B \quad (5) B \quad (6) C \quad (7) C \quad (8) A \quad (9) B \quad (10) B$$

$$3. (1) P(A) = \frac{C_2^1 C_3^1}{4^2} = \frac{3}{8}. \quad (2) \textcircled{1} \frac{C_{400}^{90} C_{110}^{110}}{C_{1500}^{200}} \quad \textcircled{2} 1 - \left[ \frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}} + \frac{C_{400}^1 \cdot C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}} \right].$$

(3) 0.279 4.      (4)  $P = \frac{67}{91}$ .      (5) ①  $\frac{17}{20}$     ②  $\frac{12}{20}$     ③  $\frac{12}{100}$     ④  $\frac{12}{80}$     ⑤  $\frac{32}{100}$ .

(6) ① 0.988; ② 0.829.      (7) ①  $\frac{53}{120}$ ; ②  $\frac{20}{53}$ .

(8) ①  $\frac{2}{5}$ ; ②  $\approx 0.486$ .      (9) ① 0.145 8; ②  $\frac{5}{21}$ .

(10)  $\frac{n}{m+n} \cdot \frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{N}{N+m+1}$ .

(11) ①  $\frac{29}{90}$ ; ②  $\frac{20}{61}$ .      (12) 0.477.




## 第二章 随机变量及其分布

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

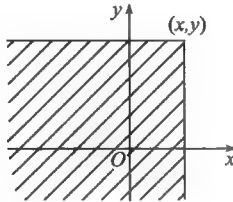
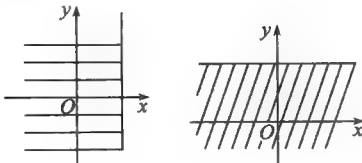
#### 一、概念与公式一览表

本章概念与公式较多,为便于记忆、对照,特制表 2-1 ~ 表 2-3 供参考.

表 2-1 随机变量分布

一维随机变量 $X$ 的分布	几何表示												
<p>随机变量 <math>X</math> 的分布函数</p> $F(x) \triangleq P(X \leq x), (-\infty < x < +\infty)$ <p>性质: (1) <math>0 \leq F(x) \leq 1</math></p> <p>(2) <math>F(x_1) \leq F(x_2), (x_1 &lt; x_2)</math></p> <p>(3) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1</math></p> <p>(4) <math>F(x+0) = F(x)</math>, 即 <math>F(x)</math> 是右连续的</p>	 <p>图 2-1</p>												
$X$ 为离散型	$X$ 为连续型												
<p>概率分布: <math>P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots</math></p> <p>分布律</p> <table><tr><td><math>X</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>\dots</math></td><td><math>x_n</math></td><td><math>\dots</math></td></tr><tr><td><math>P</math></td><td><math>p_1</math></td><td><math>p_2</math></td><td><math>\dots</math></td><td><math>p_n</math></td><td><math>\dots</math></td></tr></table> <p>性质:</p> <p>(1) <math>p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots</math></p> <p>(2) <math>\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1</math></p> <p>分布函数 <math>F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k</math> 或 <math>\sum_{x_k \leq x} P(X = x_k), k = 1, 2, \dots</math></p>	$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\dots$	$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$\dots$	<p>概率密度 <math>\varphi(x), (-\infty &lt; x &lt; +\infty)</math></p> <p>性质:</p> <p>(1) <math>\varphi(x) \geq 0</math></p> <p>(2) <math>\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1</math></p> <p>(3) <math>P(x_1 &lt; X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx</math></p> <p>(4) <math>F'(x) = \varphi(x), x</math> 为 <math>\varphi(x)</math> 的连续点</p> <p>分布函数 <math>F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx</math></p>
$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\dots$								
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$\dots$								

续表

二维随机变量(X,Y) 的分布	几何表示(见图 2-2)																																				
<p>性质:</p> <p>(1) <math>0 \leq F(x,y) \leq 1</math></p> <p>(2) <math>F(x,y)</math> 是 <math>x</math> 或 <math>y</math> 的不减函数且对任意固定的 <math>y</math> 有 <math>F(-\infty, y) = 0</math>, 对任意固定的 <math>x</math>, 有 <math>F(x, -\infty) = 0</math> <math>F(-\infty, -\infty) = 0</math> <math>F(+\infty, +\infty) = 1</math></p> <p>(3) <math>F(x,y) = F(x+0,y), F(x,y) = F(x,y+0)</math>, 即 <math>F(x,y)</math> 关于 <math>x</math> 右连续, 关于 <math>y</math> 右连续</p> <p>(4) 随机点 <math>(X,Y)</math> 落在矩形域: <math>x_1 &lt; X \leq x_2, y_1 &lt; Y \leq y_2</math> 上的 概率为 <math>P(x_1 &lt; X \leq x_2, y_1 &lt; Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)</math> 且 <math>F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0</math></p>	 <p>图 2-2</p>																																				
(X,Y) 为离散型	(X,Y) 为连续型																																				
<p>(X,Y) 的联合分布律 <math>P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots)</math> 或表格形式</p> <table><tr><th><math>\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}</math></th><th><math>y_1</math></th><th><math>y_2</math></th><th><math>\dots</math></th><th><math>y_j</math></th><th><math>\dots</math></th></tr><tr><th><math>x_1</math></th><td><math>p_{11}</math></td><td><math>p_{12}</math></td><td><math>\dots</math></td><td><math>p_{1j}</math></td><td><math>\dots</math></td></tr><tr><th><math>x_2</math></th><td><math>p_{21}</math></td><td><math>p_{22}</math></td><td><math>\dots</math></td><td><math>p_{2j}</math></td><td><math>\dots</math></td></tr><tr><th><math>\vdots</math></th><td><math>\vdots</math></td><td><math>\vdots</math></td><td></td><td><math>\vdots</math></td><td></td></tr><tr><th><math>x_i</math></th><td><math>p_{i1}</math></td><td><math>p_{i2}</math></td><td><math>\dots</math></td><td><math>p_{ij}</math></td><td><math>\dots</math></td></tr><tr><th><math>\vdots</math></th><td><math>\vdots</math></td><td><math>\vdots</math></td><td></td><td><math>\vdots</math></td><td></td></tr></table> <p>性质:</p> <p>(1) <math>p_{ij} \geq 0</math></p> <p>(2) <math>\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1</math></p> <p>分布函数 <math>F(x,y) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} p_{ij}</math></p>	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_j$	$\dots$	$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1j}$	$\dots$	$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2j}$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$x_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\dots$	$p_{ij}$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		<p>概率密度 <math>\varphi(x,y)</math></p> <p>性质:</p> <p>(1) <math>\varphi(x,y) \geq 0</math></p> <p>(2) <math>\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) dx dy = 1</math></p> <p>(3) <math>\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \varphi(x,y),</math> (<math>x,y</math>) 为 <math>\varphi(x,y)</math> 的连续点</p> <p>(4) <math>P\{(X,Y) \in G\}</math> <math>= \iint_G \varphi(x,y) dx dy</math></p> <p>分布函数 <math>F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(u,v) du dv.</math></p>
$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_j$	$\dots$																																
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1j}$	$\dots$																																
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2j}$	$\dots$																																
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$																																	
$x_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\dots$	$p_{ij}$	$\dots$																																
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$																																	
二维随机变量(X,Y) 的边缘分布	几何表示(见图 2-3)																																				
<p>对 <math>X</math> 的边缘分布, 即 <math>X</math> 的分布 <math>F_X(x) = P(X \leq x) = P\{X \leq x, Y &lt; +\infty\}</math> <math>= F(x, +\infty)</math></p> <p>对 <math>Y</math> 的边缘分布, 即 <math>Y</math> 的分布 <math>F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X &lt; +\infty, Y \leq y)</math> <math>= F(+\infty, y)</math></p>	 <p>图 2-3</p>																																				

续表

(X,Y) 为离散型	(X,Y) 为连续型
<p>设(X,Y) 的联合分布律为  <math>p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j), (i, j = 1, 2, \dots)</math>.                      (X,Y) 关于 X 的边缘分布律</p> $P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i\cdot}$ <p>(联合分布律中第 i 行各元素相加)                      (X,Y) 关于 Y 的边缘分布律</p> $P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_{\cdot j}$ <p>(联合分布律中第 j 列各元素相加)                      (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数</p> $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ <p>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数</p> $F_Y(y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$	<p>设(X,Y) 的概率密度为 <math>\varphi(x, y)</math>.                      (X,Y) 关于 X 的边缘分布密度为</p> $\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy$ <p>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布密度为</p> $\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx$ <p>(X,Y) 关于 X 的边缘分布函数</p> $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy \right] dx$ <p>(X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数</p> $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx \right] dy$
<p>设(X,Y) 为二维随机变量, 在条件 <math>Y = y</math> 下, X 的条件分布函数</p> $F_{X Y}(x   y) = P(X \leq x   Y = y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(X \leq x   y - \epsilon < Y \leq y + \epsilon)$ $= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(X \leq x, y - \epsilon < Y \leq y + \epsilon)}{P(y - \epsilon < Y \leq y + \epsilon)}$ <p><math>F_{Y X}(y   x) = P(Y \leq y   X = x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P(Y \leq y   x - \epsilon &lt; X \leq x + \epsilon)</math></p> $= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(x - \epsilon < X \leq x + \epsilon, Y \leq y)}{P(x - \epsilon < X \leq x + \epsilon)}$	
(X,Y) 为离散型	(X,Y) 为连续型
<p>二维随机变量(X,Y) 在条件 <math>Y = y_j</math> 下 X 的条件分布律</p> $P(X = x_i   Y = y_j)$ $= \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$ $= \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} (i = 1, 2, \dots)$ <p>(X,Y) 在条件 <math>X = x_i</math> 下 Y 的条件分布律</p> $P(Y = y_j   X = x_i)$ $= \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$ $= \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} (i = 1, 2, \dots)$	<p>设(X,Y) 的分布密度为 <math>\varphi(x, y)</math>, 则在条件 <math>Y = y</math> 下 X 的条件分布密度: <math>\varphi(x   y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_Y(y)}</math>                      在条件 <math>X = x</math> 下 Y 的条件分布密度</p> $\varphi(y   x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)}$ <p>其中, <math>\varphi_Y(y), \varphi_X(x)</math> 分别为 Y 与 X 的边缘密度, 对应的条件分布函数为</p> $F_{X Y}(x   y) = \frac{\int_{-\infty}^x \varphi(x, y) dx}{\varphi_Y(y)}$ $= \int_{-\infty}^x \varphi_{X Y}(x   y) dx$ $F_{Y X}(y   x) = \frac{\int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dy}{\varphi_X(x)}$ $= \int_{-\infty}^y \varphi_{Y X}(y   x) dy$

续表

设随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数,边缘分布函数分别为 $F(x,y)$ 及 $F_X(x),F_Y(y)$ ,若对所有的 $x,y$ 有 $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$ 则称随机变量 $X$ 与 $Y$ 是相互独立的	
$(X,Y)$ 为离散型	$(X,Y)$ 为连续型
$X$ 与 $Y$ 相互独立 $\triangleq p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ , $p_{i\cdot}$ 与 $p_{\cdot j}$ 分别为 $X$ 与 $Y$ 的边缘分布律	$X$ 与 $Y$ 相互独立 $\triangleq \varphi(x,y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y)$ ,其中 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$ 为边缘密度

表 2-2 随机变量函数的分布

# 一维随机变量函数 $Y = f(X)$ 的分布

设  $X$  为离散型,其概率分布为

$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_k$	$\cdots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_k$	$\cdots$

则  $Y = f(X)$  的概率分布

(1) 当  $y_i = f(x_i) (i = 1, 2, \cdots)$  的各值  $y_i$  互不相等时,  $Y$  的概率分布为

$Y$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_k$	$\cdots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_k$	$\cdots$

(2) 当  $y_i = f(x_i) (i = 1, 2, \cdots)$  的各值不是互不相等时, 应把相等的值分别合并, 并相应地将其概率相加, 例如  $y_i = y_j$ , 则  $Y$  的概率分布为

$Y$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_i$	$\cdots$	$y_k$	$\cdots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$(p_i + p_j)$	$\cdots$	$p_k$	$\cdots$

定量 设  $X$  为连续型, 分布密度为  $\varphi_X(x)$ , 又  $y = f(x)$  处处可导, 且对任意的  $x$  有  $f'(x) > 0$ , (或  $f'(x) < 0$ ), 则  $Y = f(X)$  的分布密度

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \varphi(f^{-1}(y)) \cdot |(f^{-1}(y))'|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $f^{-1}(y)$  是  $f(x)$  的反函数,

$$\alpha = \min\{f(-\infty), f(+\infty)\},$$

$$\beta = \max\{f(-\infty), f(+\infty)\}.$$

也可这样求  $\varphi_Y(y)$ :

$$\textcircled{1} \text{ 先求出 } F(y) = P\{Y \leq y\} = P\{f(X) \leq y\} = P\{X \in S\}$$

其中,  $S$  为所有使  $f(x) \leq y$  成立的  $x$  值的集合

$\textcircled{2}$  再把  $F(y)$  对  $y$  求导, 即

$$\varphi_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy}$$

表 2-3 二维随机变量函数 $Z = f(X,Y)$ 的分布

设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $\varphi(x,y)$ ,则二维随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的分布函数为 $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X,Y) \leq z) = \iint_{g(x,y) \leq z} \varphi(x,y) dx dy.$ 常用的随机变量函数为 (1) $Z = X \pm Y$ (2) $Z = X \cdot Y$ (3) $Z = X/Y$
--

续表

(1) 两个随机变量之和, 即 $Z = X + Y$ 的分布	
<p><math>X, Y</math> 为离散型, <math>(X, Y)</math> 的联合分布律为</p> $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), (i, j = 1, 2, \dots)$ <p>则 <math>Z = X + Y</math> 的分布律为</p> $P(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} P(X = x_i, Y = y_j)$ $= \sum_i P(X = x_i, Y = z_k - x_i)$ <p>或</p> $= \sum_j P(X = z_k - y_j, Y = y_j)$ <p><math>k = 1, 2, \dots</math></p>	<p><math>X, Y</math> 为连续型, <math>(X, Y)</math> 的分布密度为 <math>\varphi(x, y)</math>, 则 <math>Z = X + Y</math> 的分布函数为</p> $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$ $= \iint_{x+y \leq z} \varphi(x, y) dx dy$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} \varphi(x, y) dy$ <p>或</p> $= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} \varphi(x, y) dx$ <p>其概率密度为</p> $\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$ <p>或</p> $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$
<p>(2) 当 <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> 是 <math>n</math> 个独立随机变量, 其分布函数分别为 <math>F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots, F_{X_n}(x)</math>, 则 <math>X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}</math>, <math>X_{\min} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}</math> 的分布函数分别为</p> $F_{\max}(x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x)$ $F_{\min}(x) = 1 - [1 - F_{X_1}(x)] \cdot [1 - F_{X_2}(x)] \cdot \dots \cdot [1 - F_{X_n}(x)]$ <p>特别地当 <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> 为独立同分布时[其分布函数为 <math>F(x)</math>], 则</p> $F_{\max}(x) = [F(x)]^n; \quad F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$	

## 二、重要的一维分布

### 1. (0-1) 分布

(0-1) 分布的分布律为

$X$	1	0
$P$	$p$	$1-p$

其中,  $p$  为事件  $A$  出现的概率,  $0 < p < 1$ .

### 2. 二项分布

在  $n$  重伯努利试验中事件  $A$  恰发生  $k$  次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

其中,  $p$  为事件  $A$  在每次试验中出现的概率;  $q$  为不出现的概率,  $q = 1 - p$ , 随机变量  $X$  服从二项分布, 通常记为  $X \sim B(n, p)$ .

### 3. 泊松分布

其分布律

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0,$$

称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 简记为  $X \sim P(\lambda)$ .

#### 4. 正态分布

(1) 标准正态分布: 若随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

则称  $X$  服从标准正态分布, 记为  $X \sim N(0, 1)$ , 其分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

(2) 一般正态分布: 若随机变量  $X$  的密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中,  $\sigma > 0$ ,  $\mu$  与  $\sigma$  均为常数, 其分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

则称  $X$  服从参数为  $\mu$  和  $\sigma$  的正态分布, 记为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

#### 5. 均匀分布

若  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称  $X$  在  $[a, b]$  上服从均匀分布, 记为  $X \sim U(a, b)$ , 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

#### 6. 指数分布

若  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

其中,  $\lambda > 0$ , 则称  $X$  服从参数为  $\lambda$  指数分布, 记为  $X \sim E(\lambda)$ . 其分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

#### 7. 超几何分布

超几何分布的分布律为

$$P(X = i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}, \quad 0 \leq i \leq n \leq N; i \leq M.$$

记为  $X \sim H(N, M, n)$ .

#### 8. 几何分布

几何分布的分布律为

$$P(X=i) = (1-p)^{i-1}p, i=1,2,\dots, 0 < p < 1.$$

记为  $X \sim G(p)$ .

**注** (1) 0-1 分布即二项分布在  $n=1$  的情形, 也就是 1 重伯努利试验中事件成功次数的分布.

$$(2) \text{ 若 } X \sim N(0,1), \text{ 则 } \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0) = \frac{1}{2}, \Phi(-a) = 1 - \Phi(a), P(|X| \leq a) = 2\Phi(a) - 1.$$

$$(3) \text{ 若 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 则 } \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

### 三、重要的二维分布

#### 1. 二维均匀分布

若二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中,  $S_D$  为平面区域  $D$  的面积, 则称  $(X, Y)$  服从  $D$  上的均匀分布, 常记为  $U(D)$ .

#### 2. 二维正态分布

若二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度为

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \text{ 其中,}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1,$$

则称  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 其分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(u, v) du dv,$$

记为  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ .

二维正态分布的性质: 设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则有

$$1^\circ X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2);$$

$$2^\circ C_1X + C_2Y \sim N(C_1\mu_1 + C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + 2\rho C_1C_2\sigma_1\sigma_2);$$

$$3^\circ X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立的充要条件是 } X \text{ 与 } Y \text{ 不相关, 即 } \rho = 0;$$

$$4^\circ X \text{ 关于 } Y = y \text{ 或 } Y \text{ 关于 } X = x \text{ 的条件分布也是正态分布.}$$

**【例 2.1】** 设二维随机变量  $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, 0)$ , 则  $P\left(\frac{X}{Y} > 0\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【解】** 由二维正态分布的性质可知:  $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ , 且  $X$  与  $Y$  独立, 故

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X}{Y} > 0\right) &= P(X > 0, Y > 0) + P(X < 0, Y < 0) \\ &= P(X > 0)P(Y > 0) + P(X < 0)P(Y < 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故应填  $\frac{1}{2}$ .

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题

**提示** 利用分布函数的定义、性质以及常见一维分布进行求解.

**【例 2.2】** 设  $X$  为连续型随机变量,  $F(x)$  为  $X$  的分布函数, 则  $F(x)$  在其定义域内一定为

- (A) 非阶梯间断函数. (B) 可导函数.  
(C) 连续但不一定可导的函数. (D) 阶梯函数. **【 】**

**【解】** 由连续型随机变量的定义, 存在非负可积函数  $\varphi(x)$ , 使  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ , 故  $F(x)$  一定是连续函数, 但不一定可导, 即应选 (C).

**【例 2.3】** 设随机变量  $X$  的密度函数为  $\varphi(x)$ , 且  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ,  $F(x)$  是  $X$  的分布函数, 则对任意实数  $a$ , 有

- (A)  $F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx$ . (B)  $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$ .  
(C)  $F(-a) = F(a)$ . (D)  $F(-a) = 2F(a) - 1$ . **【 】**

**【解】**  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx$ .

$$\begin{aligned} F(-a) &= \int_{-\infty}^{-a} \varphi(t) dt \xrightarrow{\text{令 } x = -t} \int_{+\infty}^a \varphi(-x) (-dx) \\ &\xrightarrow{\varphi(-x) = \varphi(x)} \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_a^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx \left[ \text{因为 } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1, \text{ 所以 } \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

故 (B) 入选.

**【例 2.4】** 设随机变量  $X$  的概率密度为:  $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $(-\infty < x < +\infty)$  则其分布函数  $F(x)$  是

- (A)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ . (B)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ .  
(C)  $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ . (D)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ . **【 】**

**【解】**  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|x|} dx$ .



当  $x < 0$  时,  $F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{1}{2} e^x$ ;

当  $x \geq 0$  时,  $F(x) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx + \int_0^x e^{-x} dx \right) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$ .

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

可知应选(B).

容易犯的错误是受离散型随机变量分布函数的影响,错误地认为:在  $x$  的最右边的一个区间段  $F(x) = 1$ ,因而错选(D).

**【例 2.5】** 设  $f_1(x)$  是标准正态分布的概率密度函数,  $f_2(x)$  是  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度,

且  $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0, \end{cases}$  ( $a > 0, b > 0$ ) 为概率密度,则  $a, b$  应满足

(A)  $2a + 3b = 4$ .

(B)  $3a + 2b = 4$ .

(C)  $a + b = 1$ .

(D)  $a + b = 2$ .

【 】

**【解】** 因为  $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$  为概率密度,所以

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 af_1(x) dx + \int_0^{+\infty} bf_2(x) dx = \frac{1}{2}a + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b,$$

于是  $2a + 3b = 4$ , 故选(A).

**【例 2.6】** 设离散型随机变量  $X$  的分布律为

$$P(X = k) = b\lambda^k, (k = 1, 2, \dots) \text{ 且 } b > 0, \text{ 则 } \lambda \text{ 为}$$

(A)  $\lambda > 0$  的任意实数.

(B)  $\lambda = b + 1$ .

(C)  $\lambda = \frac{1}{1+b}$ .

(D)  $\lambda = \frac{1}{b-1}$ .

【 】

**【解】** 因为  $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} b\lambda^k = 1, S_n = \sum_{k=1}^n b\lambda^k = b \cdot \frac{(1-\lambda^{n+1})\lambda}{1-\lambda},$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b \cdot \lambda \frac{(1-\lambda^{n+1})}{1-\lambda} = 1.$$

于是可知,当  $|\lambda| < 1$  时,  $b \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1+b} < 1$ , (因为  $b > 0$ ), 故该选(C).

**【例 2.7】** 如下四个函数,哪个不能作为随机变量  $X$  的分布函数?

$$(A) F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$(B) F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

$$(C) F_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \quad (D) F_4(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

【 】

【解】作为随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$  具有四个性质: (1) ~ (4), 反之, 若函数  $F(x)$  满足性质 (1) ~ (4), 则其可作为随机变量  $X$  的分布函数.

因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0 \neq 1,$

所以  $F_2(x)$  不能作为  $X$  的分布函数.

故 (B) 入选.

【例 2.8】设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(2, \sigma^2)$ , 且  $P(2 < X < 4) = 0.3$ , 则  $P(X < 0) =$  \_\_\_\_\_.

【解】因为  $P(2 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0.3$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = \Phi(0) + 0.3 = \frac{1}{2} + 0.3 = 0.8$$

$$\Rightarrow P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

故应填 0.2.

【注】非标准正态分布的有关事件的概率均可用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  来表示或计算, 另外特殊值  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$  应引起重视.

【例 2.9】设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9}, & x \in [3, 6] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若  $k$  使得  $P(X \geq k) = \frac{2}{3}$ , 则  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【解】由  $P(X < k) = 1 - P(X \geq k) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ , 即  $\int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{3}$ , 故  $k \in [1, 3]$ .

【例 2.10】设随机变量  $X$  的分布函数为

$$F(x) = A + B \arctan x, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

试求: (1) 系数  $A$  与  $B$ ; (2)  $X$  落在  $(-1, 1)$  内的概率; (3)  $X$  的概率密度.

【解】(1) 由于  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ , 可知

$$\begin{cases} A + B\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ A + B\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}.$$

于是  $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad -\infty < x < +\infty.$

$$\begin{aligned} (2) P(-1 < \xi < 1) &= F(1) - F(-1) \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan 1 \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-1) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) \varphi(x) = F'(x) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \right)' = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

【例 2.11】设连续型随机变量  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

试求: (1) 系数  $A$ ; (2)  $X$  落在  $(-1, \frac{1}{2})$  及  $(\frac{1}{3}, 2)$  内的概率; (3)  $X$  的概率密度.

【解】(1) 由于  $F(x)$  的连续性, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1), \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow 1^-} Ax^2 = 1 \Rightarrow A = 1.$$

$$\text{于是 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1. \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) P\left(-1 < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{4},$$

$$P\left(\frac{1}{3} < X < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9},$$

$$(3) \varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

### 题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数

**提示** 求分布首先确定随机变量的可能取值, 然后求出取值的概率, 因此求分布本质上就是计算概率, 务必综合运用前一章中计算概率的各种方法. 另外要注意随机变量主要有两种类型: 离散型和连续型, 但也存在既非离散也非连续型的随机变量.

【例 2.12】在伯努利试验中, 每次试验成功的概率为  $p$ , 试验进行到成功与失败均出现时停止, 求试验次数的分布律.

【分析】根据试验要求, 试验次数是随机的, 即为随机变量, 且其可能取值为  $2, 3, \dots$ , 然后分别求出取这些值的概率.

【解】设  $X$  表示试验次数, 于是  $X$  的可能取值为  $2, 3, \dots$ , 当  $X = k$  时, 表示前面  $k-1$  试验失败, 第  $k$  次成功或前面  $k-1$  次成功, 第  $k$  次失败, 于是  $X$  的分布律为

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p + p^{k-1}(1-p), (k = 2, 3, 4, \dots).$$

【例 2.13】甲、乙两人从装有  $a$  个白球与  $b$  个黑球的口袋中轮流摸取一球, 甲先取, 乙后取, 每次取后不放回, 直到两人中有 1 人取到白球时停止, 试求取球次数的分布律和甲先取到

白球的概率.

【分析】根据试验要求,取球次数为随机变量,且其可能取值为 $1, 2, \dots, b+1$ .

【解】令 $X$ 表示取球次数,则 $X$ 的可能取值为 $1, 2, \dots, b+1$ ,并且分布律为

$$P(X=1) = \frac{a}{a+b},$$

$$P(X=2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1},$$

$\vdots$

$$P(X=k) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} \cdot \dots \cdot \frac{b-(k-2)}{a+b-(k-2)} \cdot \frac{a}{a+b-(k-1)},$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} P(X=b+1) &= \frac{ab!}{(a+b)(a+b-1) \cdot \dots \cdot (a+1)a} \\ &= \frac{b!}{(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (a+b)}. \end{aligned}$$

因为甲先取到白球,即 $X$ 取奇数值,故

$$P(\text{甲先取到白球}) = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq b+1} P(X=2k+1).$$

【例 2.14】一辆汽车沿一街行驶,要过三个有信号灯的路口,每个信号灯为红或绿,与其他信号灯为红或绿相互独立,且红、绿信号显示的时间相等,求此汽车首次遇到红灯前已通过的路口数 $X$ 的概率分布.

【分析】遇到红灯前的路口数 $X$ 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$ .  $X=3$ 表示汽车一路没遇到红灯,从而易求得其概率分布.

【解】令 $A = \{\text{遇到红灯}\}$ ,则 $P(A) = \frac{1}{2}$ ,故有

$$P(X=0) = \frac{1}{2},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

即分布律为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

【例 2.15】两名篮球队员轮流投篮,直到某人投中时为止,若第一名队员投中的概率为 $0.4$ ,第二名投中的概率为 $0.6$ ,求每名队员投篮次数的分布律.

【分析】显然每名队员的投篮次数为随机变量,且可能取值为 $0, 1, 2, \dots$ ,现考虑第一名队员的投篮次数,若此次数为 $k$ ,则表示第一名前 $k-1$ 次未投中,第二名前 $k-1$ 次未投中,而第一名在第 $k$ 次投中,或者第一名前 $k$ 次未投中,第二名前 $k-1$ 次未投中,而在第 $k$ 次投中,从而易求出其概率,第二名队员的情况是类似的,此处不再赘述.

【解】设 $X, Y$ 分别表示第一名和第二名队员的投篮次数,由上面的分析有

$$\begin{aligned}
 P(X=k) &= (0.6)^{k-1} \cdot (0.4)^{k-1} \cdot 0.4 + (0.6)^k \cdot (0.4)^{k-1} \cdot 0.6 \\
 &= 0.76 \cdot (0.24)^{k-1}, (k=1,2,\dots),
 \end{aligned}$$

$$P(Y=0) = 0.4,$$

$$\begin{aligned}
 P(Y=k) &= (0.6)^k \cdot (0.4)^{k-1} \cdot (0.6) + (0.6)^k \cdot (0.4)^k \cdot 0.4 \\
 &= 1.9 \cdot (0.24)^k, (k=1,2,\dots).
 \end{aligned}$$

【例 2.16】设随机变量  $X$  的密度为

$$\varphi(x) = Ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty.$$

试求: (1) 系数  $A$ ; (2)  $P(0 < X < 1)$ ; (3)  $X$  的分布函数.

【解】(1) 由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|} dx = 1$ ,

$$\text{即} \quad 2A \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \text{故 } 2A = 1, A = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \varphi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

$$(2) P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x} dx = \frac{1}{2}(-e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2} \approx 0.316.$$

$$(3) F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|x|} dx,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^x dx = \frac{1}{2}e^x,$$

$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } F(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2}e^{-x},$$

$$\text{故 } X \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

【例 2.17】设有 80 台同类型设备, 各台工作相互独立, 发生故障的概率都是 0.01, 且一台设备的故障一个人能维修, 考虑两种配备维修工人的方案: 其一, 由 4 个人维护, 每人承包 20 台; 其二, 由 3 个人共同维护 80 台, 试比较两种方案的优劣.

【解】设备发生故障而不能及时维修的概率, 大的为劣, 小的为优.

先考虑第一种方案.  $A_i (i=1,2,3,4)$  表示第  $i$  人维护的 20 台中发生故障而不能及时维修的事件.  $X$  表示第一个人维护的 20 台同一时刻发生故障的台数. 则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\} \geq P(A_1) = P\{X \geq 2\},$$

因

$$X \sim B(20, 0.01), \lambda = np = 20 \times 0.01 = 0.2,$$

$$\text{故有} \quad P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\} \geq P\{X \geq 2\} \approx \sum_{k=2}^{20} \frac{(0.2)^k}{k!} e^{-0.2} \approx 0.0175.$$

再考虑第二种方案,  $Y$  表示 80 台中同一时刻发生故障的台数,  $Y \sim B(80, 0.01)$ ,  $\lambda = np = 80 \times 0.01 = 0.8$ , 故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geq 4\} \approx \sum_{k=4}^{80} \frac{(0.8)^k}{k!} e^{-0.8} \approx 0.0091.$$

比较可知, 后一方案优于前一方案.

**【例 2.18】**假设一大型设备在任何长为  $t$  的时间内发生故障的次数  $N(t)$  服从参数为  $\lambda t$  的泊松分布,求:(1) 相继两次故障之间的时间间隔  $T$  的概率分布;(2) 在设备已经无故障工作 8 h 的情形下,再无故障运行 8 h 的概率  $Q$ .

**【解】**(1) 因为  $N(t)$  为时间间隔  $t(t \geq 0)$  内发生故障的次数,又  $T$  表示相继两次故障间的时间间隔,所以当  $T > t$  时,必有  $N(t) = 0$  (即不发生故障),于是

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$(2) Q = P(T \geq 16 | T \geq 8) = \frac{P(T \geq 16, T \geq 8)}{P(T \geq 8)}$$

$$= \frac{P(T \geq 16)}{P(T \geq 18)} = \frac{1 - P(T < 16)}{1 - P(T < 18)}$$

$$= \frac{1 - F(16)}{1 - F(18)} = \frac{e^{-16\lambda}}{e^{-18\lambda}} = e^{-2\lambda}.$$

**【例 2.19】**设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

现对  $X$  进行  $n$  次独立重复观测,以  $V_n$  表示观测值不大于 0.1 的次数,试求随机变量  $V_n$  的分布律.

**【解】**事件“观测值不大于 0.1”,即事件  $\{X \leq 0.1\}$ ,其概率

$$p = P\{X \leq 0.1\} = \int_{-\infty}^{0.1} f(x) dx = 2 \int_0^{0.1} x dx = 0.01,$$

由题意  $V_n$  为服从  $B(n, 0.01)$  的随机变量,于是

$$P\{V_n = m\} = C_n^m (0.01)^m (1 - 0.01)^{n-m}, (m = 0, 1, 2, \dots, n).$$

**【例 2.20】**假设随机变量  $X$  的绝对值不大于 1,  $P(X = -1) = \frac{1}{8}$ ,  $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ .

在事件  $(-1 < X < 1)$  出现的条件下,  $X$  在  $(-1, 1)$  内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比.试求:(1)  $X$  的分布函数  $F(x) = P(X \leq x)$ ; (2)  $X$  取负值的概率  $p$ .

**【解】**(1) 当  $x < -1$  时,  $F(x) = 0$ ;

当  $x \geq 1$  时,  $F(x) = 1$ ;

设区间  $I \subset (-1, 1)$ , 由已知条件  $P(X \in I | -1 < X < 1) = k | I |$ .

取  $I = (-1, 1)$ , 得  $k = \frac{1}{2}$ .

当  $-1 \leq x < 1$  时, 因为

$$P(-1 < X < 1) = 1 - P(X = -1) - P(X = 1) = \frac{5}{8},$$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(-1 \leq X \leq x) \\ &= P(X = -1) + P(-1 < X \leq x) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{全概}}{=} \frac{1}{8} + P(-1 < X \leq x | -1 < X < 1) P(-1 < X < 1) +$$

$$P(-1 < X \leq x | |X| \geq 1) P(|X| \geq 1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(x+1) \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}x + \frac{7}{16}.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{5}{16}x + \frac{7}{16}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(2) p = P(X < 0) = F(0^-) = F(0) = \frac{7}{16}.$$

**注** 本例中的  $F(x)$  为既非离散型也非连续型分布函数.

### 题型三 求一维随机变量函数的分布

**提示** 对于离散型随机变量,其函数的分布一般均用定义法;对于连续型的情形通常用下面两种方法.

1° 公式法:  $X \sim \varphi_X(x)$ ,  $Y = g(X)$ ,  $y = g(x)$  严格单调,其反函数  $x = h(y)$  有一阶连续导数,则

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \varphi_X(h(y)) |h'(y)|, & y \in g(x) \text{ 的值域} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ 定义法: 先求 } F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y] = \int_{g(x) \leq y} \varphi_X(x) dx,$$

于是  $\varphi_Y(y) = F'_Y(y)$ .

一般来说,对非单调函数或抽象函数宜用定义法.

**【例 2.21】** 已知  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	1	2
$P$	0.1	0.2	0.3	0.4

试求  $Y = 2X^2 + 1$  的分布律与分布函数.

**【分析】** 求离散型随机变量函数的分布律时,首先把随机变量的函数,即新的随机变量的可能取值找出来,然后分别计算取值的概率. 本题要注意的是  $P(Y = 3) = P(X = -1) + P(X = 1)$ . 另外求离散型随机变量的分布函数一定要分段计算.

**【解】**  $Y = 2X^2 + 1$  的所有可能取值为 1, 3, 9 且

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0.2,$$

$$P(Y = 3) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.1 + 0.3 = 0.4,$$

$$P(Y = 9) = P(X = 2) = 0.4,$$

即  $Y$  的分布律为

$Y$	1	3	9
$P$	0.2	0.4	0.4

下面求  $Y$  的分布函数,由分布函数的定义

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 0.2, & 1 \leq y < 3 \\ 0.6, & 3 \leq y < 9 \\ 1, & y \geq 9 \end{cases}$$

**【例 2.22】** 设  $X \sim U(0, 2)$ , 求  $Y = X^2$  在  $(0, 4)$  内的概率分布密度  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_.

**【分析】** 因为  $x$  在  $(0, 2)$  中变化时,  $y = x^2$  为单调函数, 从而可直接用公式法得

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(\sqrt{y})' = \frac{1}{4\sqrt{y}}, 0 < y < 4, \text{故应填 } \frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

**【例 2.23】** 设连续型随机变量  $X$  有严格单调增加的分布函数  $F(x)$ , 试求  $Y = F(X)$  的分布函数与密度函数.

**【分析】** 本题求随机变量  $X$  的函数  $F(X)$  的分布,  $F(x)$  未具体给出, 用定义法较好.

**【解】** 由分布函数的定义得

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y).$$

因  $F(x)$  为分布函数, 故  $0 \leq F(x) \leq 1$ , 所以

当  $y < 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ; 当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = 1$ ; 当  $0 \leq y < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[X \leq F^{-1}(y)], [\text{因 } F(x) \text{ 单调增}] \\ &= F(F^{-1}(y)) = y. \end{aligned}$$

$$\text{即 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1. \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

所以密度函数为  $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 即  $Y \sim U(0, 1)$ .

**【例 2.24】** 设随机变量  $X$  在  $(0, 2\pi)$  内服从均匀分布, 求随机变量  $Y = \cos X$  的分布密度  $\varphi_Y(y)$ .

**【解】** 因为  $X$  在  $(0, 2\pi)$  内服从均匀分布,

$$\text{所以 } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

由  $Y = \cos X$ , 有  $y = \cos x$ , 其在  $(0, 2\pi)$  内为非单调函数, 在  $(0, \pi)$  与  $(\pi, 2\pi)$  内分别单调, 其反函数分别为

$$x_1 = \arccos y, x_1 \in (0, \pi); 2x_1' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, x_1 \in (0, \pi), y \in (-1, 1);$$

$$x_2 = 2\pi - \arccos y, x_2 \in (\pi, 2\pi); x_2' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, x_2 \in (\pi, 2\pi), y \in (-1, 1).$$

$$\text{故 } \varphi_Y(y) = \varphi(\arccos y) \cdot |x_1'| + \varphi(2\pi - \arccos y) \cdot |x_2'|$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

**【例 2.25】** 在半径为  $R$ , 中心在原点的圆周上任抛一点  $M$ , 求: (1) 该点横坐标  $X$  的密度函数  $\varphi_X(x)$ ; (2) 该点到点  $(-R, 0)$  的距离  $Z$  的密度函数  $\varphi_Z(z)$ .

**【解】** 有关圆的问题, 常以圆心角  $\theta$  作参数 (如图 2-4 所示), 设随机点  $M(x, y)$  的圆心角为  $\theta$ , 由题意可设  $\theta$  为  $(0, 2\pi)$  上的均匀分布, 其密度函数为

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & u \in (0, 2\pi) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$



(1) 由几何知识有  $x = R \cos u$ .

该函数在  $(0, 2\pi)$  内非单调, 在  $(0, \pi)$  与  $(\pi, 2\pi)$  内分别单调, 其反函数分别为

$$u_1 = \arccos \frac{x}{R}; u'_1 = -\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, u_1 \in (0, \pi), |x| < R;$$

$$u_2 = 2\pi - \arccos \frac{x}{R}, u'_2 = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, u_2 \in (\pi, 2\pi), |x| < R.$$

故  $\varphi_x(x) = \varphi(u_1) |u'_1| + \varphi(u_2) |u'_2|$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}, & |x| < R \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由几何知识, 当随机点  $M$  位于  $x$  轴上方时, 随机点  $M$  到  $(-R, 0)$  的距离  $Z$  为

$$Z = 2R \cos \frac{\theta}{2}, \text{ 而 } z = 2R \cos \frac{u}{2},$$

在  $(0, \pi)$  为单减函数, 其反函数为

$$u = 2 \arccos \frac{z}{2R},$$

$$u' = -\frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{2R}\right)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{4R^2 - z^2}}, 0 \leq z < 2R.$$

同理, 当随机点  $M$  位于  $x$  轴下方时, 随机点  $M$  到  $(-R, 0)$  的距离  $Z$  为

$$Z = 2R \cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) = -2R \cos \frac{\theta}{2},$$

而  $z = -2R \cos \frac{u}{2}$  在  $(\pi, 2\pi)$  为单增函数.

其反函数为:  $u = 2\pi - 2 \arccos \frac{z}{2R}, u' = \frac{2}{\sqrt{4R^2 - z^2}}, 0 \leq z < 2R.$

所以  $\varphi_z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4R^2 - z^2}}, & 0 \leq z < 2R \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

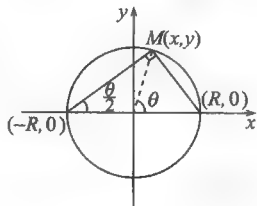


图 2-4

**注** 对于函数非单调的情形, 可以将其定义域分成若干子区间, 使其在每一个子区间上为单调函数, 从而可用公式法分别求出其函数的密度, 然后相加即可, 如【例 2.24】、【例 2.25】. 另外, 这两个题也可用定义法, 即分布函数法求解, 考生不妨作为一个练习.

#### 题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查

**提示** 利用联合分布函数的四个性质, 联合密度的四个性质不难求解.

**【例 2.26】** 如下四个二元函数, 哪个不能作为二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数?

$$(A) F_1(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(B) F_2(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2} \right) \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3} \right).$$

$$(C) F_3(x, y) = \begin{cases} 1, & x + 2y \geq 1 \\ 0, & x + 2y < 1 \end{cases}$$

$$(D) F_4(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【 】

【解】二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数具有表中性质 (1) ~ (4), 因此只有满足性质 (1) ~ (4) 的函数才能作为  $(X, Y)$  的分布函数.

因为对  $F_3(x, y)$  取四点  $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0)$  有

$$F(1, 1) - F(1, 0) - F(0, 1) + F(0, 0) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0,$$

即  $F_3(x, y)$  不满足性质 (4).

故 (C) 该入选.

【例 2.27】设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求: (1) 常数  $C$ ; (2) 联合分布函数  $F(x, y)$ ; (3)  $P\{0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 2\}$ .

【解】(1) 因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1$ ,

$$\text{所以 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-(3x+4y)} dx dy$$

$$= C \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx \int_0^{+\infty} e^{-4y} dy = \frac{C}{12},$$

故  $C = 12$ .

(2)  $(X, Y)$  的分布函数  $F(x, y)$

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0, y > 0 \text{ 时, } F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dx dy = \int_0^x \int_0^y 12e^{-(3x+4y)} dx dy \\ &= (1 - e^{-3x})(1 - e^{-4y}); \end{aligned}$$

当  $x, y$  为其他情形时,  $F(x, y) = 0$ .

$$\text{故 } F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-4y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3) P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 2) &= F(1, 2) - F(1, 0) - F(0, 2) + F(0, 0) \\ &= (1 - e^{-3})(1 - e^{-8}). \end{aligned}$$

● 求  $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 2)$  也可直接计算二重积分  $\int_0^1 \int_0^2 12e^{-(3x+4y)} dx dy$ .

【例 2.28】设  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 其概率密度为

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot 10^2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} \right)}, \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty),$$

求  $P(X < Y)$  (如图 2-5 所示).

$$\text{【解】 } P(X < Y) = \iint_{x < y} \varphi(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi \cdot 10^2} \iint_{x < y} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} \right)} dx dy$$

$$\xrightarrow{\text{由极坐标系}} \frac{1}{2\pi \cdot 10^2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2 \cdot 10^2}} \cdot \rho d\rho = \frac{1}{2}.$$

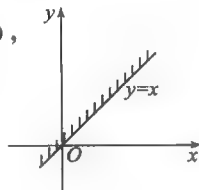


图 2-5

【例 2.29】设二维随机变量  $(X, Y)$  的分布密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} C(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求: (1) 常数  $C$ , (2) 当  $R = 2$  时, 二维随机变量  $(X, Y)$  在以原点为圆心,  $r = 1$  为半径的圆域内的概率.

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) \text{ 因为 } 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} C(R - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R C(R - \rho) \rho d\rho = \frac{1}{3} \pi R^3 C. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } C = \frac{3}{\pi R^3}.$$

(2) 当  $R = 2$  时,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8\pi}(2 - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \leq 2^2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{3}{8\pi}(2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - \rho) \rho d\rho = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论

**【点拨】** 1° 对于由试验给出的二维随机变量的分布, 首先确定其可能取值, 其次综合利用计算概率的各种方法进行计算;

若是已知  $(X, Y)$  的联合分布律, 计算满足某条件的概率, 则先写出满足条件的  $(X, Y)$  的可能值, 然后将这些值的概率相加即得.

2° 对于由已知事件或随机变量给出的二维随机变量的分布, 关键是将新的随机变量的取值转化为已知事件或随机变量的取值;

3° 对于由联合分布求边缘分布、条件分布, 一般均直接利用公式计算;

若联合分布密度为  $\varphi(x, y)$ , 则边缘分布密度的求解程序为:

① 画出  $\varphi(x, y)$  的存在区域  $D$ ;

② 若求对  $X$  的边缘分布密度  $\varphi_X(x)$ , 则先写出  $X$  的变化区间  $(a, b)$ , 然后在该区间内取一点, 过该点自下向上画一条平行于  $y$  轴的直线与区域  $D$  相交, 则先交者为下限, 后交者为上限, 最后求出积分, 即

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \int_a^b \varphi(x, y) dy, x \in (a, b).$$

③ 求对  $Y$  的边缘概率密度  $\varphi_Y(y)$  类似处理, 即

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \int_c^d \varphi(x, y) dx, y \in (c, d).$$

4° 随机变量的独立性, 主要是离散型和连续型的情形, 一般均按定义判别.

**【例 2.30】** 将一枚均匀硬币连掷三次, 以  $X$  表示三次试验中出现正面的次数,  $Y$  表示出现正面的次数与出现反面的次数的差的绝对值, 求  $(X, Y)$  的联合分布律.

**【分析】** 显然  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 3, 而  $Y$  的可能取值为 1, 3, 然后利用二项分布计算概率.

【解】因为  $(X, Y)$  的所有可能取值为  $(0, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 3)$ , 于是由二项概率公式易得

$$P(X=0, Y=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

$$P(X=1, Y=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2, Y=1) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3, Y=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

即  $(X, Y)$  的分布律为

X \ Y	1	3
	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

【例 2.31】设随机变量  $X$  在  $1, 2, 3, 4$  四个整数中等可能地取值, 另一随机变量  $Y$  在  $1 \sim X$  中等可能地取一整数, 试求  $(X, Y)$  的分布律,  $X, Y$  的边缘分布律.

【解】 $\{X=i, Y=j\}$  的取值情况是:  $i=1, 2, 3, 4, j$  是不大于  $i$  的正整数, 由概率的乘法公式有

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j | X=i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{i}, i=1, 2, 3, 4; j \leq i.$$

于是  $(X, Y)$  的联合分布律,  $X, Y$  的边缘分布律见表 2-4.

表 2-4

Y \ X	1	2	3	4	$P\{Y=j\} = P_{.j}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{48}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{48}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{48}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{48}$
$P(X=i) = P_{i.}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

直观上不难发现  $X$  与  $Y$  之间没有独立性, 从而联合分布律一般均用乘法公式计算.

【例 2.32】一整数  $n$  等可能地在  $1, 2, 3, \dots, 10$  十个数中取一个值. 设  $d = d(n)$  是这十个数中能整除  $n$  的正整数的个数,  $F = F(n)$  是能整除  $n$  的素数的个数, 试求  $d$  与  $F$  的联合分布律.

【分析】本题的关键是弄清楚  $d$  与  $F$  的可能取值. 经逐个验算可知  $d$  与  $F$  的取值分别为  $1, 2, 3, 4$  与  $0, 1, 2$ , 然后利用古典概率公式即可求出.

【解】经逐个验算可得 10 个整数的  $d$  与  $F$  的值见表 2-5:

表 2-5

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$F(n)$	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

于是有

$$P(d=1, F=0) = \frac{1}{10}, P(d=1, F=1) = 0,$$

$$P(d=1, F=2) = 0, P(d=2, F=1) = \frac{4}{10}.$$

其他类似可得, 故  $(d, F)$  的联合分布律见表 2-6.

$F(n) \backslash d(n)$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	0	0	0	$\frac{2}{10}$

**【例 2.33】** 设某班车起点站上客人数  $X$  服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为  $p (0 < p < 1)$ , 且中途下车与否相互独立. 以  $Y$  表示在中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有  $n$  个乘客的条件下, 中途有  $m$  人下车的概率;

(2) 二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布.

**【分析】** 第(1)问为条件概率问题. 因每个乘客中途下车的概率均为  $p$ , 且下车与否相互独立, 于是不难判断为一个  $n$  重 Bernoulli 概型. 第(2)问求  $(X, Y)$  的概率分布, 因显然为离散型随机变量, 故只须求出联合分布律即可, 要特别注意的是  $X$  与  $Y$  之间并没有独立性, 从而宜用乘法公式计算.

**【解】** (1)  $P(Y=m | X=n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, 0 \leq m \leq n.$

(2)  $P(X=n, Y=m) = P(Y=m | X=n)P(X=n)$

$$= C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, (0 \leq m \leq n, n=0, 1, 2, \dots).$$

**【例 2.34】** 设事件  $A, B$  满足  $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = P(A|B) = \frac{1}{2}.$

$$\text{令 } X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 发生} \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 发生} \\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生} \end{cases},$$

试求  $(X, Y)$  的联合分布律.

**【解】** 因为  $P(A) = \frac{1}{4}, \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2},$

$$\text{故 } P(AB) = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{而 } P(X=0, Y=0) = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{5}{8},$$

$$P(X=0, Y=1) = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{8},$$

$$P(X=1, Y=0) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{8},$$

$$P(X=1, Y=1) = P(AB) = \frac{1}{8}.$$

故所求联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

**【例 2.35】**某箱装有 100 件产品,其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件,现从中随机抽取一件,记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad (i=1,2,3)$$

试求:(1) 随机变量  $X_1$  与  $X_2$  的联合分布;

(2) 随机变量  $X_1$  与  $X_2$  的相关系数  $\rho_{X_1 X_2}$ .

**【解】**(1) 令  $A_i = \text{"抽到 } i \text{ 等品"} (i=1,2,3)$ . 由题意知  $A_1, A_2, A_3$  两两互不相容.  $P(A_1) = 0.8$ ,  $P(A_2) = P(A_3) = 0.1$ . 易见

$$P\{X_1=0, X_2=0\} = P(A_3) = 0.1, \quad P\{X_1=0, X_2=1\} = P(A_2) = 0.1,$$

$$P\{X_1=1, X_2=0\} = P(A_1) = 0.8, \quad P\{X_1=1, X_2=1\} = P(\emptyset) = 0,$$

即

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

(2)

$X_1$	0	1
$P$	0.2	0.8

$X_2$	0	1
$P$	0.9	0.1

$$E(X_1) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.8 = 0.8, \quad E(X_2) = 0 \times 0.9 + 1 \times 0.1 = 0.1,$$

$$D(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = 0.16, \quad D(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = 0.09,$$

$$E(X_1 X_2) = 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.8 + 1 \times 1 \times 0 = 0,$$

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0 - 0.8 \times 0.1 = -0.08.$$

$$\text{故 } X_1 \text{ 与 } X_2 \text{ 的相关系数为 } \rho = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)} \sqrt{D(X_2)}} = \frac{-0.08}{\sqrt{0.16} \sqrt{0.09}} = -\frac{2}{3}.$$

**【评注】**本题由事件定义三个随机变量  $X_1, X_2, X_3$ , 故也可求  $(X_1, X_3)$  或  $(X_2, X_3)$  的联合分布, 读者不妨作为练习.

【例 2.36】设随机变量  $(X, Y)$  的密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求: (1)  $(X, Y)$  的分布函数; (2)  $(X, Y)$  的两个边缘分布密度;

(3)  $(X, Y)$  的两个条件密度;

(4) 概率  $P(X+Y > 1)$ ,  $P(Y > X)$  及  $P\left(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$ .

【解】(1) 分情况讨论.

(i) 当  $x \leq 0$  或  $y \leq 0$  时,

因为  $\varphi(x, y) = 0$ , 所以  $F(x, y) = 0$ .

(ii) 当  $0 < x \leq 1, 0 < y \leq 2$  时,

因为 
$$\varphi(x, y) = x^2 + \frac{1}{3}xy,$$

所以 
$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^y \left(u^2 + \frac{1}{3}uv\right) du dv \\ &= \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{12}x^2y^2. \end{aligned}$$

(iii) 当  $0 < x \leq 1, y > 2$  时,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^y \varphi(u, v) du dv \\ &= \int_0^x \int_0^2 \varphi(u, v) du dv \\ &= \int_0^x \int_0^2 \left(u^2 + \frac{1}{3}uv\right) du dv = \frac{1}{3}(2x+1)x^2. \end{aligned}$$

(iv) 当  $x > 1, 0 < y \leq 2$  时,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(u, v) du dv = \int_0^1 \int_0^y \varphi(u, v) du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^y \left(u^2 + \frac{1}{3}uv\right) du dv = \frac{1}{12}(4+y)y. \end{aligned}$$

(v) 当  $x > 1, y > 2$  时,

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 \left(u^2 + \frac{1}{3}uv\right) du dv = \int_0^1 du \int_0^2 \left(u^2 + \frac{1}{3}uv\right) dv = 1.$$

综上所述, 分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } y \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^2y\left(x + \frac{y}{4}\right), & 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 2 \\ \frac{1}{3}x^2(2x+1), & 0 < x \leq 1, y > 2 \\ \frac{1}{12}y(4+y), & x > 1, 0 < y \leq 2 \\ 1, & x > 1, y > 2 \end{cases}.$$

(2) 当  $0 \leq x \leq 1$  时,

$$\varphi_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x, \text{ 故}$$

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当  $0 \leq y \leq 2$  时,

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y, \quad \text{故}$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y, & 0 \leq y \leq 2 \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 当  $0 \leq y \leq 2$  时,  $X$  关于  $Y = y$  的条件密度为

$$\varphi(x|y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_Y(y)} = \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}.$$

当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $Y$  关于  $X = x$  的条件密度为

$$\varphi(y|x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)} = \frac{3x + y}{6x + 2}.$$

(4) 如图 2-6 所示,

$$\begin{aligned} P(X+Y > 1) &= \iint_{x+y>1} \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = \frac{65}{72}. \end{aligned}$$

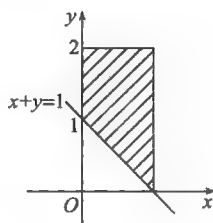


图 2-6

如图 2-7 所示,

$$\begin{aligned} P(Y > X) &= \iint_{y>x} \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_x^2 \left(x^2 + \frac{1}{3}xy\right) dy = \frac{17}{24}. \\ P\left(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right) &= \frac{P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{F_X\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^2y\left(x + \frac{y}{4}\right) \Big|_{(0,0)}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}}{\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_X(x) dx} = \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

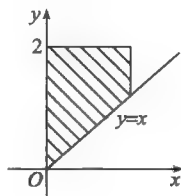


图 2-7

【例 2.37】设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求: (1) 条件概率密度  $\varphi(x|y), \varphi(y|x)$ ;

$$(2) P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y > 0\right).$$

【解】(1) 如图 2-8 所示,

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 dx = 1 - y, & 0 \leq y < 1 \\ \int_{-y}^1 dx = 1 + y, & -1 < y < 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

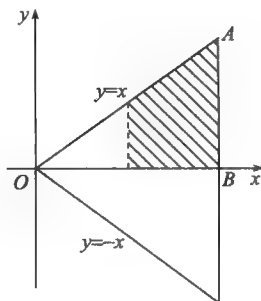


图 2-8



$$= \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

于是, 条件概率密度分别为

$$\text{对一切 } |y| < 1, \varphi(x|y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - |y|}, & |y| < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$\text{对一切 } 0 < x < 1, \varphi(y|x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y| < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$(2) P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y > 0\right) = \frac{P\left(X > \frac{1}{2}, Y > 0\right)}{P(Y > 0)} = \frac{\text{图中阴影面积}}{\triangle AOB \text{ 的面积}} = \frac{3}{4}.$$

注 对  $|y| \geq 1$ , 条件密度  $\varphi(x|y)$  不存在; 对  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$ , 条件密度  $\varphi(y|x)$  也不存在.

**【例 2.38】** 设  $(X, Y)$  的密度函数为  $\varphi(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

试求: (1)  $X, Y$  的边缘密度函数, 并判别其独立性;

(2)  $(X, Y)$  的条件概率密度;

(3)  $P\{X > 2 \mid Y < 4\}$ .

**【解】** (1) 因为当  $x > 0$  时 (如图 2-9 所示),

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x},$$

$$\text{所以 } \varphi_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$\text{同理有 } \varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, & \text{当 } y > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dx = 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因为  $\varphi(x, y) \neq \varphi_X(x)\varphi_Y(y)$ , 故  $X$  与  $Y$  不独立.

$$(2) \text{ 对一切 } x > 0, \varphi(y|x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)} = \begin{cases} e^{-y}, & y > x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$\text{对一切 } y > 0, \varphi(x|y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y > x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$(3) P\{X > 2 \mid Y < 4\} = \frac{P\{X > 2, Y < 4\}}{P\{Y < 4\}} = \frac{\int_{\triangle ABC} e^{-y} dx dy}{\int_{y < 4} \varphi_Y(y) dy} = \frac{\int_2^4 dx \int_x^4 e^{-y} dy}{\int_0^4 ye^{-y} dy} = \frac{e^{-2} - 3e^{-4}}{1 - 5e^{-4}}.$$

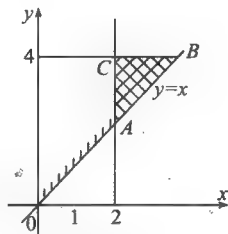


图 2-9

**【例 2.39】** 已知随机变量  $X_1$  和  $X_2$  的概率分布

$$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

而且  $P(X_1 X_2 = 0) = 1$ .

(1) 求  $X_1$  和  $X_2$  的联合分布;

(2) 问  $X_1$  和  $X_2$  是否独立,为什么?

【解】(1) 由  $P(X_1 X_2 = 0) = 1$ , 有  $P(X_1 X_2 \neq 0) = 0$ , 故

$$P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0.$$

$$\text{于是 } P\{X_1 = -1, X_2 = 0\} = P\{X_1 = -1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = P\{X_2 = 1\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = P\{X_1 = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0,$$

所以,  $X_1$  和  $X_2$  的联合分布见表 2-7.

表 2-7

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$P(X_2 = j)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$P(X_1 = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) 因为  $P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 0 \neq P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ , 故  $X_1$  与  $X_2$  不独立.

### 题型六 求两个随机变量的简单函数的分布

**提示** 要求两个随机变量的函数  $g(X, Y)$  的分布, 本质上必须直接或间接给出  $(X, Y)$  的联合分布, 并且用定义法求解具有一般性, 须重点掌握.

若已知  $(X, Y)$  的联合密度为  $\varphi(x, y)$ ,  $Z = g(X, Y)$ , 则  $Z$  的密度可通过先求  $Z$  的分布函数

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(x, y) \leq z) = \iint_{g(x, y) \leq z} \varphi(x, y) dx dy$ , 然后求导而得  $Z$  的密度

函数  $\varphi_Z(z) = F'_Z(z)$ , 但要注意的是上面的二重积分一般要分情况讨论.

【例 2.40】设  $(X, Y)$  的分布律见表 2-8.

表 2-8

$X \backslash Y$	-1	1	2
-2	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

求  $Z = X + Y$  的分布律.

【分析】找出  $Z$  的所有可能取值, 并注意将相同的值进行合并, 然后求出对应的概率.

【解】

$P$	$(X, Y)$	$Z = X + Y$
$\frac{1}{12}$	$(-2, -1)$	$-3$
$\frac{2}{12}$	$(-2, 1)$	$-1$
$\frac{2}{12}$	$(-2, 2)$	$0$
$\frac{1}{12}$	$(-1, -1)$	$-2$
$\frac{1}{12}$	$(-1, 1)$	$0$
$0$	$(-1, 2)$	$1$
$\frac{2}{12}$	$(0, -1)$	$-1$
$\frac{1}{12}$	$(0, 1)$	$1$
$\frac{2}{12}$	$(0, 2)$	$2$

故  $Z = X + Y$  的分布律为

$Z = X + Y$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

【例 2.41】设两个独立的随机变量  $X$  与  $Y$  的分布律为

$X$	1	3
$P_i$	0.3	0.7

, 
 

$Y$	2	4
$P_j$	0.6	0.4

求随机变量  $Z = X + Y$  的分布律.

【解】因为  $X$  与  $Y$  相互独立, 所以  $P_{ij} = P_i \cdot P_j$ .

于是联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

因之

$P_{ij}$	$(X, Y)$	$Z = X + Y$
0.18	$(1, 2)$	3
0.12	$(1, 4)$	5
0.42	$(3, 2)$	5
0.28	$(3, 4)$	7

故

$Z = X + Y$	3	5	7
$P$	0.18	0.54	0.28

【例 2.42】设  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}.$$

试求随机变量  $Z = X + Y$  的概率密度.

【解】因为  $X$  与  $Y$  相互独立,所以联合密度为

$$\varphi(x, y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

(1) 显然,当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} \varphi(x, y) dx dy = 0$ .

(2) 如图 2-10(a) 所示,当  $0 \leq z < 1$  时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x+y \leq z} \varphi(x, y) dx dy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy \\ &= z - 1 + e^{-z}. \end{aligned}$$

(3) 如图 2-10(b) 所示,当  $z \geq 1$  时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x+y \leq z} \varphi(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy \\ &= 1 + (1 - e) e^{-z}. \end{aligned}$$

故  $Z = X + Y$  的概率密度为  $\varphi_Z(z) = F'_Z(z)$ , 即

$$\varphi_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1. \\ (e - 1)e^{-z}, & z \geq 1 \end{cases}$$

【例 2.43】设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求  $Z = X - Y$  的概率密度.

【解】如图 2-11 所示,当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ;

当  $0 \leq z < 1$  时,

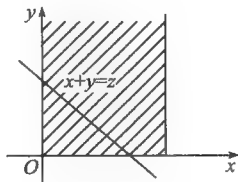
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{D_1} 3x dx dy + \iint_{D_2} 3x dx dy = \int_0^z dx \int_0^x 3x dy + \int_z^1 dx \int_{x-z}^x 3x dy \\ &= \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3; \end{aligned}$$

当  $z \geq 1$  时,  $F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_0^x 3x dy = 1$ .

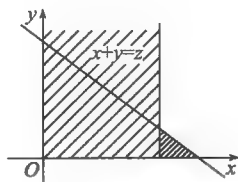
故  $\varphi_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - z^2), & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

【例 2.44】设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,且其概率密度分别为

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, & 0 < x < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$



(a)



(b)

图 2-10

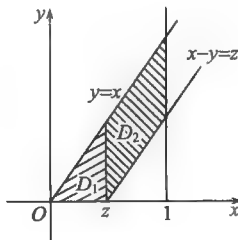


图 2-11

$$\varphi_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}, & 0 < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的概率密度.

【解】由题意  $X$  与  $Y$  相互独立, 于是  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}, & 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如图 2-12 所示, 当  $z < 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ ; 当  $z \geq 0$  时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{Z \leq z} \varphi(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^z e^{-\rho^2} \rho d\rho = 1 - e^{-z^2}. \end{aligned}$$

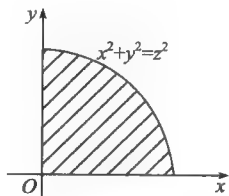


图 2-12

故,  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的概率密度为

$$\varphi_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 2ze^{-z^2}, & z \geq 0 \end{cases}$$

【例 2.45】设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合分布是正方形  $G = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$  上的均匀分布, 试求随机变量  $U = |X - Y|$  的概率密度  $p(u)$ .

【解】由题设可知  $X$  和  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设  $F(u) = P\{U \leq u\} (-\infty < u < \infty)$  表示随机变量  $U$  的分布函数.

如图 2-13 所示, 当  $u \leq 0$  时,  $F(u) = 0$ ; 当  $u \geq 2$  时,  $F(u) = 1$ ;

当  $0 < u < 2$  时,

$$\begin{aligned} F(u) &= \iint_{|x-y| \leq u} f(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq u} \frac{1}{4} dx dy \\ &= \frac{1}{4} [4 - (2-u)^2] = 1 - \frac{1}{4} (2-u)^2. \end{aligned}$$

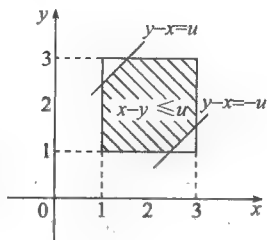


图 2-13

故

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【例 2.46】设随机变量  $(X, Y)$  的分布律见表 2-9.

表 2-9

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

试求: (1)  $P\{X = 2 | Y = 2\}, P\{Y = 3 | X = 0\}$ ; (2)  $V = \max(X, Y)$  的分布律;

(3)  $U = \min(X, Y)$  的分布律; (4)  $W = V + U$  的分布律.

$$\text{【解】} (1) P\{X = 2 | Y = 2\} = \frac{P\{X = 2, Y = 2\}}{P\{Y = 2\}} = \frac{P\{X = 2, Y = 2\}}{\sum_{i=0}^5 P\{X = i, Y = 2\}} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{类似有 } P\{Y = 3 | X = 0\} = \frac{P\{Y = 3, X = 0\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) P\{V = i\} = P\{\max(X, Y) = i\} = P\{X = i, Y < i\} + P\{X \leq i, Y = i\} \\ = \sum_{k=0}^{i-1} P\{X = i, Y = k\} + \sum_{k=0}^i P\{X = k, Y = i\}, i = 0, 1, \dots, 5,$$

于是

$V = \max(X, Y)$	0	1	2	3	4	5
$P$	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

$$(3) P\{U = i\} = P\{\min(X, Y) = i\} = P\{X = i, Y \geq i\} + P\{X > i, Y = i\} \\ = \sum_{k=i}^3 P\{X = i, Y = k\} + \sum_{k=i+1}^5 P\{X = k, Y = i\}, i = 0, 1, 2, 3,$$

于是

$U = \min(X, Y)$	0	1	2	3
$P$	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) 因为  $W = V + U = \max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$ ,

于是有

$W = V + U$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P$	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

**【例 2.47】** 设某型号的电子元件寿命(以小时计)近似服从  $N(160, 20^2)$  分布, 随机选取 4 件, 求其中没有一件寿命小于 180 h 的概率.

**【解】** 设选取的 4 件电子元件的寿命分别为  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_i \sim N(160, 20^2), i = 1, 2, 3, 4$ , 对应的分布函数为  $F(t)$ , 令  $T = \min(T_1, T_2, T_3, T_4)$ , 由表 2-2 最后一栏有

$$F_{\min}(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - [1 - F(t)]^4.$$

$$\text{于是 } P\{T \geq 180\} = 1 - P\{T < 180\} = [1 - F(180)]^4.$$

$$\text{因为 } F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

其中,  $\Phi(t)$  为标准正态分布函数, 此处  $\mu = 160, \sigma = 20$ ,

$$\text{所以 } P\{T \geq 180\} = \left[1 - \Phi\left(\frac{180 - 160}{20}\right)\right]^4 \\ = [1 - \Phi(1)]^4 = (1 - 0.8413)^4 = (0.1587)^4.$$

**【例 2.48】** 对某种电子装置的输出测量了 5 次, 得到的观察值  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ , 设它们是相互独立的变量, 且都服从同一分布

$$F(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z}{5}}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求:  $\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 4$  的概率.

**【解】** 令  $V = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ ,

由于  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  相互独立, 且服从同一分布, 由表 2-2 最后一栏有

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^5,$$

所求概率

$$\begin{aligned} P\{V > 4\} &= 1 - P\{V \leq 4\} = 1 - F_{\max}(4) \\ &= 1 - [F(4)]^5 = 1 - (1 - e^{-2})^5. \end{aligned}$$

**注** 最大(max)、最小(min) 函数是常用的两个特殊函数, 须掌握其处理技巧.

### 第 3 节 思维定势与综合题解析

#### 一、思维定势

**思维定势 1** 若题设中给出随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则马上联想到应用标准化  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  来处理有关问题.

**【例 2.49】** 设随机变量  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 且  $P(2 < X < 4) = 0.3$ , 则  $P(X < 0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【解】**  $P(2 < X < 4) = P\left(\frac{2-2}{\sigma} < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{4-2}{\sigma}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 0.5 = 0.3$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8.$$

故

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= P\left(\frac{X-2}{\sigma} < \frac{0-2}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) \\ &= 1 - 0.8 = 0.2. \end{aligned}$$

**思维定势 2** 求二维随机变量  $(X, Y)$  的边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$  的问题, 应该马上联想到先画出使联合概率密度  $f(x, y) \neq 0$  的区域, 然后定出  $X$  的变化区间, 再在该区间内画一条平行于  $y$  轴的直线, 先与区域边界相交的为  $y$  的下限, 后者为上限,

则  $f_X(x) = \begin{cases} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ . 而  $f_Y(y)$  的求法类似.

**【例 2.50】** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 24(1-x)y, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1)  $X$  与  $Y$  的边缘密度  $f_X(x), f_Y(y)$ ; (2)  $X$  与  $Y$  是否相互独立?

**【解】** 使  $f(x, y) \neq 0$  的区域如图 2-14 所示中  $D$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  时,

$$f_X(x) = \int_0^x f(x, y) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= 24 \int_0^x (1-x)y dy \\
 &= 12x^2(1-x).
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{同理} \quad f_Y(y) &= \begin{cases} \int_y^1 24y(1-x)dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 12(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(2) 因为  $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$

所以  $X$  与  $Y$  不相互独立.

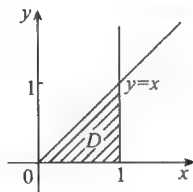


图 2-14

**思维定势 3** 欲求二维随机变量  $(X, Y)$  满足条件  $Y \geq g(X)$  [或  $Y \leq g(X)$ ] 的概率, 应该马上联想到二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  的计算, 其积分域  $D$  是由联合密度  $f(x, y) \neq 0$  的平面区域及满足  $Y \geq g(X)$  [或  $Y \leq g(X)$ ] 的区域的公共部分.

**【例 2.51】** 设甲船到达港口的时间均匀分布在 8 ~ 12 时, 乙船到达港口的时间均匀分布在 7 ~ 9 时, 两船到达的时间相互独立, 求两船到达港口时间相差不超过 5 min 的概率.

**【解】** 设  $X, Y$  分别表示甲、乙船到达港口的时间, 由题设  $X, Y$  的概率密度分别为

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8 \leq x \leq 12 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \\
 f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & 7 \leq y \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

由于  $X, Y$  相互独立, 故  $(X, Y)$  的联合密度为

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f_X(x)f_Y(y) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{8} & 8 < x < 12, 7 < y < 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}$$

5 min 即  $\frac{1}{12}$  h, 故欲求的是  $P\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\}$ ,

画出  $f(x, y) \neq 0$  的区域  $[8 < x < 12, 7 < y < 9]$  及

$|x - y| \leq \frac{1}{12}$  的区域, 如图 2-15 所示,

$$P\{|X - Y| \leq \frac{1}{12}\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \frac{1}{8} \times S_G \text{ 的面积}.$$

$$S_G \text{ 的面积} = \triangle ABC \text{ 的面积} - \triangle AB'C' \text{ 的面积}$$

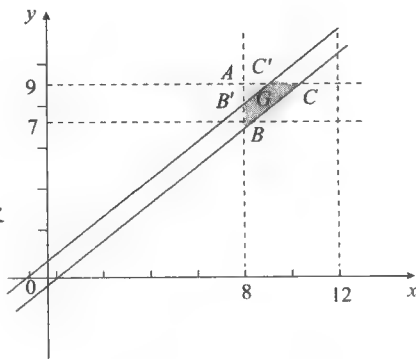


图 2-15



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{13}{12} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{11}{12} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

故

$$P\left\{|X-Y| \leq \frac{1}{12}\right\} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

## 二、综合题解析

**【例 2.52】**假设一设备开机后无故障工作的时间  $X$  服从指数分布, 平均无故障工作的时间  $EX$  为 5 h. 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2 h 便关机. 试求该设备每次开机无故障工作的时间  $Y$  的分布函数  $F(y)$ .

**【解】**设  $X$  的分布参数为  $\lambda$ . 由于  $EX = \frac{1}{\lambda} = 5$ , 可见  $\lambda = \frac{1}{5}$ , 显然,  $Y = \min\{X, 2\}$ .

对于  $y < 0$ ,  $F(y) = 0$ ; 对于  $y \geq 2$ ,  $F(y) = 1$ . 设  $0 \leq y < 2$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{有} \quad F(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} \\
 &= P\{X \leq y\} = 1 - e^{-\frac{y}{5}}.
 \end{aligned}$$

于是,  $Y$  的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}}, & \text{若 } 0 \leq y < 2. \\ 1, & \text{若 } y \geq 2 \end{cases}$$

**【例 2.53】**设  $X$  与  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 它们均匀地分布在  $(0, l)$  内, 试求方程  $t^2 + Xt + Y = 0$  有实根的概率.

**【解】**由题设  $X, Y$  的概率密度分别为

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 < x < l; \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
 f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 < y < l. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}$$

由于  $X, Y$  相互独立, 故  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{l^2}, & 0 < x < l, 0 < y < l. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

方程  $t^2 + Xt + Y = 0$  有实根的条件为  $X^2 - 4Y \geq 0$ , 因此所求概率为  $P\{X^2 - 4Y \geq 0\}$ ,

(I) 当  $l \leq 4$  时, 由图 2-16 有  $P\{X^2 - 4Y \geq 0\} = \int_0^l dx \int_0^{\frac{x^2}{4}} \frac{1}{l^2} dy = \frac{l}{12}$ .

(II) 当  $l > 4$  时,  $P\{X^2 - 4Y \geq 0\} = \int_0^l dy \int_{2\sqrt{y}}^l \frac{1}{l^2} dx = 1 - \frac{4}{3\sqrt{l}}$ .

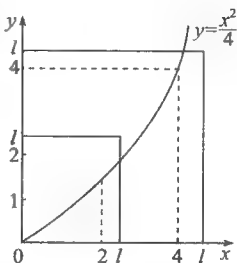


图 2-16

习 题 二

1. 填空题.

(1) 设随机变量  $X \sim B(2, p), Y \sim B(3, p)$ , 若  $P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$ , 则  $P(Y \geq 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 已知随机变量  $X$  只能取  $-1, 0, 1, 2$  四个数值, 其相应的概率依次为  $\frac{1}{2c}, \frac{3}{4c}, \frac{5}{8c}, \frac{2}{16c}$ , 则  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 用随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$  表示下述概率:

$$P(X \leq a) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad P(X = a) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$P(X > a) = \underline{\hspace{2cm}}; \quad P(x_1 < X \leq x_2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 设  $k$  在  $(0, 5)$  上服从均匀分布, 则方程  $4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$  有实根的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 已知  $P\{X = k\} = \frac{a}{k}, P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2} \quad (k = 1, 2, 3)$ ,  $X$  与  $Y$  独立, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$ , 联合概率分布为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ,  $Z = X + Y$  的概率分布为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(6) 已知  $(X, Y)$  的联合密度为  $\varphi(x, y) = \begin{cases} c \sin(x+y), & 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $Y$  的

边缘概率密度  $\varphi_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(7) 设平面区域  $D$  由曲线  $y = \frac{1}{x}$  及直线  $y = 0, x = 1, x = e^2$  所围成, 二维随机变量  $(X, Y)$  在  $D$  上服从均匀分布, 则  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘密度在  $x = 2$  处的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(8) 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一组简单随机样本, 则  $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$  服从  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(9) 如果  $(X, Y)$  的联合分布律用下列表格给出,

$(X, Y)$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\alpha$	$\beta$

且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}, \beta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(10) 设  $(X, Y)$  的联合分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

则 ①  $Z = X + Y$  的分布律  $\underline{\hspace{2cm}}$ ; ②  $V = X - Y$  的分布律  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

③  $U = X^2 + Y - 2$  的分布律  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

## 2. 单项选择题.

 (1) 如下四个函数哪个是随机变量  $X$  的分布函数

$$A. F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{2}, & -2 \leq x < 0. \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$B. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi. \\ 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$C. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}. \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$D. F(x) = \begin{cases} 0, & x < \\ x + \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ 1, & x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{【 】}$$

 (2)  $P(X=k) = c\lambda^k e^{-\lambda}/k!$  ( $k=0,2,4,\dots$ ) 是随机变量的  $X$  的概率分布, 则  $\lambda, c$  一定满足

 A.  $\lambda > 0$ .      B.  $c > 0$ .      C.  $c\lambda > 0$ .      D.  $c > 0$ , 且  $\lambda > 0$ .      【 】

 (3)  $X \sim N(1,1)$ , 概率密度为  $\varphi(x)$ , 则

 A.  $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0.5$ .      B.  $\varphi(x) = \varphi(-x), x \in (-\infty, +\infty)$ .  
 C.  $P(X \leq 1) = P(X \geq 1) = 0.5$ .      D.  $F(x) = 1 - F(-x), x \in (-\infty, +\infty)$ .  
 【 】

 (4)  $X, Y$  相互独立, 且都服从区间  $[0,1]$  上的均匀分布, 则服从区间或区域上的均匀分布的随机变量是

 A.  $(X, Y)$ .      B.  $X+Y$ .      C.  $X^2$ .      D.  $X-Y$ .      【 】

 (5) 设随机变量  $X$  的分布律是

$X$	-2	-1	0	1	2
$P$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

 则  $Y = X^2$  的分布律为

A.

$Y = X^2$	4	1	0	1	4
$P$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

B.

$Y = X^2$	4	1	0	1	4
$P$	$\frac{1}{25}$	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

C.

$Y = X^2$	0	1	4
$P$	$\frac{4}{25}$	$(0 + \frac{1}{25})$	$(\frac{1}{25} + \frac{1}{25})$

D.

$Y = X^2$	0	1	4
$P$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

【 】

(6) 设函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \text{ 则} \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

A.  $F(x)$  是随机变量  $X$  的分布函数. B. 不是分布函数.

C. 离散型分布函数.

D. 连续型分布函数. 【 】

(7) 设  $X, Y$  是相互独立的两个随机变量, 它们的分布函数分别为  $F_X(x), F_Y(y)$ , 则  $Z = \max(X, Y)$  的分布函数是

A.  $F_Z(z) = \max\{F_X(x), F_Y(y)\}$ .

B.  $F_Z(z) = \max\{|F_X(x)|, |F_Y(y)|\}$ .

C.  $F_Z(z) = F_X(x)F_Y(y)$ .

D. 都不是. 【 】

(8) 设  $X, Y$  是相互独立的随机变量, 其分布函数分别为  $F_X(x), F_Y(y)$ , 则  $Z = \min(X, Y)$  的分布函数是

A.  $F_Z(z) = F_X(x)$ .

B.  $F_Z(z) = F_Y(y)$ .

C.  $F_Z(z) = \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$ .

D.  $F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(x)][1 - F_Y(y)]$ . 【 】

(9) 设  $X$  的密度为  $\varphi(x)$ , 而  $\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , 则  $Y = 2X$  的概率密度是

A.  $\frac{1}{\pi(1+4x^2)}$ .

B.  $\frac{2}{\pi(4+x^2)}$ .

C.  $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

D.  $\frac{1}{\pi} \arctan x$ . 【 】

(10) 设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布密度为  $\varphi(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则

$Z = \frac{X+Y}{2}$  的分布密度是

A.  $\varphi_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

B.  $\varphi_Z(z) = \begin{cases} e^{-\frac{(x+y)}{2}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

C.  $\varphi_Z(z) = \begin{cases} 4ze^{-2z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

D.  $\varphi_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$ . 【 】

(11) 设两个相互独立的随机变量  $X$  和  $Y$  分别服从正态分布  $N(0, 1)$  和  $N(1, 1)$ , 则下列结论正确的是

A.  $P\{X+Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ .

B.  $P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ .

C.  $P\{X-Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ .

D.  $P\{X-Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ . 【 】

(12) 设随机变量  $X$  服从指数分布, 则  $Y = \min\{X, 2\}$  的分布函数是

A. 连续函数.

B. 至少有两个间断点.

C. 阶梯函数.

D. 恰好有一个间断点. 【 】

### 3. 证明题.

(1)  $X \sim N(a, \sigma^2)$ , 证明:  $Y = \frac{X-a}{\sigma}$  服从标准正态分布  $N(0, 1)$ .

(2) 设  $X, Y$  是相互独立的随机变量, 它们分别服从参数为  $\lambda_1, \lambda_2$  的泊松分布, 证明:  $Z = X+Y$

服从参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的泊松分布.

(3) 设  $F(x)$  是分布函数, 证明: 对于任意  $h \neq 0$ , 函数  $\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(t) dt$  也是分布函数.

#### 4. 计算题.

(1) 向目标相互独立地射击 5 次, 每次命中目标的概率为 0.6, 求命中目标的次数  $X$  的分布密度.

(2) 某射手有 5 发子弹, 射击一次命中率为 0.9, 如果他命中目标就停止射击, 命中不中就一直射击到用完 5 发子弹, 求所用子弹数  $X$  的分布密度.

(3) 设随机变量  $X$  的分布密度为  $\varphi(x) = Ae^{-x^2+x}$ , 求  $A$ .

(4) 设一批产品中 10 件正品, 3 件次品, 现一件一件地随机取出, 分别求出在下列各情形中直到取得正品为止所需次数  $X$  的分布密度.

① 每次取出的产品不放回; ② 每次取出的产品经检验后放回, 再抽取; ③ 每次取出一件产品后再放回一件正品, 然后再抽取.

(5) 随机变量  $X$  的密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

求: ① 常数  $c$ ; ②  $X$  落在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  内的概率.

(6) 随机变量  $X$  的分布密度为

$$\textcircled{1} \varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \textcircled{2} \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 ①, ② 的分布函数  $F(x)$ .

(7) 设测量从某地到某一目标的距离时带有的随机误差  $X$  具有分布密度函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{3200}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

试求: ① 测量误差的绝对值不超过 30 的概率;

② 接连测量三次, 每次测量相互独立进行, 则至少有一次误差的绝对值不超过 30 的概率.

(8) 设电子元件的寿命  $X$  具有密度

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & 100 < x, \\ 0, & x \leq 100 \end{cases}$$

问在 150 h 内, ① 三只元件中没有一只损坏的概率是多少? ② 三只电子元件全损坏的概率是多少? ③ 只有一个电子元件损坏的概率又是多少?

(9) 对圆片直径进行测量, 其值在  $[5, 6]$  上均匀分布, 求圆片面积的概率分布.

(10) 设  $X$  分别为  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $[0, \pi]$  及  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布变量, 求  $Y = \sin X$  的密度函数.

(11) 已知  $X$  服从参数为  $p = 0.6$  的 0-1 分布, 在  $X = 0, X = 1$  下, 关于  $Y$  的条件分布分别见表 2-10 和表 2-11:

表 2-10

Y	1	2	3
$P(Y   X = 0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

表 2-11

Y	1	2	3
$P(Y   X = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求  $(X, Y)$  的联合概率分布, 以及在  $Y \neq 1$  时, 关于  $X$  的条件分布.

(12) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 并在区间  $[0, 9]$  上服从均匀分布, 求随机变量  $Z = \frac{X}{Y}$  的分布密度.

(13) 设  $X$  与  $Y$  相互独立, 分布密度分别为

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

求随机变量  $Z = X + Y$  的分布密度.

(14) 设  $X, Y$  相互独立, 且在  $[0, 1]$  上均匀分布, 试求使方程  $x^2 + 2Xx + Y = 0$  有实根的概率.

(15) 设  $(X, Y)$  的密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x-y), & x > 0, y > 0, x+y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{求: ① } \varphi_X(x), \varphi\{y | x\}, \varphi\left\{y | x = \frac{1}{2}\right\}; \text{② } \varphi_Y(y), \varphi\{x | y\}, \varphi\left\{x | y = \frac{1}{2}\right\}.$$

(16) 假设随机变量  $Y$  服从参数为  $\lambda = 1$  的指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & Y \leq k, \\ 1, & Y > k. \end{cases} \quad k = 1, 2,$$

求: ①  $X_1$  和  $X_2$  的联合概率分布; ②  $E(X_1 + X_2)$ .

### 参 考 答 案

1. (1)  $\frac{19}{27}$ .

(2)  $c = 2$ .

(3)  $P(X \leq a) = F(a), P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-0),$

$P(X > a) = 1 - F(a), P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$

(4) 0.6.

(5)  $a = \frac{6}{11}, b = \frac{36}{49},$

$X \backslash Y$	-1	-2	-3
1	$ab$	$\frac{ab}{4}$	$\frac{ab}{9}$
2	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ab}{8}$	$\frac{ab}{18}$
3	$\frac{ab}{3}$	$\frac{ab}{12}$	$\frac{ab}{27}$

Z	-2	-1	0	1	2
P	$24\alpha$	$66\alpha$	$251\alpha$	$126\alpha$	$72\alpha$

$\left(\alpha = \frac{1}{539}\right).$

$$(6) c = \sqrt{2} + 1, \varphi_Y(y) = (\sqrt{2} + 1) \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin\left(y + \frac{\pi}{8}\right) \quad \left(0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

$$(7) \frac{1}{4}, \quad (8) N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\mu}\right), \quad (9) \alpha = \frac{2}{9}, \beta = \frac{1}{9}.$$

$$(10) \textcircled{1} \begin{array}{c|ccccccc} X+Y & -3 & -2 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \hline P & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{array}.$$

$$\textcircled{2} \begin{array}{c|ccccccc} X-Y & -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 3 & 5 \\ \hline P & \frac{3}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{array}.$$

$$\textcircled{3} \begin{array}{c|ccccccc} X^2+Y-2 & -\frac{15}{4} & -3 & -\frac{11}{4} & -2 & -1 & 5 & 7 \\ \hline P & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \end{array}.$$

2. (1)C (2)B (3)C (4)A (5)D (6)B (7)C (8)D (9)B (10)C (11)B (12)D

3. 略.

$$4. (1) \begin{array}{c|cccccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline P & \frac{1}{243} & \frac{10}{243} & \frac{40}{243} & \frac{80}{243} & \frac{80}{243} & \frac{32}{243} \end{array}.$$

$$(2) \begin{array}{c|ccccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline P & 0.9 & 0.09 & 0.009 & 0.0009 & 0.0001 \end{array}.$$

$$(3) A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}}.$$

$$(4) \textcircled{1} \begin{array}{c|cccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & \frac{10}{13} & \frac{3}{13} \cdot \frac{10}{12} & \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} & \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \end{array}.$$

$$\textcircled{2} P\{X=k\} = \left(\frac{3}{13}\right)^{k-1} \left(\frac{10}{13}\right).$$

$$\textcircled{3} \begin{array}{c|cccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P & \frac{10}{13} & \frac{3}{13} \cdot \frac{11}{13} & \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{12}{13} & \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{13} \cdot 1 \end{array}.$$

$$(5) \textcircled{1} c = \frac{1}{\pi}, \quad \textcircled{2} \frac{1}{3}.$$

$$(6) F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(7) \textcircled{1} 0.4931. \quad \textcircled{2} 0.87.$$

$$(8) \textcircled{1} \frac{8}{27}. \quad \textcircled{2} \frac{1}{27}. \quad \textcircled{3} \frac{4}{9}.$$

$$(9) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{25}{4}\pi, \\ \sqrt{\frac{4y}{\pi}} - 5, & \frac{25}{4}\pi \leq y < 9\pi, \\ 1, & y \geq 9\pi. \end{cases} \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \frac{25}{4}\pi \leq y \leq 9\pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(10) \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(11) \begin{array}{c|ccc} & Y & & \\ \hline X & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 0.5 & 0.5 \\ (Y \neq 1) & & \end{array}$$

$$(12) \varphi_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq z < 1, \\ \frac{1}{2z^2}, & z \geq 1. \end{cases}$$

$$(13) \varphi_Z(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}(1 - e^{-\frac{z}{3}}), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$(14) P(X^2 - Y \geq 0) = \frac{1}{3}.$$

$$(15) \textcircled{1} \varphi_X(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi(y|x) = \begin{cases} \frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}, & x > 0, y > 0, x+y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi(y|x = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 24y(1-2y), & 0 < y < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



$$\textcircled{2} \varphi_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi(x|y) = \begin{cases} \frac{2(1-x-y)}{(1-y)^2}, & x > 0, y > 0, x+y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\varphi(x|y = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 8(\frac{1}{2} - x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(16) ①

		$X_2$	
		0	1
$X_1$	0	$1 - e^{-1}$	1
	1	$e^{-1} - e^{-2}$	$e^{-2}$

$$\textcircled{2} E(X_1 + X_2) = e^{-1} + e^{-2}.$$

第三章 随机变量的数字特征

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

一、一维随机变量的数字特征(见表 3-1)

表 3-1

	X 为离散型随机变量	X 为连续型随机变量
数学期望 (平均值) $E(X)$	(1) X 的分布 $\frac{X}{P} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{matrix},$ $E(X) = \sum_i x_i p_i$ (2) 随机变量函数 $Y = f(X)$ , $E(Y) = \sum_i f(x_i) p_i$ (绝对收敛)	(1) X 的密度函数 $\varphi(x)$ , $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx$ (2) 随机变量函数 $Y = f(X)$ , $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$ (绝对收敛)
	$E(X)$ 的性质 (1) $E(C) = C$ ( $C$ 为常数) (2) $E(CX) = CE(X)$ (3) $E(X + C) = E(X) + C$ (4) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ (5) 若 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 则 $E(XY) = (EX) \cdot (EY)$	
方差 $D(X)$	$D(X) \triangleq E(X - EX)^2 = E(X^2) - E^2(X)$	
	$D(X) = \sum_i (x_i - EX)^2 p(x_i)$	$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 \varphi(x) dx$
标准差 $\sqrt{D(X)}$	$D(X)$ 的性质 (1) $D(C) = 0$ ( $C$ 为常数) (2) $D(C + X) = D(X)$ (3) $D(CX) = C^2 D(X)$ (4) 若 $X$ 与 $Y$ 相互独立, 则 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$	

续表

	X 为离散型随机变量	X 为连续型随机变量
矩	<p>X 的 <math>k</math> 阶原点矩 <math>\nu_k</math> 为</p> $\nu_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i$ <p>X 的 <math>k</math> 阶中心矩 <math>\mu_k</math> 为</p> $\begin{aligned} \mu_k &= E(X - \nu_k)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \nu_k)^k p_i \end{aligned}$	<p>X 的 <math>k</math> 阶原点矩 <math>\nu_k</math> 为</p> $\nu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x) dx$ <p>X 的 <math>k</math> 阶中心矩 <math>\mu_k</math> 为</p> $\begin{aligned} \mu_k &= E(X - \nu_k)^k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \nu_k)^k \varphi(x) dx, \end{aligned}$ <p>其中, <math>\varphi(x)</math> 为密度函数</p>

**【例 3.1】** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, p)$ , 试求  $Y = a^X - 3$  的数学期望  $E(Y)$ , 其中  $a > 0$ .

**【分析】**  $Y$  为  $X$  的函数, 一般直接利用函数期望公式进行计算.

**【解】** 因  $X$  的分布律为

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n,$$

故

$$E(Y) = E(a^X - 3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n (a^k - 3) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (ap)^k (1-p)^{n-k} - 3 \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= [1 + (a-1)p]^n - 3. \end{aligned}$$

**注** 计算中用到了分布律的“归 1”性:  $\sum_i p_i = 1$  以及  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ .

**【例 3.2】** 已知连续型随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2x - 1},$$

则  $X$  的数学期望为  $E(X) =$  \_\_\_\_\_;  $X$  的方差  $D(X) =$  \_\_\_\_\_.

**【解】** 因为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}},$$

所以

$$E(X) = 1, \quad D(X) = \frac{1}{2}.$$

**注** 连续型随机变量的期望, 方差的计算常用公式计算, 但有时利用已有的重要分布的期望和方差进行计算能大为简化, 故应掌握几个重要分布的期望和方差.

## 二、二维随机变量的数字特征(表 3-2)

表 3-2

	(X,Y) 为离散型随机变量	(X,Y) 为连续型随机变量
已知二维随机变量(X,Y)的分布律或联合密度	<p>设(X,Y)的联合分布律为</p> $P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \dots)$ <p>则 <math>E(X) = \sum_i x_i p_{i\cdot}</math></p> $= \sum_i \sum_j x_i p_{ij}$ $E(Y) = \sum_j y_j p_{\cdot j}$ $= \sum_i \sum_j y_j p_{ij}$ $D(X) = \sum_i \sum_j [x_i - E(X)]^2 p_{ij}$ $D(Y) = \sum_i \sum_j [y_j - E(Y)]^2 p_{ij}$	<p>设(X,Y)的联合密度为 <math>\varphi(x,y)</math> 则</p> $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x,y) dx dy$ $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi_Y(y) dy$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(x,y) dx dy$ $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \varphi_X(x) dx$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \varphi(x,y) dx dy$ $D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - E(Y)]^2 \varphi_Y(y) dy$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - E(Y)]^2 \varphi(x,y) dx dy$
二维随机变量(X,Y)的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望	<p>设(X,Y)的联合分布律为</p> $P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \dots)$ <p>则 <math>E[g(X,Y)]</math></p> $= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$ <p>(级数绝对收敛)</p>	<p>设(X,Y)的联合密度为 <math>\varphi(x,y)</math> 则</p> $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \varphi(x,y) dx dy$ <p>(二重广义积分绝对收敛)</p>
协方差 $\text{cov}(X,Y)$	$\text{cov}(X,Y)$ $= E[(X-EX)(Y-EY)]$ $= E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$	<p>性质:</p> $(1) \text{cov}(X,X) = D(X)$ $(2) \text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$ $(3) \text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X,Y)$ $(4) \text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$
相关系数 $\rho_{XY}$	$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$ $= \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$	<p>性质:</p> $(1) -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ $(2) \text{若 } X, Y \text{ 相互独立, 则 } \rho_{XY} = 0$ $(3)  \rho  = 1 \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 以概率 1 线性相关, 即 } \exists \text{ 常数 } a, b \text{ 且 } a \neq 0, \text{ 使}$ $P\{X = aY + b\} = 1$
(X,Y) 的协方差矩阵	<p>(X,Y) 的协方差矩阵 <math>\triangleq \begin{pmatrix} c_{11} &amp; c_{12} \\ c_{21} &amp; c_{22} \end{pmatrix}</math></p> <p>其中, <math>c_{11} = E[(X-EX)^2]</math>    <math>c_{12} = E[(X-EX)(Y-EY)]</math>  <math>c_{21} = E[(Y-EY)(X-EX)]</math>    <math>c_{22} = E[(Y-EY)^2]</math></p>	

**【例 3.3】** 设随机变量  $X$  和  $Y$  在  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  上服从均匀分布.

(1)  $X$  与  $Y$  是否独立?

(2) 求  $X$  和  $Y$  的相关系数  $\rho(X,Y)$ .

【解】(1) 易知  $(X, Y)$  的联合密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是易得两个边缘密度为

$$\begin{aligned} \varphi_X(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}, & |x| < R; \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \varphi_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - y^2}, & |y| < R; \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

故有  $\varphi(x, y) \neq \varphi_X(x)\varphi_Y(y)$ , 即  $X$  与  $Y$  不独立.

(2) 因  $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$ ,  $\text{cov}(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$ ,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_X(x) dx = \int_{-R}^R x \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} dx = 0,$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_Y(y) dy = \int_{-R}^R y \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - y^2} dy = 0,$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x, y) dx dy = \iint_D xy \frac{1}{\pi R^2} dx dy = 0,$$

故  $\rho(X, Y) = 0$ , 即  $X$  与  $Y$  不相关.

注 从本例可以看出, 两个不相关的随机变量可以不独立, 但我们知道独立一定不相关.

### 三、几种重要的数学期望与方差 (表 3-3)

表 3-3

分布	分布律或概率密度	数学期望	方差
1. (0-1) 分布	$P(X = k) = p^k q^{1-k}, k = 0, 1$ $0 < p < 1, p + q = 1$	$p$	$pq$
2. 二项分布	$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$ $0 < p < 1, p + q = 1$	$np$	$npq$
3. 泊松分布	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$
4. 正态分布	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < +\infty, \sigma > 0$	$\mu$	$\sigma^2$
5. 均匀分布	$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

续表

分布	分布律或概率密度	数学期望	方差
6. 指数分布	$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda > 0), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;"><math>\lambda</math> 为参数</p>	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
7. 超几何分布	$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ <p style="text-align: center;"><math>0 \leq k \leq n \leq N, k \leq M</math></p>	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$
8. 几何分布	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ <p style="text-align: center;"><math>k = 1, 2, \dots, 0 &lt; p &lt; 1</math></p>	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

#### 四、重要公式与结论

$$1. D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y),$$

特别当  $X$  与  $Y$  独立时,  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ .

$$2. \text{cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

3.  $X$  与  $Y$  独立  $\Rightarrow \rho(X, Y) = 0$ , 即  $X$  与  $Y$  不相关, 但反过来不正确.

4. 若  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 则

$$X \text{ 与 } Y \text{ 独立} \Leftrightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 不相关}.$$

5. 求期望和方差时几个常用的公式:

$$(1) a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}, \quad (|q| < 1)$$

$$(2) a + 2aq + 3aq^2 + \dots + naq^{n-1} + \dots = \frac{a}{(1-q)^2}, \quad (|q| < 1)$$

$$(3) a + 2^2aq + 3^2aq^2 + \dots + n^2aq^{n-1} + \dots = \frac{a(1+q)}{(1-q)^3}, \quad (|q| < 1)$$

$$(4) 1 + \lambda + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \dots + \frac{1}{n!}\lambda^n + \dots = e^\lambda.$$

$$(5) \Gamma\text{-函数的性质: } \Gamma(\gamma+1) = \gamma\Gamma(\gamma), \text{ 其中, } \Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx, \quad (\gamma > 0)$$

$$(6) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

#### 题型一 求一维随机变量的数字特征

**提示** 这类题型主要是求期望和方差, 其常用方法有:

- 1° 为分布律或密度已知的情形, 直接按定义计算, 对由试验给出的随机变量, 先求分布, 再按定义计算;

2° 利用期望、方差的性质以及常见分布的期望和方差进行计算;

3° 对较复杂的随机变量,将其分解为简单随机变量进行计算.

**【例 3.4】** 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

求  $E(X)$  及  $D(X)$ .

**【解】**  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0,$

(因为  $\frac{1}{2}e^{-|x|}$  为偶函数,  $x \frac{1}{2}e^{-|x|}$  为奇函数, 由奇偶函数积分的性质, 所以  $E(X) = 0$ )

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2}e^{-|x|}dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \Big|_0^{+\infty} = 2. \end{aligned}$$

**【例 3.5】** 已知随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4 \end{cases}$

求  $E(X)$ ,  $D(X)$ .

**【解】** 随机变量  $X$  的分布密度为

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_0^4 \frac{x}{4}dx = \frac{x^2}{8} \Big|_0^4 = 2;$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2dx = \frac{1}{4} \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 = \frac{16}{3};$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}.$$

**【例 3.6】** 设从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗, 设在各交通岗遇到红灯的事件是相互

独立的, 其概率均为  $\frac{2}{5}$ , 试求途中遇到红灯次数的数学期望.

**【分析】** 因分布未给出, 因此须先由试验写出分布律, 然后再计算.

**【解】** 令  $X$  表示途中遇到的红灯次数, 于是

$$X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right).$$

即  $X$  的分布律为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

从而

$$E(X) = \sum_{k=0}^3 kP(X=k) = \frac{6}{5}.$$

当然,也可由二项分布的期望直接得到,即

$$E(X) = np = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.$$

**【例 3.7】**按规定某车站每天 8:00 ~ 9:00, 9:00 ~ 10:00 都恰有一辆客车到站,各车到站时刻是随机的,且各车到站的时间相互独立,其规律为

到站时间	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概 率	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

一旅客 8:20 到车站,求他候车时间的数学期望及方差.

**【解】**该旅客乘 9:10 的车,意味着 8:00 ~ 9:00 这趟车在 8:10 开走了.他候车时间为 50 min,对应的概率为“第一趟车 8:10 开走,第二趟车 9:10 开,两事件同时发生的概率”,即

$$P\{X = 50\} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

他候车 70 min, 90 min 对应的概率类似处理.于是候车时间的分布律为:

$X$	10	30	50	70	90
$P$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}$

$$\text{故 } E(X) = 10 \times \frac{2}{5} + 30 \times \frac{2}{5} + 50 \times \frac{1}{25} + 70 \times \frac{2}{25} + 90 \times \frac{2}{25} = 30.8(\text{min}),$$

$$E(X^2) = (10)^2 \times \frac{2}{5} + (30)^2 \times \frac{2}{5} + (50)^2 \times \frac{1}{25} + (70)^2 \times \frac{2}{25} + (90)^2 \times \frac{2}{25} = 1540,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1540 - (30.8)^2 = 591.36.$$

**【例 3.8】**对某目标进行射出,直到击中为止,如果每次命中率为  $p$ ,求射击次数的数学期望及方差.

**【解】**设射击次数为随机变量  $X$ ,其分布律为

$X$	1	2	3	...	$n$	...
$P$	$p$	$pq$	$pq^2$	...	$pq^{n-1}$	...

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 2 \times pq + 3 \times pq^2 + \cdots + n \times pq^{n-1} + \cdots \\ &= p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots) \stackrel{\text{由公式(2)}}{=} \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \quad (\text{因为 } 1-q=p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times p + 2^2 \times pq + 3^2 \times pq^2 + \cdots + n^2 pq^{n-1} + \cdots \\ &= p(1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \cdots + n^2 q^{n-1} + \cdots) \stackrel{\text{由公式(3)}}{=} p \cdot \frac{1+q}{(1-q)^3} = p \cdot \frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}, \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

**【例 3.9】**某人用  $n$  把钥匙去开门,只有一把能打开,今逐个任取一把试开,求打开此门所需开门



次数  $X$  的均值及方差, 假设(1) 打不开的钥匙不放回; (2) 打不开的钥匙仍放回.

【解】(1) 在打不开门的钥匙不放回的情况下, 所需开门次数  $X$  的可能值为  $1, 2, \dots, n$ , 注意到  $X = i$  意味着从第一次到第  $i-1$  次均未能打开, 第  $i$  次才打开, 于是随机变量  $X$  的分布律为

$X$	1	2	3	...	$n$
$P$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n+1}{2},$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{n} + 2^2 \times \frac{1}{n} + \dots + n^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} (n+1)(n-1).$$

(2) 由于试开不成功, 钥匙仍放回, 可知  $X$  可取值为  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  其分布律为

$X$	1	2	3	4	...	$i$	...
$p$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$	...	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \frac{1}{n}$	...

$$\begin{aligned} \text{故 } E(X) &= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 3 \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + i \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \frac{1}{n} + \dots \\ &= \frac{1}{n} \left[ 1 + 2 \frac{n-1}{n} + 3 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \dots + i \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} + \dots \right] \\ &\stackrel{\text{由公式(2)}}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{n} + 2^2 \times \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} + 3^2 \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + i^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \frac{1}{n} + \dots \\ &= \frac{1}{n} \left[ 1 + 2^2 \frac{n-1}{n} + 3^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \dots + i^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} + \dots \right] \\ &\stackrel{\text{由公式(3)}}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{n-1}{n}}{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^3} = n^2 \left(1 + \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n^2 \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) - n^2 = n(n-1).$$

【例 3.10】已知离散型随机变量  $X$  服从参数为 2 的泊松分布, 即  $P(X = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$ ,

$k = 0, 1, 2, \dots$ , 则随机变量  $Z = 3X - 2$  的数学期望  $E(Z) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】因为  $E(Z) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2$ , 而  $E(X) = 2$ ,

所以  $E(Z) = 3 \times 2 - 2 = 4$ .

● 直接利用已知的泊松分布的期望计算.

**【例 3.11】** 设某人先写了  $n$  封投向不同地址的信, 再写  $n$  个标有这  $n$  个地址的信封, 然后在每个信封内随意装入一封信, 试求信与地址配对的个数的数学期望与方差.

**【分析】** 本题是一个“配对问题”, 若用先求分布再按定义计算的方法将是非常麻烦的, 下面将用数学期望性质来做. 其重要技巧是将一个较复杂的随机变量转化成简单随机变量的和.

**【解】** 设  $X$  表示配对的个数,  $X_i$  定义如下

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 封信配对} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

于是有 
$$X = \sum_{i=1}^n X_i, P(X_i = 1) = \frac{1}{n}, P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

因为 
$$E(X_i) = 1 \times \frac{1}{n} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

故 
$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = 1.$$

下面我们来求方差. 求方差时一定要注意的是  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  之间没有独立性, 因而不能认为有  $D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$ .

因为  $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ , 而

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_i X_j), \\ E(X_i^2) &= 1^2 \times \frac{1}{n} + 0^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

因为随机变量  $X_i X_j (i \neq j)$  的可能取值为 1 和 0, 且

$$P(X_i X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}, P(X_i X_j = 0) = 1 - \frac{1}{n(n-1)},$$

故有 
$$E(X_i X_j) = 1 \times \frac{1}{n(n-1)} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

于是 
$$E(X^2) = n \times \frac{1}{n} + 2C_n^2 \times \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

所以 
$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

**【例 3.12】** 某流水作业线上生产出的每个产品为不合格的概率是  $p$ , 当生产出  $k$  个不合格品时, 即停工检修一次, 试求在两次检修之间所生产的产品总数的数学期望和方差.

**【解】** 设  $X$  表示两次检修之间生产的产品数,  $X_i$  表示生产出第  $i-1$  个不合格品后至出现第  $i$  个

不合格品时所生产的产品数, 则有  $X = \sum_{i=1}^k X_i, X_1, X_2, \dots, X_k$  独立同分布服从几何分布:

$$P(X_i = j) = (1-p)^{j-1} p, j = 1, 2, \dots.$$

因为  $E(X_i) = \frac{1}{p}, D(X_i) = \frac{1-p}{p^2}, (i = 1, 2, \dots, k)$ . 故

$$E(X) = \sum_{i=1}^k E(X_i) = \frac{k}{p},$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^k D(X_i) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

## 题型二 求一维随机变量函数的数学期望

**提示** 求随机变量函数的期望一般不需先求出随机变量函数的分布,再按定义计算,而是直接

用函数期望公式进行计算:  $E(Y) = \sum_i g(x_i)p_i$  或  $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi_X(x)dx$ , 这里  $Y = g(X)$ . 另外要注意随机变量函数的方差或其矩本质上就是函数的期望.

**【例 3.13】** 设随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

求: (1)  $E(-X+1)$ ,  $D(-X+1)$ ; (2)  $E(X^2)$ ,  $D(X^2)$ .

**【解】**

$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$X$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$-X+1$	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1
$X^2$	1	0	$\frac{1}{4}$	1	4

$$(1) E(-X+1) = 2 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{12} + (-1) \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

$$D(-X+1) = DX = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) \times 1 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 4 - \left[\frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2\right]^2 = \frac{97}{72}.$$

$$(2) E(X^2) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{35}{24}.$$

$$D(X^2) = \left(\frac{5}{12} \times 1 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times 16\right) - \left(\frac{35}{24}\right)^2 = \frac{1325}{576}.$$

**【例 3.14】** 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的指数分布, 则数学期望  $E(X + e^{-2X}) =$  \_\_\_\_\_.

**【解】** 由题设可知  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(X + e^{-2X}) = E(X) + E(e^{-2X})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x}\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \frac{4}{3}.$$

**【例 3.15】** 假设公共汽车起点站于每时的 10 分, 30 分, 50 分发车, 某乘客不知发车的时间, 在每小时内任一时刻到达车站是随机的, 求乘客到车站等车时间的数学期望.

**【解】** 由于乘客在每小时内任一时刻到达车站是随机的, 因此可以认为乘客到达车站的时刻  $X$  为  $[0, 60]$  中的均匀分布, 于是其概率密度为

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & 0 < t \leq 60 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

显然, 乘客等候时间  $Y$  是其到达时刻  $X$  的函数, 可用如下公式表示:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 10 - X, & 0 < X \leq 10 \\ 30 - X, & 10 < X \leq 30 \\ 50 - X, & 30 < X \leq 50 \\ 60 - X + 10, & 50 < X \leq 60 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \varphi(t) dt \\ &= \int_0^{10} (10 - t) \cdot \frac{1}{60} dt + \int_{10}^{30} (30 - t) \frac{1}{60} dt + \int_{30}^{50} (50 - t) \frac{1}{60} dt + \int_{50}^{60} (70 - t) \frac{1}{60} dt \\ &= \frac{1}{60} [(100 - 50) + (600 - 400) + (1000 - 800) + (700 - 550)] = \frac{25}{3}. \end{aligned}$$

**【例 3.16】** 对圆的直径作近似测量, 设其值均匀地分布在区间  $[a, b]$  内, 求圆面积的数学期望.

**【解】** 设圆的直径为随机变量  $X$ , 面积为随机变量  $Y$ , 则

$$Y = f(X) = \frac{\pi}{4} X^2.$$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的概率密度为 } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\text{于是 } E(Y) = E(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_a^b \frac{\pi}{4} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{\pi}{12} (b^2 + ab + a^2).$$

**【例 3.17】** 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求随机变量  $Y = f(X) = X^2$  的方差  $D(Y)$ .

$$\text{【解】 } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - 2;$$

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \varphi(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx$$

$$= (x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x \cos x + 24 \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24,$$

$$D(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2 = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 - \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - 2 \right]^2 = 20 - 2\pi^2.$$

**【例 3.18】** 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

已知  $E(X) = 0.5, D(X) = 0.15$ , 求系数  $a, b, c$ .

【解】因为  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ , 所以  $\int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = 1$ . 于是

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 1. \quad (1)$$

又  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx = \int_0^1 x(ax^2 + bx + c) dx,$

故  $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = 0.5. \quad (2)$

再  $D(X) = EX^2 - (EX)^2, \quad 0.15 = EX^2 - 0.5^2,$

$$\Rightarrow EX^2 = 0.4 = \int_0^1 x^2(ax^2 + bx + c) dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = 0.4. \quad (3)$$

解方程组 (1), (2), (3) 得  $a = 12, b = -12, c = 3$ .

【注】已知数字特征可反求未知参数, 但要注意密度函数的隐含性质  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ .

### 题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征

【提示】二维随机变量  $(X, Y)$  的数字特征主要指  $E(X), E(Y), D(X), D(Y), \text{cov}(X, Y), \rho(X, Y)$ , 故只要已知  $(X, Y)$  的联合分布律或联合密度, 均可按相应的公式求出其函数的数字特征, 主要是期望  $E[g(X, Y)]$ , 其他的, 如方差, 协方差等均可转化为函数的期望, 故重点掌握函数期望的计算公式:

$$E[g(X, Y)] = \sum_j \sum_i g(x_i, y_j) p_{ij}, (P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}),$$

或  $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, [(X, Y) \sim f(x, y)].$

【例 3.19】设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(x + y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 系数  $A$ ; (2)  $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$ ; (3)  $\rho(X, Y)$ .

【解】(1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ , 即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin(x + y) dx dy = 1,$$

可得

$$A = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{1}{2} \sin(x + y) dx dy = \frac{\pi}{4},$$

$$E(X^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(x + y) dx dy = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

$$\text{类似可得} \quad E(Y) = \frac{\pi}{4}, \quad D(Y) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

(3) 由  $E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \cdot \frac{1}{2} \sin(x+y) dx dy = \frac{\pi}{2} - 1$ , 故协方差为

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1.$$

从而

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2}} = \frac{8\pi - \pi^2 - 16}{\pi^2 + 8\pi - 32}.$$

**【例 3.20】** 设  $(X,Y)$  服从在  $A$  上的均匀分布, 其中  $A$  为  $x$  轴、 $y$  轴及直线  $x + \frac{y}{2} = 1$  所围成的三角形区域, 求  $X, Y, XY$  的数学期望及方差.

**【解】** 如图 3-1 所示, 二维随机变量  $(X,Y)$  的联合概率密度为

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) dy = \begin{cases} 2-2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) dx = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

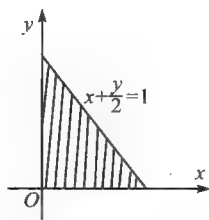


图 3-1

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_X(x) dx = \int_0^1 x(2-2x) dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi_X(x) dx = \int_0^1 x^2(2-2x) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \int_0^2 y\left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3\right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2\left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{8}y^4\right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3},$$

$$D(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x,y) dx dy = \iint_A xy dx dy \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{2-2x} y dy = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}(2-2x)^2 dx = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$E(X^2Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2y^2\varphi(x,y) dx dy = \iint_A x^2y^2 dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2-2x} y^2 dy = \int_0^1 x^2 \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{2-2x} dx \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx \\
 &= \frac{8}{3} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{45},
 \end{aligned}$$

$$D(XY) = E(X^2 Y^2) - [E(XY)]^2 = \frac{2}{45} - \frac{1}{36} = \frac{1}{60}.$$

**注** 二维随机变量的两个分量的期望、方差也可通过先计算两个边缘密度再按定义计算,这与利用联合密度直接计算本质上是一样的。

**【例 3.21】** 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立,且  $X \sim N(1, 2), Y \sim N(0, 1)$ , 试求  $Z = 2X - Y + 3$  的概率密度。

**【解】** 因为相互独立正态随机变量的线性组合仍为正态分布,所以只需确定  $Z$  的期望  $E(Z)$  和方差  $D(Z)$  即可求出  $Z$  的密度函数。

$$\text{因为 } E(Z) = E(2X - Y + 3) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 \times 1 - 0 + 3 = 5,$$

$$D(Z) = D(2X - Y + 3) \xrightarrow{\text{因为 } X \text{ 与 } Y \text{ 独立}} 2^2 D(X) + D(Y) = 2^2 \times 2 + 1 = 9,$$

$$\text{所以 } \varphi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(z-E(Z))^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}.$$

**【例 3.22】** 设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D: 0 < x < 1, |y| < x$  内服从均匀分布(如图 3-2 所示), 求:

(1) 关于  $X$  的边缘概率密度; (2)  $Z = 2X + 1$  的方差  $D(Z)$ 。

**【解】**  $(X, Y)$  的分布密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 (1) \varphi_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy \\
 &= \int_{-x}^x 1 dy = 2x, \quad 0 < x < 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) D(Z) &= D(2X + 1) = 2^2 D(X) = 4[E(X^2) - (EX)^2] \\
 &= 4 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_X(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_X(x) dx \right)^2 \right] \\
 &= 4 \left[ \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left( \int_0^1 x \cdot 2x dx \right)^2 \right] \\
 &= 4 \left[ \frac{1}{2} x^4 - \left( \frac{2}{3} x^3 \right)^2 \right]_0^1 \\
 &= 4 \left( \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{9} x^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{9}.
 \end{aligned}$$

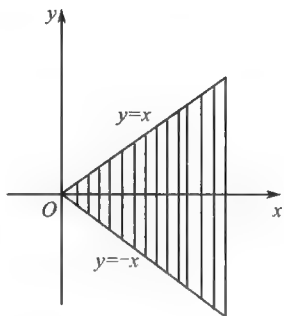


图 3-2

**【例 3.23】** 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,且  $X \sim N(0, \sigma^2), Y \sim N(0, \sigma^2)$ , 求  $E(\sqrt{X^2 + Y^2}), D(\sqrt{X^2 + Y^2})$ 。

**【解】** 由题设可知  $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \varphi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}.$

又由于  $X$  与  $Y$  相互独立,所以  $(X, Y)$  的密度为

$$\varphi(x, y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } E(\sqrt{X^2+Y^2}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+y^2} \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+y^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy \\ &\stackrel{\text{化为极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho \\ &= - \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) = - \left(\rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho \\ &\stackrel{\text{令 } \frac{\rho}{\sqrt{2}\sigma} = u}{=} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du = \sqrt{2}\sigma \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\sqrt{X^2+Y^2}) &= E[(\sqrt{X^2+Y^2})^2] - [E(\sqrt{X^2+Y^2})]^2 \\ &= E(X^2+Y^2) - \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma\right)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \rho^2 \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho - \left(\frac{\pi\sigma^2}{2}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\pi\sigma^2}{2} = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

**【例 3.24】** 设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合分布在以点  $(0,1), (1,0), (1,1)$  为顶点的三角形区域上服从均匀分布(如图 3-3 所示), 试求随机变量  $U = X+Y$  的方差.

**【分析】** 这是一个求二维随机变量(或叫两个随机变量)的函数  $U = X+Y$  的方差问题, 因为已知联合密度, 故最简单的做法是直接利用函数期望公式计算. 为了比较还另给出了两种解法.

**【解法一】** 三角形区域

$$G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \geq 1\}$$

于是  $X$  与  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) \\ &= \iint_G 2(x+y)^2 dx dy - \left[\iint_G 2(x+y) dx dy\right]^2 \\ &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 2(x+y)^2 dy\right) dx - \left[\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 2(x+y) dy\right) dx\right]^2 \\ &= \frac{11}{6} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

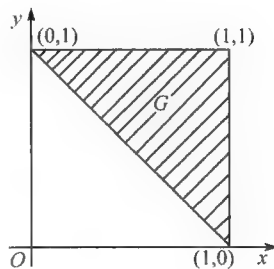


图 3-3

**【解法二】** 三角形区域为  $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \geq 1\}$ ; 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{若 } (x, y) \in G \\ 0, & \text{若 } (x, y) \notin G \end{cases}.$$



以  $f_1(x)$  表示  $X$  的概率密度, 则当  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$  时,  $f_1(x) = 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{1-x}^1 2 dy = 2x.$$

因此 
$$E(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}; \quad E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2};$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

同理可得  $E(Y) = \frac{2}{3}; \quad D(Y) = \frac{1}{18}.$

现在求  $X$  和  $Y$  的协方差.

$$E(XY) = \iint_G 2xy dx dy = 2 \int_0^1 x dx \int_{1-x}^1 y dy = \frac{5}{12};$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{36}.$$

于是

$$\begin{aligned} D(U) &= D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{2}{36} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

**【解法三】** 三角形区域为  $G = \{x, y: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, X+Y \geq 1\}$ ; 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{若 } (x, y) \in G \\ 0, & \text{若 } (x, y) \notin G \end{cases}.$$

以  $f(u)$  表示  $U = X+Y$  的概率密度, 当  $u < 1$  或  $u > 2$  时, 显然  $f(u) = 0$ .

设  $1 \leq u \leq 2$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  且  $0 \leq u-x \leq 1$  时,  $f(x, u-x) = 2$ , 否则  $f(x, u-x) = 0$ .

由随机变量之和的概率密度公式有

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x) dx = \int_{u-1}^1 2 dx = 2(2-u).$$

因此 
$$E(X+Y) = E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u) du = 2 \int_1^2 u(2-u) du = \frac{4}{3};$$

$$E(X+Y)^2 = E(U^2) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du = 2 \int_1^2 u^2(2-u) du = \frac{11}{6};$$

$$DU = D(X+Y) = E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2 = \frac{11}{6} - \frac{16}{9} = \frac{1}{18}.$$

**【例 3.25】** 设  $X_1$  与  $X_2$  相互独立, 且服从相同的分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 试证明

$$E[\max(X_1, X_2)] = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

**【分析】** 本题仍是一个二维随机变量函数的数学期望问题, 可按其公式计算. 我们给出两种不同解法, 其中解法一的积分技巧是较强的, 而解法二的技巧在于作恰当的变换.

**【解法一】** 由随机变量函数的数学期望公式, 有

$$E[\max(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) f(x, y) dx dy,$$

其中,  $f(x, y) = f_{X_1}(x)f_{X_2}(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$

于是

$$\begin{aligned}
 E[\max(X_1, X_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x xf(x, y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} yf(x, y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x (x - \mu) f(x, y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} (y - \mu) f(x, y) dy + \mu \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} (x - \mu) f(x, y) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} (x - \mu) f(y, x) dx + \mu \\
 &= \mu + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} (x - \mu) f(x, y) dx \\
 &= \mu + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \int_y^{+\infty} (x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \mu + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}} dy = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{利用概率积分}).
 \end{aligned}$$

【解法二】设  $Y_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}, Y_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}$ ,

则  $Y_1$  与  $Y_2$  独立同服从  $N(0, 1)$ , 而

$$\max(X_1, X_2) = \max(\mu + \sigma Y_1, \mu + \sigma Y_2) = \mu + \sigma \max(Y_1, Y_2).$$

$$\text{又因为} \quad \max(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + |Y_1 - Y_2|),$$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad E[\max(Y_1, Y_2)] &= \frac{1}{2}[E(Y_1) + E(Y_2) + E(|Y_1 - Y_2|)] \\
 &= \frac{1}{2}E(|Y_1 - Y_2|).
 \end{aligned}$$

因为  $Y_1 - Y_2 \sim N(0, 2)$ , 做

$$E(|Y_1 - Y_2|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{4}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{4}} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

所以有

$$\begin{aligned}
 E[\max(X_1, X_2)] &= E[\mu + \sigma \max(Y_1, Y_2)] = \mu + \sigma E[\max(Y_1, Y_2)] \\
 &= \mu + \sigma \cdot \frac{1}{2} E(|Y_1 - Y_2|) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.
 \end{aligned}$$

【例 3.26】设随机变量  $X \sim N(0, \sigma^2), Y \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $X$  与  $Y$  相互独立, 又设  $\zeta = \alpha X + \beta Y$ ,  $\eta = \alpha X - \beta Y$ , ( $\alpha, \beta$  为不相等常数), 求:

(1)  $E(\zeta), E(\eta), D(\zeta), D(\eta), \rho_{\zeta\eta}$ ;

(2) 问当  $\alpha$  与  $\beta$  满足什么关系时,  $\zeta, \eta$  不相关.

【解】(1)  $E(\zeta) = E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$ .

$$E(\eta) = E(\alpha X - \beta Y) = \alpha E(X) - \beta E(Y) = \alpha \times 0 - \beta \times 0 = 0.$$

$$D(\zeta) = D(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2.$$

$$\text{同样 } D(\eta) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2.$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{\zeta\eta} &= \frac{E(\zeta\eta) - E(\zeta)E(\eta)}{\sqrt{D(\zeta)}\sqrt{D(\eta)}} = \frac{E(\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2) - 0}{\sqrt{D(\zeta)}\sqrt{D(\eta)}} \\
 &= \frac{\alpha^2 [E(X^2) - (E(X))^2] - \beta^2 [E(Y^2) - (E(Y))^2]}{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2} \\
 &= \frac{\alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y)}{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2} = \frac{\alpha^2 \sigma^2 - \beta^2 \sigma^2}{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.
 \end{aligned}$$

(2) 当  $\rho_{\xi\eta} = 0$  时, 即  $|\alpha| = |\beta|$  时,  $\xi$  与  $\eta$  不相关.

【例 3.27】设  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 判别  $X, Y$  是否相互独立, 是否相关; (2) 求  $E(XY), D(X+Y)$ .

【解】(1)  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘密度:

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 (2 - x - y) dy = \frac{3}{2} - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$(X, Y)$  关于  $Y$  的边缘密度

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 (2 - x - y) dx = \frac{3}{2} - y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{因为 } \varphi_X(x)\varphi_Y(y) = \begin{cases} (\frac{3}{2} - x)(\frac{3}{2} - y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \neq \varphi(x, y)$$

所以  $X, Y$  不相互独立.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_X(x) dx = \int_0^1 x(\frac{3}{2} - x) dx = \frac{5}{12},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_Y(y) dy = \int_0^1 y(\frac{3}{2} - y) dy = \frac{5}{12},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(2 - x - y) dy = \frac{1}{6}.$$

$$\text{因为 } \rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\frac{1}{6} - (\frac{5}{12})^2}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \neq 0. \text{ 所以 } X \text{ 与 } Y \text{ 相关.}$$

$$(2) E(XY) = \frac{1}{6}.$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$$

$$= D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)].$$

$$\text{因为 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^1 x^2(\frac{3}{2} - x) dx - (\frac{5}{12})^2 = \frac{11}{144}, D(Y) = \frac{11}{144},$$

$$\text{所以 } D(X+Y) = \frac{11}{144} + \frac{11}{144} + 2\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}\right) = \frac{5}{36}.$$

【例 3.28】如果  $X$  与  $Y$  满足  $D(X+Y) = D(X-Y)$ , 则必有

(A)  $X$  与  $Y$  独立.

(B)  $X$  与  $Y$  不相关.

(C)  $D(Y) = 0$ .

(D)  $D(X) \cdot D(Y) = 0$ .

【 】

【解】因为  $D(X+Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y)$ ,

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{cov}(X, Y),$$

又由题设  $D(X+Y) = D(X-Y)$ , 所以  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0,$$

故  $X$  与  $Y$  不相关, 即选(B).

**【例 3.29】** 将一枚硬币重复掷  $n$  次, 以  $X$  和  $Y$  分别表示正面向上和反面向上的次数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数等于

- (A)  $-1$ . (B)  $0$ . (C)  $\frac{1}{2}$ . (D)  $1$ . 【    】

**【解】** 因为  $X+Y=n$ , 即  $Y=-X+n$ , 故  $X$  与  $Y$  之间有严格的线性关系, 且为负相关, 所以  $\rho(X, Y)=-1$ , 即选(A).

**【注】** 本题也可利用相关系数公式计算得到:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= \operatorname{cov}(X, n-X) = \operatorname{cov}(X, n) - \operatorname{cov}(X, X) \\ &= -\operatorname{cov}(X, X) = -D(X), D(Y) = D(X),\end{aligned}$$

故

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = -\frac{D(X)}{D(X)} = -1.$$

#### 题型四 有关数字特征的证明题

**【提示】** 一般利用相应数字特征的性质和定义不难得证明.

**【例 3.30】** 设  $A, B$  是二随机事件, 随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 出现} \\ -1, & \text{否则} \end{cases}; \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 出现} \\ -1, & \text{否则} \end{cases}.$$

试证明  $X$  和  $Y$  不相关的充要条件是  $A$  与  $B$  相互独立.

**【证明】** 由数学期望和函数期望计算公式有

$$\begin{aligned}E(X) &= P(A) - P(\bar{A}) = 2P(A) - 1, E(Y) = P(B) - P(\bar{B}) = 2P(B) - 1, \\ E(XY) &= P(AB) - P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) \\ &= P(AB) - [P(A) - P(AB)] - [P(B) - P(AB)] + [1 - P(A) - P(B) + P(AB)] \\ &= 4P(AB) - 2P(A) - 2P(B) + 1.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= 4P(AB) - 4P(A)P(B).\end{aligned}$$

故  $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$  当且仅当  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 即  $X$  与  $Y$  不相关的充要条件为  $A$  与  $B$  相互独立.

**【例 3.31】** 设随机变量  $X$  在区间  $[a, b]$  中取值, 证明:

$$(1) a \leq E(X) \leq b; \quad (2) D(X) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

**【证】** (1) 因为  $a \leq X \leq b$ , 所以  $E(a) \leq E(X) \leq E(b)$ , 即  $a \leq E(X) \leq b$ .

$$\begin{aligned}(2) \text{ 因为 } E[(X-x)^2] &= E(X^2) - 2xE(X) + x^2 \\ &= [x - E(X)]^2 + E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= [x - E(X)]^2 + D(X).\end{aligned}$$

所以当  $x = E(x)$  时,  $E[(X-x)^2]$  取最小值  $D(X)$ .

于是, 当  $x = \frac{a+b}{2}$  时, 有

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} \leq E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leq E\left[\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

【例 3.32】设  $\varphi(x)$  是正值非减函数,  $X$  是连续型随机变量, 且  $E[\varphi(X)]$  存在, 证明:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}.$$

【证】设  $X$  的概率密度为  $f(x)$ , 由题设有  $X \geq a \Leftrightarrow \varphi(X) \geq \varphi(a)$ .

$$\begin{aligned} \text{于是 } P\{X \geq a\} &= P\{\varphi(X) \geq \varphi(a)\} = \int_{\varphi(x) \geq \varphi(a)} f(x) dx \\ &\leq \int_{\varphi(x) \geq \varphi(a)} \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\varphi(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx = \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}. \end{aligned}$$

### 题型五 数字特征在经济中的应用

**提示** 有关数字特征的应用题主要是随机变量函数的数学期望, 求解这类问题的关键是找出函数关系.

【例 3.33】假设由自动线加工的某种零件的内径  $Z(\text{mm})$  服从正态分布  $N(\mu, 1)$ , 内径小于 10 或大于 12 的为不合格品, 其余为合格品, 销售每件合格品获利, 销售每件不合格的亏损, 已知销售利润  $T$  (单位: 元) 与销售零件的内径  $Z$  有如下关系:

$$T = \begin{cases} -1, & \text{若 } Z < 10 \\ 20, & \text{若 } 10 \leq Z \leq 12, \\ -5, & \text{若 } Z > 12 \end{cases}$$

问平均内径  $\mu$  取何值时, 销售一个零件的平均利润最大?

【解】平均利润就是销售利润  $T$  的数学期望, 即  $E(T)$ . 由题设可知平均利润为

$$\begin{aligned} E(T) &= 20P\{10 \leq Z \leq 12\} - P\{Z < 10\} - 5P\{Z > 12\} \\ &= 20[\Phi(12 - \mu) - \Phi(10 - \mu)] - \Phi(10 - \mu) - 5[1 - \Phi(12 - \mu)] \\ &= 25\Phi(12 - \mu) - 21\Phi(10 - \mu) - 5, \end{aligned}$$

其中,  $\Phi(x)$  是标准正态分布函数, 设  $\varphi(x)$  为标准正态密度, 则

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = -25\varphi(12 - \mu) + 21\varphi(10 - \mu).$$

$$\text{令 } \frac{dE(T)}{d\mu} = 0, \text{ 得 } \frac{-25}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} + \frac{21}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} = 0.$$

$$\Rightarrow 25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = 21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} \Rightarrow \mu = \mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{25}{21}.$$

由题意知, 当  $\mu = \mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{25}{21}$  时, 平均利润最大.

【例 3.34】设某产品每周需求量  $Q$  取 1, 2, 3, 4, 5 为值, 是等可能的, 生产每件产品的成本为  $C_1 = 3$  元; 每件产品的售价为  $C_2 = 9$  元; 没售出的产品以每件  $C_3 = 1$  元的费用存入仓库, 问生产者每周生产多少件产品能使所期望的利润最大.

【解】设每周产量为  $N$ , 显然  $N$  不应大于 5, 每周利润为需求量  $Q$  的函数, 即有下列函数关系:

$$T = \begin{cases} (C_2 - C_1)N, & \text{若 } Q > N \\ C_2Q - C_1N - C_3(N - Q), & \text{若 } Q \leq N \end{cases} = \begin{cases} 6N, & \text{若 } Q > N, \\ 10Q - 4N, & \text{若 } Q \leq N. \end{cases}$$

利润的期望值

$$E(T) = 6NP\{Q > N\} + (10Q - 4N)P\{Q \leq N\}.$$

由于需求量  $Q$  是等可能地取值  $1, 2, 3, 4, 5$ , 所以取各值的概率为  $\frac{1}{5}$ , 于是

$$\begin{aligned} E(T) &= 6N \sum_{n=N+1}^5 \frac{1}{5} + 10 \sum_{n=1}^N n \cdot \frac{1}{5} - 4N \sum_{n=1}^N \frac{1}{5} \\ &= \frac{6}{5}N(5-N) + 2 \cdot \frac{1+N}{2} \cdot N - \frac{4}{5}N^2 = 7N - N^2. \end{aligned}$$

令  $\frac{d}{dN}E(T) = 7 - 2N = 0$ , 得  $N = 3.5$ .

因为  $\left. \frac{d^2}{dN^2}E(T) \right|_{N=3.5} = -2 < 0$ , 所以当  $N = 3.5$  时所期望的利润达到最大值, 由于需求量

$Q$  与生产量  $N$  应取正整数, 所以应取  $N = 3$  或  $N = 4$ . 此时利润的最大期望值为 12 元.

**【例 3.35】**按节气出售的某种节令商品, 每售出 1 kg 可获利  $a$  元, 过了节气处理剩余的这种商品, 每售出 1 kg 净亏损  $b$  元. 设某店在季度内这种商品的销量  $X$  是一随机变量,  $X$  在区间  $(t_1, t_2)$  内服从均匀分布. 为使商店所获利润的数学期望最大, 问该店应进多少货?

**【解】**设  $t$  (单位: kg) 表示进货数,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , 进货  $t$  所获利润记为  $Y$ , 则  $Y$  是随机变量  $X$  的函数, 其函数关系为

$$Y = \begin{cases} aX - (t - X)b, & t_1 < X \leq t \\ at, & t < X < t_2 \end{cases}.$$

$X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{t_2 - t_1}, & t_1 < x < t_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{t_1}^t [ax - (t - x)b] \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} dx + \int_t^{t_2} at \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} dx \\ &= \frac{\left[ -\frac{a+b}{2}t^2 + (bt_1 + at_2)t - \frac{a+b}{2}t_1^2 \right]}{t_2 - t_1}. \end{aligned}$$

令  $\frac{d}{dt}E(Y) = \frac{[-(a+b)t + at_2 + bt_1]}{t_2 - t_1} = 0$ ,

得驻点  $t = \frac{at_2 + bt_1}{a+b}$ . 由此可知, 该店应进  $\frac{at_2 + bt_1}{a+b}$  kg 商品, 才可使利润的数学期望最大.

**【例 3.36】**设某种商品每周的需求量  $X$  是一随机变量, 服从区间  $[10, 30]$  上的均匀分布, 而经销商商店进货数量为区间  $[10, 30]$  中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元; 若供大于求, 则削价处理, 每处理 1 单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每 1 单位商品仅获 300 元, 为使商店所获利润期望值不少于 9280 元, 试确定最少进货量.

**【解】**设进货数量为  $a$ , 则利润  $L$  为随机变量  $X$  的函数:

$$L = \begin{cases} 500a + (X - a)300, & a < X \leq 30 \\ 500X - (a - X)100, & 10 \leq X \leq a \end{cases} = \begin{cases} 300X + 200a, & a < X \leq 30, \\ 600X - 100a, & 10 \leq X \leq a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(L) &= \int_{10}^{30} \frac{1}{20} L dx = \frac{1}{20} \int_{10}^a (600x - 100a) dx + \frac{1}{20} \int_a^{30} (300x + 200a) dx \\ &= \frac{1}{20} \left( 600 \times \frac{x^2}{2} - 100ax \right) \Big|_{10}^a + \frac{1}{20} \left( 300 \times \frac{x^2}{2} + 200ax \right) \Big|_a^{30} \\ &= -7.5a^2 + 350a + 5250 \geq 9280. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 7.5a^2 - 350a + 4030 \leq 0 \Rightarrow \frac{62}{3} \leq a \leq 26.$$

故利润期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

**【例 3.37】**一商店经销某种商品,每周进货数量  $X$  与顾客对该种商品的需求量  $Y$  是相互独立的随机变量,且都服从区间  $[10, 20]$  上的均匀分布(见图 3-4),商店每售出一单位商品可得利润 1000 元;若需求量超过了进货量,商店可以从其他商店调剂供应,这时每单位商品获利润 500 元.试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

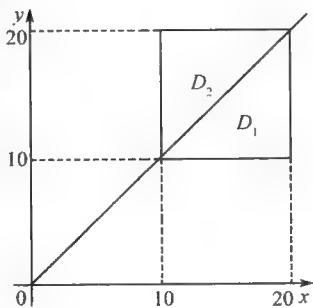


图 3-4

**【解】** 
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq y \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

设  $Z$  表示商店每周所得的利润,则

$$Z = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X \\ 1000X + 500(Y - X) = 500(X + Y), & Y > X \end{cases}$$

由于  $X$  与  $Y$  相互独立,所以  $X, Y$  的联合密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \iint_{D_1} 1000y \times \frac{1}{100} dx dy + \iint_{D_2} 500(x + y) \times \frac{1}{100} dx dy \\ &= 10 \int_{10}^{20} dx \int_{10}^x y dy + 5 \int_{10}^{20} dy \int_{10}^y (x + y) dx \\ &= 10 \int_{10}^{20} \frac{1}{2} (x^2 - 100) dx + 5 \int_{10}^{20} \left( \frac{3}{2} y^2 - 10y - 50 \right) dy \\ &= \frac{20000}{3} + 5 \times 1500 \approx 14166.67 (\text{元}). \end{aligned}$$

从上面几个例题可以看出,求解这类题型首先要正确写出随机变量之间的函数关系,其次要弄清楚哪个是随机变量,哪个是确定性的参变量.

## 第 3 节 思维定势与综合题解析

## 一、思维定势

**思维定势** 涉及  $n$  次试验中某事件发生的次数  $X$  的数字特征的问题, 马上要联想到对  $X$  作 (0-1) 分析.

即令  $X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 次不发生} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次发生} \end{cases}$ , 则  $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ .

**【例 3.38】** 设事件  $A$  在第  $i$  次试验中出现的概率为  $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ ,  $X$  表示  $n$  次独立试验中  $A$  出现的次数, 求  $E(X), D(X)$ .

**【解】** 令  $X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 次试验 } A \text{ 不出现} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 次试验 } A \text{ 出现} \end{cases}$ ,

则  $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ .

因为  $P\{X_i = 1\} = P(A) = p_i$ ,

$$P\{X_i = 0\} = P(\bar{A}) = 1 - p_i = q_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

所以  $E(X_i) = p_i$ ,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i.$$

$$\begin{aligned} D(X_i) &= E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 \\ &= 1^2 p_i + 0 \cdot q_i - p_i^2 = p_i q_i, \end{aligned}$$

又  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  相互独立.

$$\text{故 } D(X) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$

## 二、综合题解析

**【例 3.39】** 今有两封信欲投入编号为 I, II, III 的 3 个邮筒, 设  $X, Y$  分别表示投入第 I 号和第 II 号邮筒的信的数目. (1) 求  $(X, Y)$  的联合分布; (2)  $X$  与  $Y$  是否独立; (3) 令  $U = \max(X, Y), V = \min(X, Y)$ , 求  $E(U)$  和  $E(V)$ .

**【解】** (1) 由题设可知,  $X, Y$  的可取值为 0, 1, 2.

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{\text{两封信均投入第 III 邮筒}\} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} P\{X = 1, Y = 0\} &= P\{\text{两封信中有一封投入第 I 号筒, 另一封投入第 III 号筒}\} \\ &= \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{3^2} = \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{3^2} = \frac{2}{9},$$



$$P\{X=2, Y=0\} = \frac{C_2^2}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{同理可求得 } P\{X=0, Y=1\} = \frac{2}{9}, P\{X=0, Y=2\} = \frac{1}{9}, P\{X=1, Y=2\} = 0,$$

$$P\{X=2, Y=1\} = 0, P\{X=2, Y=2\} = 0.$$

由以上结果可得  $(X, Y)$  的分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

(2)  $X, Y$  的边缘分布律

$X$	0	1	2
$p_{i \cdot}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$Y$	0	1	2
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\text{因为 } P\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{9} \neq P\{X=0\} \cdot P\{Y=0\} = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9},$$

所以  $X, Y$  不独立.

(3)  $U = \max\{X, Y\}$  的可能取值为 0, 1, 2.

$$P\{U=0\} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{9},$$

$$P\{U=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$P\{U=2\} = P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=0\} +$$

$$P\{X=2, Y=1\} = \frac{2}{9},$$

$$\text{所以 } E(U) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{10}{9}.$$

$V = \min\{X, Y\}$  的可能取值 0, 1, 2.

$$P\{V=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=0, Y=2\} +$$

$$P\{X=2, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} = \frac{7}{9},$$

$$P\{V=1\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=1\} = \frac{2}{9},$$

$$P\{V=2\} = P\{X=2, Y=2\} = 0,$$

$$\text{所以 } E(V) = 0 \times \frac{7}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times 0 = \frac{2}{9}.$$

【例 3.40】已知随机变量  $X$  和  $Y$  分别服从正态分布  $N(1, 3^2)$  和  $N(0, 4^2)$ , 且  $X$  与  $Y$  的相关系数

$$\rho_{XY} = -\frac{1}{2}, \text{ 设 } Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}.$$

(1) 求  $Z$  的数学期望  $E(Z)$  和方差  $D(Z)$ ; (2) 求  $X$  与  $Z$  的相关系数  $\rho_{XZ}$ ; (3) 问  $X$  与  $Z$  是否相互独立? 为什么?

【解】 $X \sim N(1, 3^2), Y \sim N(0, 4^2)$ .

$$(1) E(Z) = E\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} D(Z) &= D\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 D(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 D(Y) + 2\rho_{XY} \sqrt{D\left(\frac{X}{3}\right)} \sqrt{D\left(\frac{Y}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{3^2} \times 3^2} \sqrt{\frac{1}{2^2} \times 4^2} \\ &= 1 + 4 - 2 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \operatorname{cov}(X, Z) &= \operatorname{cov}\left(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3} \operatorname{cov}(X, X) + \frac{1}{2} \operatorname{cov}(X, Y) \\ &= \frac{1}{3} D(X) + \frac{1}{2} \rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = \frac{1}{3} \times 3^2 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 \times 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \rho_{XZ} = \frac{\operatorname{cov}(X, Z)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Z)}} = 0.$$

(3) 因  $Z$  不一定服从正态分布,  $(X, Z)$  更不一定为正态分布, 故尽管  $X$  与  $Z$  不相关,  $X$  与  $Z$  仍不一定相互独立.

【例 3.41】假设二维随机变量  $(X, Y)$  在矩形

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

上服从均匀分布, 记

$$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y \\ 1, & X > Y \end{cases}; \quad V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}.$$

求: (1)  $U$  和  $V$  的联合分布; (2)  $U$  和  $V$  的相关系数  $\rho$ .

【解】由题设可知 (如图 3-5 所示):

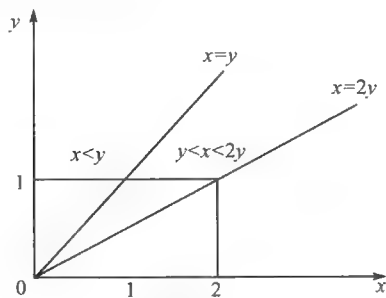


图 3-5

$$P(X \leq Y) = \frac{1}{4}, P(X > 2Y) = \frac{1}{2}, P(Y < X \leq 2Y) = \frac{1}{4}.$$

(1)  $(U, V)$  所有可能取值为:  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{且 } P(U = 0, V = 0) &= P(X \leq Y, X \leq 2Y) \\ &= P(X \leq Y) = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$P(U = 0, V = 1) = P(X \leq Y, X > 2Y) = 0;$$

$$P(U = 1, V = 0) = P(X > Y, X \leq 2Y) = P(Y < X \leq 2Y) = \frac{1}{4};$$

$$P(U = 1, V = 1) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 由 (1) 的结构易知  $UV$ ,  $U$  和  $V$  的分布律分别为

$$UV \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad U \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}; \quad V \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

于是,有

$$E(U) = \frac{3}{4}, D(U) = \frac{3}{16}; E(V) = \frac{1}{2}, D(V) = \frac{1}{4};$$

$$E(UV) = \frac{1}{2}; \operatorname{cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = \frac{1}{8};$$

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)D(V)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

【例 3.42】设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ .

(1) 求  $X$  的数学期望  $E(X)$  和方差  $D(X)$ ;

(2) 求  $X$  与  $|X|$  的协方差, 并问  $X$  与  $|X|$  是否不相关?

(3) 问  $X$  与  $|X|$  是否相互独立? 为什么?

【解】(1)  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}dx = 0$ ,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = 2.$$

$$(2) E(X | X|) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x |x| e^{-|x|}dx = 0,$$

$$\operatorname{cov}(X, |X|) = E(X | X|) - E(X) \cdot E(|X|) = 0.$$

$$\Rightarrow \rho_{X|X|} = \frac{\operatorname{cov}(X, |X|)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(|X|)}} = 0. \text{ 故 } X \text{ 与 } |X| \text{ 不相关.}$$

(3) 对给定  $0 < a < +\infty$ , 显然事件  $\{|X| < a\}$  包含在事件  $\{X < a\}$  内, 且  $P\{X < a\} < 1$ ,  $P\{|x| < a\} > 0$ .

$$\text{故 } P\{X < a, |X| < a\} = P\{|X| < a\}.$$

$$\text{但 } P\{X < a\} \cdot P\{|X| < a\} < P\{|X| < a\},$$

$$\text{所以 } P\{X < a, |X| < a\} \neq P\{X < a\} \cdot P\{|X| < a\}.$$

故  $X$  与  $|X|$  不独立.

### 习 题 三

#### 1. 填空题.

(1) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $D(X) = 2, D(Y) = 4, D(2X - Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 已知随机变量  $X \sim N(-3, 1), Y \sim N(2, 1)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立,  $Z = X - 2Y + 7$ , 则  $Z \sim \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 投掷  $n$  枚骰子, 则出现的点数之和的数学期望  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设离散型随机变量  $\xi$  的取值是在两次独立试验中事件  $A$  发生的次数, 如果在这些试验中事件发生的概率相同, 并且已知  $E(X) = 0.9$ , 则  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设  $X \sim N(0, 1), Y = X^{2n}$  ( $n$  为正整数), 则  $\rho_{XY} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(6) 设随机变量  $X$  在区间  $[-1, 2]$  上服从均匀分布, 随机变量  $Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } X > 0 \\ 0, & \text{若 } X = 0, \text{ 则方差} \\ -1, & \text{若 } X < 0 \end{cases}$

$DY =$  \_\_\_\_\_.

(7) 若随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 且服从相同的两点分布  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ , 则  $X = \sum_{i=1}^3 X_i$  服从 \_\_\_\_\_ 分布,  $E(X) =$  \_\_\_\_\_,  $D(X) =$  \_\_\_\_\_.

(8) 设  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 且  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y$  在  $(-1, 1)$  上服从均匀分布, 则  $\text{cov}(X, Y) =$  \_\_\_\_\_.

(9) 设  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为:  $\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

$\varphi(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则  $E(XY) =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 其中  $X_1$  在  $[0, 6]$  服从均匀分布,  $X_2$  服从正态分布  $N(0, 2^2)$ ,  $X_3$  服从参数为  $\lambda = 3$  的泊松分布, 记  $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ , 则  $D(Y) =$  \_\_\_\_\_.

## 2. 选择题.

(1) 设随机变量  $X$  和  $Y$  独立同分布, 记  $U = X - Y, V = X + Y$ , 则随机变量  $U$  和  $V$  必然

- A. 不独立. B. 独立.  
C. 相关系数不为零. D. 相关系数为零. 【 】

(2) 设  $P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则  $E(X) =$

- A. 0. B. 1.  
C. 0.5. D. 不存在. 【 】

(3)  $X_1, X_2, X_3$  都服从  $[0, 2]$  上的均匀分布, 则  $E(3X_1 - X_2 + 2X_3) =$

- A. 1. B. 3.  
C. 4. D. 2. 【 】

(4) 已知  $X$  与  $Y$  的联合分布如下表所示, 则有

X \ Y	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

- A.  $X$  与  $Y$  不独立. B.  $X$  与  $Y$  独立.  
C.  $X$  与  $Y$  不相关. D.  $X$  与  $Y$  彼此独立且相关. 【 】

(5) 设离散型随机变量  $X$  的可能取值为:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ , 且  $E(X) = 2.3, E(X^2) = 5.9$ , 则  $x_1, x_2, x_3$  所对应的概率为

- A.  $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.7$ . B.  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5$ .  
C.  $p_1 = 0.3, p_2 = 0.5, p_3 = 0.2$ . D.  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.5, p_3 = 0.3$ . 【 】

(6) 设  $X$  与  $Y$  为两个随机变量, 则下列等式中正确的是

- A.  $E(X+Y) = E(X)E(Y)$ . B.  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ .  
C.  $E(XY) = E(X)E(Y)$ . D.  $D(XY) = D(X)D(Y)$ . 【 】

- (7) 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元, 令某人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人得奖的金额的数学期望为  
 A. 6.                      B. 12.                      C. 7.8.                      D. 9.                      【    】
- (8) 设随机变量  $X$  与  $Y$  服从正态分布,  $X \sim N(\mu, 4^2)$ ,  $Y \sim N(\mu, 5^2)$ , 记  $P_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$ ,  $P_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$ , 则  
 A. 对任何  $\mu$ , 都有  $P_1 = P_2$ .                      B. 对任何实数  $\mu$ , 都有  $P_1 \leq P_2$ .  
 C. 只有  $\mu$  的个别值, 才有  $P_1 = P_2$ .                      D. 对任何实数  $\mu$ , 都有  $P_1 > P_2$ .                      【    】
- (9) 随机变量  $\zeta = X + Y$  与  $\eta = X - Y$  不相关的充分必要条件为  
 A.  $E(X) = E(Y)$ .                      B.  $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$ .  
 C.  $E(X^2) = E(Y^2)$ .                      D.  $E(X^2) + E^2(X) = E(Y^2) + E^2(Y)$ .                      【    】
- (10) 人的体重  $X \sim \varphi(x)$ ,  $E(X) = a$ ,  $D(X) = b$ , 10 个人的平均体重记为  $Y$ , 则下列结论正确的是  
 A.  $E(Y) = a$ .                      B.  $E(Y) = 0.1a$ .                      C.  $D(Y) = 0.01b$ .                      D.  $D(Y) = b$ .                      【    】

### 3. 证明题.

- (1) 设  $X$  是随机变量,  $c$  是常数, 证明:  $D(X) < E\{(X - c)^2\}$ , 其中  $c \neq E(X)$ .  
 (2) 设  $X$  和  $Y$  为相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

试证: 它们的卷积, 即随机变量  $Z = X + Y$  的概率密度也服从正态分布.

- (3) 设  $X, Y$  相互独立, 证明:  $D(XY) = D(X)D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + [E(Y)]^2 D(X)$ .  
 (4) 设  $x_i$  和  $x_k$  为随机变量  $X$  的任意两个可取值,  $E(X), D(X)$  分别为其数学期望与方差, 则

$$E\left[X - \frac{x_i + x_k}{2}\right]^2 \geq D(X).$$

### 4. 计算题.

- (1) 设  $X$  的分布律为  $P(X = k) = \frac{a^k}{(1 + a)^{k+1}}$ , ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots, a > 0$ ), 试求  $E(X), D(X)$ .

- (2) 设随机变量  $X$  具有概率密度  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求  $E(X), D(X)$ .

- (3) 设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率分布为

$(X, Y)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$p\{X = x, Y = y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

$$\text{求 } E\left[\sin \frac{\pi(X + Y)}{2}\right].$$

- (4) 一汽车沿一街道行驶需要通过三个设有红绿灯的路口, 每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立, 且红绿两种信号显示的时间相等, 以  $X$  表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数, 求: (1)  $X$  的概率分布; (2)  $E\left(\frac{1}{1 + X}\right)$ .

(5) 设  $(X, Y)$  的概率密度

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求  $E(\sqrt{X^2 + Y^2})$ .

(6) 设  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < x\}$  上的均匀分布, 求相关系数  $\rho_{XY}$ .

(7) 在长为  $l$  的线段上任选两点, 求两点间距离的数学期望与方差.

(8) 设  $X, Y$  为服从正态分布  $N(a, \sigma^2)$  的随机变量, 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 求  $E[\min(X, Y)]$ .

(9) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}, (-\infty < x < +\infty)$$

求  $E(X), D(X)$ .

(10) 设  $(X, Y)$  的联合密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

求  $D(X), D(Y), \rho(X, Y)$ .

(11) 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障时全天停止工作, 若一周 5 个工作日里无故障, 可获利润 10 万元, 发生一次故障仍可获利润 5 万元; 发生二次故障所获利润为 0 元; 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元, 求一周内期望利润是多少?

(12) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)],$$

其中  $\varphi_1(x, y)$  和  $\varphi_2(x, y)$  都是二维正态密度函数, 且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为  $\frac{1}{3}$  和  $-\frac{1}{3}$ . 它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是零, 方差都是 1.

① 求随机变量  $X$  和  $Y$  的密度函数  $f_1(x)$  和  $f_2(y)$ , 及  $X$  和  $Y$  的相关系数  $\rho$  (可直接利用二维正态密度的性质);

② 问  $X$  与  $Y$  是否独立? 为什么?

### 参 考 答 案

1. (1) 12. (2)  $N(0, 5)$ . (3)  $E(X) = \frac{7}{2}n$ . (4)  $D(X) = 0.495$ . (5)  $\rho_{XY} = 0$ .

(6)  $\frac{8}{9}$ . (7)  $B(Y, p)$ ,  $EX = 0.6$ ,  $DX = 0.48$ .

(8) 0. (9)  $E(XY) = 4$ . (10) 46.

2. (1) D (2) D (3) C (4) A (5) B  
(6) A (7) C (8) A (9) B (10) A

3. 略.

4. (1)  $E(X) = a, D(X) = a + a^2$ . (2)  $E(X) = 0$ . (3) 0.25.

(4)

$X$	0	1	2	3
$p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{67}{96}.$$

$$(5) E(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad (6) \rho_{XY} = \frac{1}{2}, \quad (7) E(X) = \frac{l}{3}, \quad D(X) = \frac{l^2}{18}.$$

$$(8) E[\min(X, Y)] = a - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}, \quad (9) E(X) = \mu, \quad D(X) = 2.$$

$$(10) D(X) = D(Y) = \frac{1}{4}, \quad \rho_{XY} = 0, \quad (11) 5.216(\text{万元}).$$

$$(12) \textcircled{1} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \rho = 0;$$

\textcircled{2}  $f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$ , 故  $X$  与  $Y$  不相互独立.

## 第四章 大数定律和中心极限定理

### 第1节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、切比雪夫不等式

##### 1. 切比雪夫不等式与大数定律

设  $X$  为随机变量, 且有有限方差, 则对任意  $\epsilon > 0$ , 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}.$$

或者

$$P\{|X - E(X)| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}.$$

##### 2. 大数定律

(1) 切比雪夫大数定律: 设  $X_1, X_2, \dots$  为两两不相关的随机变量序列, 且它们的方差均有限, 并有公共上界, 即存在常数  $c$ , 使

$$D(X_i) \leq c, i = 1, 2, \dots$$

则对  $\forall \epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right\} = 1.$$

(2) 伯努利大数定律: 设  $Y_n$  表示  $n$  重伯努利试验中事件  $A$  发生的次数, 即  $Y_n \sim B(n, p)$ , 其中  $p = P(A)$ , 则对  $\forall \epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \epsilon\right\} = 1.$$

(3) 辛钦大数定律: 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  为独立同分布的随机变量序列, 且数学期望  $E(X_i) = \mu$  存在, 则对任意  $\epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right\} = 1.$$

#### 二、中心极限定理

##### 1. 林德伯格-列维定理

设  $X_1, X_2, \dots$  为独立同分布的随机变量序列,  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots$  则对任意实数  $x$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



## 2. 棣莫弗—拉普拉斯定理

设  $Y_n$  表示  $n$  重伯努利试验中事件  $A$  发生的次数, 即  $Y_n \sim B(n, p)$ ,  $p = P(A)$ , 则对任意实数  $x$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

## 三、重要公式与结论

## 1. 切比雪夫不等式的一般形式

设  $X$  的  $r$  阶绝对矩存在,  $r > 0$ , 则对  $\forall \epsilon > 0$ , 有

$$P\{|X| \geq \epsilon\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\epsilon^r} \quad (r > 0).$$

特别有

$$(1) \quad P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{E(|X - E(X)|)}{\epsilon},$$

$$(2) \quad P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\epsilon^2} = \frac{D(X)}{\epsilon^2}.$$

## 2. 近似计算公式

(1) 当  $n$  很大,  $p$  很小时, 二项概率有下列近似公式 (即 Poisson 定理):

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{其中 } \lambda = np.$$

(2)  $X_1, X_2, \dots$  满足中心极限定理的条件,  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $n$  很大时有下列近似公式

$$P\left\{a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

## 四、注意

(1) 德莫弗—拉普拉斯定理实际上就是林德伯格—勒维定理在随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  独立同 0-1 分布的情形.

(2) 切比雪夫不等式主要用来对期望、方差已知的随机变量取值的概率作粗略估计.

(3) 大数定律是参数估计中矩估计的理论依据, 也是判别估计一致性的主要方法.

(4) 中心极限定理主要用于近似计算.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

## 题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题

**提示** 直接利用切比雪夫不等式, 并且注意不等式中期望和方差的位置不要弄错.

**【例 4.1】** 设随机变量  $X$  的数学期望  $E(X) = \mu$ , 方差  $D(X) = \sigma^2$ , 则由切比雪夫不等式, 有

$$P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解】令  $\varepsilon = 3\sigma$ , 则由切比雪夫不等式  $P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ , 有

$$P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

【例 4.2】设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $n$  个相互独立同分布的随机变量,  $E(X_i) = \mu, D(X_i) = 8, (i = 1, 2, \dots, n)$ , 对于  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ , 写出所满足的切比雪夫不等式 \_\_\_\_\_, 并估计  $P\{|\bar{X} - \mu| < 4\} \geq$  \_\_\_\_\_.

【解】 $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu,$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot nD(X_i) = \frac{8}{n},$$

于是  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$  所满足的切比雪夫不等式为

$$P\{|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{8}{n\varepsilon^2},$$

$$P\{|\bar{X} - \mu| < 4\} \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{4^2} = 1 - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{8}{n} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

【例 4.3】设随机变量  $X$  和  $Y$  的数学期望分别为  $-2$  和  $2$ , 方差分别为  $1$  和  $4$ , 而相关系数为  $-0.5$ , 则根据切比雪夫不等式  $P\{|X + Y| \geq 6\} \leq$  \_\_\_\_\_.

【解】令  $Z = X + Y$ , 则  $E(Z) = E(X) + E(Y) = -2 + 2 = 0,$

$$D(Z) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$$

$$= D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = 1 + 4 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 \times 2 = 3,$$

$$\text{于是 } P\{|X + Y| \geq 6\} = P\{|Z - E(Z)| \geq 6\} \leq \frac{D(Z)}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

【例 4.4】设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是独立同分布, 其分布函数为

$$F(x) = a + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{b}, b \neq 0,$$

则辛钦大数定律对此序列

(A) 适用.

(B) 当常数  $a, b$  取适当的数值时适用.

(C) 不适用.

(D) 无法判别.

【 】

【解】辛钦大数定律成立的条件是随机变量  $X$  的数学期望存在, 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x \frac{dF(x)}{dx} \right| dx$  收敛,

$$\text{因为 } \frac{d}{dx} F(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + x^2)},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|b| |x|}{\pi(b^2 + x^2)} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2|b|}{\pi} \int_0^A \frac{x}{b^2 + x^2} dx \\ &= \frac{|b|}{\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{d(b^2 + x^2)}{b^2 + x^2} = \frac{|b|}{\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{A^2}{b^2}\right) = +\infty, \end{aligned}$$

故辛钦大数定律不适用, 即选(C).

【例 4.5】设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立同分布, 且  $E(X_n) = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i < n\right\} =$

【解】由辛钦大数定律有(取  $\varepsilon = 1$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 0\right| < 1\right\} = 1,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| < 1\right\} = 1.$$

又显然有  $\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| < 1\right\} \subset \left\{\sum_{i=1}^n X_i < n\right\}$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i < n\right\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| < 1\right\} = 1.$$

从而有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i < n\right\} = 1$ , 即应填 1.

### 题型二 有关中心极限定理的命题

**提示** 这类问题主要以两种形式出现:一是直接给出独立同分布随机变量序列;二是通过实际问题间接给出. 其求解步骤都可归纳为:

- 1° 根据实际问题, 设随机变量  $X$  或独立同分布随机变量序列  $X_1, X_2, \dots$ , 令  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ;
- 2° 分析  $X$  服从什么分布, 并求数学期望  $EX$  和方差  $DX$ ;
- 3° 将该随机变量  $X$  标准化, 即  $\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$ , 则

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a - EX}{\sqrt{DX}} < \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} < \frac{b - EX}{\sqrt{DX}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - EX}{\sqrt{DX}}\right) - \Phi\left(\frac{a - EX}{\sqrt{DX}}\right), \end{aligned}$$

其中  $\Phi(\cdot)$  是标准正态分布函数.

【例 4.6】设  $X_1, X_2, \dots$  为独立同分布序列, 且  $X_i (i = 1, 2, \dots)$  服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 则

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x). \quad (B) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n}\lambda} \leq x\right\} = \Phi(x). \quad (D) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{n\lambda} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

$$\text{其中 } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$\text{【解】 } E(X_i) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \leq x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ 可见该选 (A).}$$

**【例 4.7】**某人要测量  $A, B$  两地之间的距离,限于测量工具,将其分成 1200 段进行测量,设每段测量误差(单位:km)相互独立,且均服从  $(-0.5, 0.5)$  上的均匀分布.试求总距离测量误差的绝对值不超过 20 km 的概率.

**【分析】**利用独立同分布情形下的林德伯格—勒维定理.

**【解】**设  $X_i$  表示第  $i$  段上的测量误差,则  $X_i \sim U(-0.5, 0.5), i = 1, 2, \dots, 1200$ , 从而要求的概率

为  $P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200} X_i\right| \leq 20\right\}$ , 因为  $X_i$  独立同分布,且

$$E(X_i) = 0, D(X_i) = \frac{1}{12}, \quad i = 1, 2, \dots, 1200.$$

于是由中心极限定理知,  $\sum_{i=1}^{1200} X_i$  近似服从  $N(0, 100)$ .

$$\begin{aligned} \text{故 } P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200} X_i\right| \leq 20\right\} &= P\left\{-\frac{20-0}{10} \leq \frac{\sum_{i=1}^{1200} X_i}{10} \leq \frac{20-0}{10}\right\} = \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= 2\Phi(2) - 1 = 0.90. \end{aligned}$$

**【例 4.8】**抽样检查产品质量时,如果发现次品多于 10 个,则拒绝接受这批产品,设某批产品的次品率为 10%,问至少应抽取多少个产品检查才能保证拒绝接收该产品的概率达到 0.9?

**【解】**设  $n$  为至少应抽取的产品数,  $X$  为其中的次品数

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 次检查时为次品,} \\ 0, & \text{第 } k \text{ 次抽查时为正品.} \end{cases}$$

$$\text{则 } X = \sum_{k=1}^n X_k, \quad E(X_k) = 0.1, \quad D(X_k) = 0.1(1-0.1) = 0.09.$$

由德莫弗—拉普拉斯定理,有

$$P\{10 < X\} = P\left\{\frac{10 - n \times 0.1}{\sqrt{n \times 0.1 \times 0.9}} < \frac{X - n \times 0.1}{\sqrt{n \times 0.1 \times 0.9}}\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{10 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right).$$

$$\text{由题意 } 1 - \Phi\left(\frac{10 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.1. \text{ 查表得}$$

$$\frac{10 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}} = -1.28 \Rightarrow n = 147.$$

**【例 4.9】**(1) 一个复杂系统由 100 个相互独立的元件组成,在系统运行期间每个元件损坏的概率为 0.10,又知为使系统正常运行,至少必须有 85 个元件工作,求系统的可靠度(即正常运行的概率);(2) 上述系统假如由  $n$  个相互独立的元件组成,而且又要求至少有 80% 的元件工作才能使整个系统正常运行,问  $n$  至少为多大时才能保证系统的可靠度为 0.95?

**【解】**(1) 设  $X_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 个元件没损坏,} \\ 0, & \text{第 } k \text{ 个元件损坏.} \end{cases}$

$X$  为系统正常运行时完好的元件个数,于是  $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$ . 由题设可知  $X_k (k = 1, 2, \dots,$

100) 服从(0-1)分布.

$X = \sum_{k=1}^{100} X_k$  服从二项分布  $B(100, 0.9)$ , 于是

$$E(X) = 100 \times 0.9 = 90, \quad D(X) = npq = 100 \times 0.9 \times 0.1 = 9,$$

$$\begin{aligned} \text{故所求概率为 } P\{X > 85\} &= 1 - P\{X \leq 85\} = 1 - P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}} \leq \frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X-90}{3} \leq -\frac{5}{3}\right\} = 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \approx 0.952. \end{aligned}$$

$$(2) P\{0.8n \leq X\} = 0.95,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } P\{0.8n \leq X\} &= P\left\{\frac{0.8n-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \leq \frac{X-0.9n}{\sqrt{n} \times 0.3}\right\} = P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{3} \leq \frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{\sqrt{n}}{3} = 1.65 \Rightarrow n = 25.$$

**【例 4.10】**某车间有 200 台车床, 由于各种原因每台车床只有 60% 的时间在开动, 每台车床开动期间耗电量为  $E$ , 问至少供给此车间多少电量才能以 99.9% 的概率保证此车间不因供电不足而影响生产.

**【解】** 设  $X_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 台车床开动,} \\ 0, & \text{第 } k \text{ 台车床不开.} \end{cases}$  令  $x = \sum_{k=1}^{200} X_k$  —— 车间开动的车床数, 则

$$E(X_k) = 0.6, \quad D(X_k) = 0.6 \times 0.4 = 0.24,$$

$$E(X) = 200 \times 0.6 = 120, \quad D(X) = 200 \times 0.24 = 48.$$

不影响生产需开动的车床数为  $n$ , 由德莫弗-拉普拉斯定理, 有

$$P\{X \leq n\} = P\left\{\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leq \frac{n-120}{\sqrt{48}}\right\} \geq 0.999.$$

$$\text{即 } \Phi\left(\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right) \geq 0.999, \quad \text{查表得 } \frac{n-120}{\sqrt{48}} \geq 3.01. \text{ 取 } n = 141,$$

从而可知, 给车间供电 141E 就能以不小于 99.9% 的概率保证正常生产.

**【例 4.11】**一生产线生产的产品成箱包装, 每箱重量是随机的. 假设每箱平均重 50 kg, 标准差为 5 kg. 若用最大载重量为 5 t 的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977 [ $\Phi(2) = 0.977$ , 其中  $\Phi(x)$  是标准正态分布函数].

**【解】** 设  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是装运的第  $i$  箱的重量(单位: kg),  $n$  为所求箱数, 由条件可以把  $X_1, X_2, \dots, X_n$  看做独立同分布的随机变量, 而  $n$  箱的总重量  $T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . 由题设  $E(X_i) = 50, \sqrt{D(X_i)} = 5, E(T_n) = 50n, \sqrt{D(T_n)} = 5\sqrt{n}$  (单位: kg). 由勒维-林德伯格中心极限定理,  $T_n \sim N(50n, 25n)$

$$\begin{aligned} P\{T_n \leq 5000\} &= P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2) \\ \Rightarrow \frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2 &\Rightarrow n < 98.0199. \end{aligned}$$

故最多可装 98 箱.

注 如【例 4.8】中,虽然作为服从二项分布的随机变量  $X$ ,有事件  $(10 < X) = (10 < X \leq n)$ ,但在用中心极限定理做近似计算时,不能将  $P(10 < X)$  写成  $P(10 < X \leq n)$  来计算,因为写成后者以后一般会产生更大的误差.其他例题也有类似问题,请不要弄错.

#### 习 题 四

##### 1. 填空题.

(1) 设  $Y_n$  是  $n$  次伯努利试验中事件  $A$  出现的次数,  $p$  为  $A$  在每次试验中出现的概率,则对任意  $\varepsilon > 0$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 设随机变量  $X$  和  $Y$  的数学期望是 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 0.5, 则根据切比雪夫不等式  $P(|X - Y| \geq 6) \leq \underline{\hspace{2cm}}$ .

##### 2. 计算题.

(1) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , 利用切比雪夫不等式估计概率

$$P\{0 < X < 6\}.$$

(2) 某厂有 400 台同型机器, 各台机器发生故障的概率均为 0.02, 假设各台机器相互独立工作, 试求机器出故障的台数不少于 2 台的概率.

(3) 设供电网中有 10000 盏灯, 夜晚每一盏灯开着的概率都是 0.7, 假设各灯开、关时间彼此无关, 计算同时开关的灯数在 6800 与 7200 之间的概率.

(4) 设某产品的不合格品率为 0.005, 任取 10000 件, 问不合格品不多于 70 件的概率.

(5) 检查员逐个地检查某产品, 每次花 10 s 检查一个, 但有的产品需要重复检查一次再用去 10 s, 假设每个产品需要重复检查的概率为  $\frac{1}{2}$ , 试求在 8 h 内检查员检查的产品多于 1900 个的概率.

#### 参 考 答 案

1. (1) 0. (2)  $\frac{1}{12}$ .

2. (1)  $P\{0 < X < 6\} \geq \frac{2}{3}$ .

(2) 0.9859. (3) 0.999. (4) 0.998.

(5) 设  $T_i$  表示检查第  $i$  个产品所需时间, 则  $T_i$  独立同分布, 且

$$T_i = \begin{cases} 10, & \text{第 } i \text{ 个产品没重复检查,} \\ 20, & \text{否则,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 1900$$

易得  $P\left(\sum_{i=1}^{1900} T_i \leq 8 \times 3600\right) = 0.916$ .

## 第五章 数理统计的基本概念

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、几个基本概念

##### 1. 总体、个性和样本

在数理统计中,称研究对象的全体(通常为数量指标的集合)为总体,组成总体的每一个元素为个体;从总体中随机抽取若干个体,这些个体称为样本,个体的个数称为样本容量(或样本大小).

通常总体用随机变量  $X$  表示,容量为  $n$  的样本用  $n$  维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  表示. 若  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  相互独立且与总体  $X$  同分布,则称  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为简单随机样本(也简称样本).

##### 2. 统计量

不含总体分布中任何未知参数的样本的函数称为统计量. 下面为常用的一些统计量.

(1) 样本均值 
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

(2) 样本方差 
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(3) 样本  $k$  阶原点矩 
$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

(4) 样本  $k$  阶中心矩 
$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k.$$

(5) 次序统计量 设样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的观测值为  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 现将观测值按由小到大的顺序重新排列得到  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , 记取值为  $x_{(k)}$  的样本分量为  $X_{(k)}$ , 则称  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  为样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的次序统计量.

##### 3. 分位数

若存在  $x_\alpha$ , 使  $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$ , 则称  $x_\alpha$  为  $X$  的概率分布的(上侧) $\alpha$  分位数.

##### 4. 样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布

若总体  $X$  为一个连续型随机变量, 密度函数为  $f_X(x)$ , 则样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i).$$

若总体  $X$  为一个离散型随机变量, 分布律为  $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$ , 则样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合分布律为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

## 二、三个抽样分布—— $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布与 $F$ 分布

### 1. $\chi^2$ 分布

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且同服从正态分布  $N(0, 1)$ , 则随机变量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

所服从的分布称为自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布, 并记为  $\chi^2(n)$ .

$\chi^2$  分布有下列性质:

若  $X \sim \chi^2(n)$ ,  $Y \sim \chi^2(m)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $X + Y \sim \chi^2(n + m)$ .

### 2. $t$ 分布

设  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则随机变量

$$T = X / \sqrt{\frac{Y}{n}}$$

所服从的分布称为自由度为  $n$  的  $t$  分布, 并记为  $t(n)$ .  $t$  分布的密度函数关于  $y$  轴对称, 且其极限分布为标准正态分布.

### 3. $F$ 分布

设  $X \sim \chi^2(m)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则称随机变量

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

所服从的分布为自由度为  $(m, n)$  的  $F$  分布, 并记为  $F(m, n)$ .

## 三、正态总体下常用统计量的性质

设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则有

$$(1) \quad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1);$$

$$(2) \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3) \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n);$$

$$(4) \quad \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立};$$

$$(5) \quad \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t(n-1).$$

设  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  是来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的样本,  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  是来自正态总体  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本, 且两个总体相互独立, 则有

$$(6) \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1);$$



$$(7) \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2 / m\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2 / n\sigma_2^2} \sim F(m, n);$$

$$(8) \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1),$$

$$\text{其中, } S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2;$$

(9) 当两总体的方差相同时, 即  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , 有

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

$$\text{其中, } S_w = \sqrt{\frac{1}{m+n-2} [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2]}.$$

#### 四、重要公式与结论

(1) 统计量是随机变量, 本身不含总体分布中的未知参数, 但它的分布可能含总体分布中的未知参数.

(2) 样本  $(X_1, \dots, X_n)$  取自总体  $X$ ,  $X_i$  相互独立且与  $X$  同分布 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

(3) 无论总体  $X$  是何分布, 只要有  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  来自  $X$ , 且  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ , 则

$$\textcircled{1} E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$\textcircled{2} E(S^2) = \sigma^2, E(S^{*2}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

$$\text{其中, } S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(4) 抽样分布的补充性质.

① 若  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ , 则有

$$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n.$$

② 若  $T \sim t(n)$ , 则

$$E(T) = 0, D(T) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2).$$

若  $T$  的上侧  $\alpha$  分位数记作  $t_\alpha(n)$ , 则

$$t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n).$$

③ 若  $F \sim F(m, n)$ , 则  $\frac{1}{F} \sim F(n, m)$ .

若  $F$  的上侧  $\alpha$  分位数记作  $F_\alpha(m, n)$ , 则

$$F_\alpha(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}.$$

④ 若  $U \sim N(0, 1)$ ,  $u_\alpha$  为其上侧  $\alpha$  分位数, 则  $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ .

#### 五、经验分布函数

假设  $X$  为随机变量;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为从小到大排列的一组样本值. 令

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < x_1, \\ 1/n, & \text{当 } x_1 \leq x < x_2, \\ \vdots & \\ k/n, & \text{当 } x_k \leq x < x_{k+1}, \\ \vdots & \\ 1, & \text{当 } x \geq x_n. \end{cases}$$

称  $F_n(x)$  为经验分布函数(或样本分布函数).

性质:  $F_n(x) = \{X \leq x\}$  的频率.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量

**提示** 既然统计量是随机变量,于是也可对它求数学期望、方差等,但为了使计算简便,熟记几个常用统计量的数字特征是有益的.

**【例 5.1】** 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为取自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,令

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|, \text{ 试求 } E(Y), D(Y).$$

**【分析】** 因  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,从而  $|X_i - \mu|$  也独立同分布( $i = 1, 2, \dots, n$ ),于是根据数字特征的性质,只须求  $E(|X_i - \mu|)$  和  $D(|X_i - \mu|)$

**【解】** 令  $Y_i = X_i - \mu$ , 则  $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$ .

$$\begin{aligned} \text{于是 } E(|X_i - \mu|) &= E(|Y_i|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma. \end{aligned}$$

$$\text{故 } E(Y) = E(|X_i - \mu|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } D(|X_i - \mu|) &= D(|Y_i|) = E(Y_i^2) - [E(|Y_i|)]^2 \\ &= D(Y_i) - \frac{2}{\pi} \sigma^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma^2. \end{aligned}$$

$$\text{故 } D(Y) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(|X_i - \mu|) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{\sigma^2}{n}.$$

**【例 5.2】** 设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ), 从该总体中抽取简单随机样本  $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ ,

( $n \geq 2$ ), 其样本均值为  $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ , 求统计量  $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$  的数学期望  $E(Y)$ .

**【分析】** 利用  $E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] = \sigma^2$ ,

即  $E\left[\sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] = (n-1)\sigma^2$  进行计算较简便. 若直接利用期望的性质进行计算, 则是很复杂的. 故掌握几个常用统计量的数字特征是必要的.

【解】令  $\bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\bar{X}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}$ ,

显然有  $2\bar{X} = \bar{X}' + \bar{X}''$ . 并注意到  $X_i - \bar{X}'$  与  $X_{n+i} - \bar{X}'' (i = 1, 2, \dots, n)$  相互独立. 因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2\right] = E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}') + (X_{n+i} - \bar{X}'')]^2\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}')^2 + 2(X_i - \bar{X}')(X_{n+i} - \bar{X}'') + (X_{n+i} - \bar{X}'')^2]\right\} \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}')^2\right] + 0 + E\left[\sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \bar{X}'')^2\right] \\ &= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2. \end{aligned}$$

【例 5.3】从正态总体  $N(3.4, 6^2)$  中抽取容量为  $n$  的样本, 如果要求其样本均值位于区间  $(1.4, 5.4)$  内的概率不小于 0.95, 问样本容量  $n$  至少应取多大?

【分析】利用统计量  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  即可得到结果.

【解】令  $\bar{X}$  表示样本均值, 则因为

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - 3.4}{6} \sim N(0, 1),$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad P(1.4 < \bar{X} < 5.4) &= P(-2 < \bar{X} - 3.4 < 2) \\ &= P\left\{\frac{|\bar{X} - 3.4|}{6/\sqrt{n}} < \frac{2}{6/\sqrt{n}}\right\} \\ &= P\left\{\sqrt{n} \frac{|\bar{X} - 3.4|}{6} < \frac{1}{3}\sqrt{n}\right\} \\ &= 2\Phi\left(\frac{1}{3}\sqrt{n}\right) - 1 \geq 0.95. \end{aligned}$$

查表得  $\frac{1}{3}\sqrt{n} \geq 1.96$ , 即  $n \geq 34.57$ . 故  $n$  至少应取 35.

【例 5.4】设  $(X_1, X_2, \dots, X_7)$  取自总体  $X \sim N(0, 0.5^2)$ , 则  $P\left\{\sum_{i=1}^7 X_i^2 > 4\right\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】因为  $\sum_{i=1}^7 \left(\frac{X_i}{0.5}\right)^2 \sim \chi^2(7)$ , 于是

$$P\left\{\sum_{i=1}^7 X_i^2 > 4\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^7 \left(\frac{X_i}{0.5}\right)^2 > 16\right\}.$$

查表可知  $\chi_{0.025}^2(7) = 16.03$ , 故答案应填 0.025.

### 题型二 求统计量的分布

**提示** 弄清楚三个重要分布:  $\chi^2$  分布、 $t$  分布与  $F$  分布所对应的随机变量的结构是求解这类问题的关键.

【例 5.5】设  $X$  与  $Y$  相互独立且都服从  $N(0, 3^2)$ , 而  $X_1, \dots, X_9$  和  $Y_1, \dots, Y_9$  分别是来自总体  $X$  和  $Y$  的简单随机样本, 则统计量

$$U = \frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}}$$

服从的分布是\_\_\_\_\_.

【解】易知分子  $\sum_{i=1}^9 X_i \sim N(0, 3^4)$ , 于是  $\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i \sim N(0, 1)$ , 而  $\sum_{i=1}^9 (Y_i/3)^2 \sim \chi^2(9)$ , 由  $t$  分布的定义有

$$U = \frac{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i}{\sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 (Y_i/3)^2}} \sim t(9).$$

故答案应填  $t(9)$ .

【例 5.6】设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

则服从自由度为  $n-1$  的  $t$  分布的随机变量是

$$(A) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}, \quad (B) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}},$$

$$(C) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}, \quad (D) t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}. \quad \text{【 】}$$

【解】因为

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1), \quad \frac{nS_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

故易知

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}} \sim t(n-1),$$

即应选 (B).

【例 5.7】设总体  $X \sim N(0, 1^2)$ , 从总体中取一个容量为 6 的样本  $X_1, X_2, \dots, X_6$ , 设  $Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$ , 试确定常数  $C$ , 使随机变量  $CY$  服从  $\chi^2$  分布.

【解】因为  $X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0, \sqrt{3}^2)$ , 所以  $\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0, 1^2)$

$$\text{于是 } \left( \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \right)^2 \sim \chi^2(1), \quad \text{同理 } \left( \frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}} \right)^2 \sim \chi^2(1).$$

由于  $\chi^2$  分布的可知性, 故

$$\frac{1}{3} Y = \left( \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}} \right)^2 \sim \chi^2(2).$$

$$\text{可知 } C = \frac{1}{3}.$$

【例 5.8】设总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2$  是总体的一个样本, 求  $Y = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2}$  的分布.

$$\text{【解】 } Y = \left( \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \bigg/ \left( \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2,$$

$$\text{又 } X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \quad X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2),$$

$$\text{于是 } \left( \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1), \quad \left( \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1),$$

且易验证  $X_1 + X_2$  与  $X_1 - X_2$  相互独立. 由统计量  $F$  的定义可知  $Y \sim F(1, 1)$ .

【例 5.9】设  $X_1, X_2, \dots, X_9$  是来自正态总体  $X$  的简单随机样本,

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, \quad Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}.$$

证明: 统计量  $Z$  服从自由度为 2 的  $t$  分布.

【证明】设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$EY_1 = EY_2 = \mu, DY_1 = \frac{1}{36}D\left(\sum_{i=1}^6 X_i\right) = \frac{1}{36} \times 6\sigma^2 = \frac{1}{6}\sigma^2,$$

$$DY_2 = \frac{1}{3^2} \times 3\sigma^2 = \frac{1}{3}\sigma^2.$$

由于  $Y_1$  和  $Y_2$  相互独立, 可知  $E(Y_1 - Y_2) = 0$ .

$$D(Y_1 - Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) = \frac{1}{6}\sigma^2 + \frac{1}{3}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}.$$

从而

$$U = \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0, 1).$$

由正态总体样本方差的性质, 可知  $\chi^2 = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ . 由于  $Y_1, Y_2, S^2$  相互独立, 可见  $Y_1 - Y_2$  与  $S^2$  独立. 于是, 由服从  $t$  分布随机变量的结构, 易知

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}} \text{ 服从自由度为 2 的 } t \text{ 分布.}$$

### 第 3 节 思维定势

**思维定势** 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的一组简单随机样本, 则凡是涉及统计量  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的分布问题, 一般联想到用  $\chi^2$  分布,  $t$  分布和  $F$  分布的定义进行讨论.

【例 5.10】设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自正态总体  $N(0, 2^2)$  的简单随机样本,  $X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ . 则当  $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 统计量  $X$  服从  $\chi^2$  分布, 其自由度为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【解】设  $Y_1 = X_1 - 2X_2, Y_2 = 3X_3 - 4X_4$ , 则  $E(Y_1) = E(Y_2) = 0, D(Y_1) = 20, D(Y_2) = 100$ . 因此  $Y_1 \sim N(0, 20), Y_2 \sim N(0, 100)$ . 更进一步

$$\frac{Y_1}{\sqrt{20}} \sim N(0, 1), \quad \frac{Y_2}{\sqrt{100}} \sim N(0, 1)$$

由  $\chi^2$  分布的定义知

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{Y_1}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{\sqrt{100}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{20}(X_1 - 2X_2)^2 + \frac{1}{100}(3X_3 - 4X_4)^2 \sim \chi^2(2). \end{aligned}$$

故  $a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}$ , 自由度为 2.

习 题 五

1. 填空题.

- (1) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的样本, 且随机变量  $Y = C \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \sim \chi^2(1)$ , 则常数  $C =$  \_\_\_\_\_.
- (2) 设  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  取自正态总体  $X \sim N(0, 2^2)$  的样本且  $Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_ 时,  $Y$  服从  $\chi^2$  分布, 自由度为 \_\_\_\_\_.
- (3) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体为  $\chi^2(n)$  分布的样本, 则  $E(\bar{X}) =$  \_\_\_\_\_,  $D(\bar{X}) =$  \_\_\_\_\_.

2. 单项选择题.

- (1) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的样本, 则样本二阶原点矩  $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  的方差为  
 A.  $\sigma^2$ .                      B.  $\frac{\sigma^2}{n}$ .                      C.  $\frac{2\sigma^4}{n}$ .                      D.  $\frac{\sigma^4}{n}$ .                      【    】
- (2) 设  $X_1, X_2$  为取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则  $X_1 + X_2$  与  $X_1 - X_2$  必  
 A. 线性相关.                  B. 不相关.                      C. 相关但非线性相关.          D. 不独立.                      【    】
- (3) 设总体  $X$  服从正态分布  $N(0, 2^2)$ , 而  $X_1, \dots, X_{15}$  是来自总体  $X$  的简单随机样本, 则随机变量  $Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$  所服从的分布为  
 A.  $\chi^2(15)$ .                  B.  $t(14)$ .                      C.  $F(10, 5)$ .                      D.  $F(1, 1)$ .                      【    】

3. 计算题.

- (1) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  为  $N(0, 0.3^2)$  的一个样本, 求  $P \left\{ \sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44 \right\}$ .
- (2) 从一正态总体中抽取容量为 10 的样本, 若有 2% 的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上, 试求总体的标准差.
- (3) 设总体  $X \sim N(72, 100)$ , 为使样本均值大于 70 的概率不小于 0.95, 问样本容量至少应取多大?
- (4) 设总体  $X$  服从  $N(\mu, 4)$ , 样本  $(X_1, \dots, X_n)$  来自  $X$ ,  $\bar{X}$  为样本均值. 问样本容量  $n$  至少应取多大才能使  
 ①  $E(|\bar{X} - \mu|^2) \leq 0.1$ ;  
 ②  $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.1) \geq 0.95$ .
- (5) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  为取自  $X$  的样本, 问样本容量  $n$  至少应取多大才能使  

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 1.5\right) \geq 0.95.$$
- (6) 从正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  (其中  $\mu$  和  $\sigma > 0$  均为未知) 中抽取一容量为 16 的样本,  $S^2$  为样本方差, 求:  
 ①  $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} > 2.041\right)$ ;  
 ② 方差  $D(S^2)$ .
- (7) 设  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 证明

$$\textcircled{1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - n(\bar{X} - \mu)^2;$$

$$\textcircled{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$$

(8) 随机观察总体  $X$ , 得 10 个数据: 3.2, 2.5, -4, 2.5, 0, 3, 2, 2.5, 4, 2. 求经验分布函数.

(9) 考察某块麦田发生某种虫害的程序, 若选取 8 个样本点, 每点规定  $1 \text{ m}^2$ , 实测害虫数量为: 0, 2, 3, 0, 1, 0, 1, 2. 求害虫总体  $X$  的经验分布函数.

### 参 考 答 案

1. (1)  $\frac{1}{n\sigma^2}$ , (2)  $\frac{1}{20}, \frac{1}{100}, 2$ , (3)  $n, 2$ .

2. (1) C (2) B (3) C

3. (1)  $P(\chi^2(10) > 16) = 0.1$ .

(2) 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{10}} \sim N(0, 1)$ ,  $P(|\bar{X} - \mu| > 4) = 0.02$ , 可得  $\sigma = 5.43$ .

(3)  $n \geq 68.0625$ .

(4)  $\textcircled{1} E|\bar{X} - \mu|^2 = D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{4}{n} \leq 0.1$ , 故  $n \geq 40$ .

$\textcircled{2}$  利用中心极限定理可得  $n \geq 1537$ .

(5) 利用  $\chi^2$  分布可得  $n \geq 27$ .

(6)  $\textcircled{1} 0.99$   $\textcircled{2} \frac{2}{15}\sigma^4$ .

(7) 直接验证即可.

$$(8) F_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ \frac{1}{10}, & -4 \leq x < 0, \\ \frac{2}{10}, & 0 \leq x < 2, \\ \frac{4}{10}, & 2 \leq x < 2.5, \\ \frac{7}{10}, & 2.5 \leq x < 3, \\ \frac{8}{10}, & 3 \leq x < 3.2, \\ \frac{9}{10}, & 3.2 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$(9) F_8(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{3}{8}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{5}{8}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

## 第六章 参数估计

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、矩估计与最大似然估计

##### 1. 点估计的概念

设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自总体  $X$  的样本, 若将样本的某个函数  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  作为总体分布中未知参数  $\theta$  的估计, 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的点估计量. 在抽样后,  $\hat{\theta}$  的值  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为  $\theta$  的估计值.

##### 2. 矩估计法

设总体  $X$  的分布中含有  $m$  个未知参数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ , 其  $k$  阶原点矩  $E(X^k) = \alpha_k(\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . 令

$$\alpha_k(\theta_1, \dots, \theta_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i^k, k = 1, 2, \dots, m,$$

则由上述方程所求得的解  $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \dots, X_n), k = 1, 2, \dots, m$  称为未知参数  $\theta_k$  的矩估计量, 简称矩估计. 只要求掌握  $m = 1, 2$  的情形.

##### 3. 最大似然估计法

设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta_1, \dots, \theta_m)$  (若  $X$  为离散型, 则用分布律代替),  $\theta_1, \dots, \theta_m$  为未知参数. 记  $x_1, \dots, x_n$  为样本  $X_1, \dots, X_n$  的观测值, 则称

$$L(X_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \dots, \theta_m)$$

为似然函数, 若有  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n), (i = 1, \dots, m)$  使得

$$L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m) = \max_{(\theta_1, \dots, \theta_m)} L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m),$$

则称  $\hat{\theta}_i(x_1, \dots, x_n)$  为  $\theta_i$  的最大似然估计值, 而将  $\hat{\theta}_i(X_1, \dots, X_n)$  称为  $\theta_i$  最大似然估计量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 只要求掌握  $m = 1, 2$  的情形.

**【例 6.1】** 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本, 试求:

(1)  $\mu, \sigma^2$  的矩估计;

(2)  $\mu, \sigma^2$  的最大似然估计.

**【解】** (1) 因为  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ , 故令

$$\begin{cases} \mu = \bar{X} \\ \sigma^2 = M_2 \end{cases},$$

其中,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , 于是有  $\mu, \sigma^2$  的矩估计为



$$\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(2) 总体  $X$  的密度为

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \sigma > 0.$$

于是似然函数为

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) &= f(x_1; \mu, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

两边取对数有

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2},$$

于是

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

令  $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0, \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0$ , 即得  $\mu, \sigma^2$  的最大似然估计为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

## 二、估计量的评选标准

### 1. 无偏性

设  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  为  $\theta$  的估计量, 若  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计.

### 2. 有效性

设  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  均为  $\theta$  的无偏估计, 若  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ , 则称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效.

### 3. 一致性

设  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的估计量, 若对任意的  $\epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = 1$$

[上式即表示  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  依概率收敛于  $\theta$ , 常记为  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, n \rightarrow \infty$ ], 则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的一致估计量 (或相合估计量).

**【例 6.2】** 设  $X_1, X_2$  是取自总体  $N(\mu, 1)$  ( $\mu$  未知) 的一个样本. 试证如下三个估计量都是  $\mu$  的无偏估计量, 并确定最有效的一个:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2,$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2,$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2,$$

【解】 $E(X_i) = \mu$ ,  $D(X_i) = 1$  ( $i = 1, 2$ ), 于是

$$E(\hat{\mu}_1) = \frac{2}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) = \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu,$$

$$E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{4}\mu + \frac{3}{4}\mu = \mu,$$

$$E(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu,$$

故  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  均为  $\mu$  的无偏估计.

因为

$X_1$  与  $X_2$  独立,

所以

$$D(\hat{\mu}_1) = \frac{4}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9},$$

$$D(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8},$$

$$D(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

比较可知  $\hat{\mu}_3$  是  $\mu$  的最有效估计量.

【例 6.3】设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 试适当选择常数  $C$ , 使  $C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计.

【解】由题设  $E(X_i) = \mu$ ,  $D(X_i) = \sigma^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). 由题意

$$E\left[C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] = \sigma^2,$$

即

$$C \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1} - X_i)^2 = \sigma^2.$$

由于  $X_i, X_{i+1}$  的独立性有

$$\begin{aligned} E(X_{i+1} - X_i)^2 &= D(X_{i+1} - X_i) \\ &= D(X_{i+1}) + D(X_i) \\ &= 2\sigma^2. \end{aligned}$$

故

$$C \sum_{i=1}^{n-1} 2\sigma^2 = \sigma^2 \Rightarrow C = \frac{1}{2(n-1)}.$$

### 三、区间估计

设  $\theta$  为总体  $X$  的分布中的未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本, 若存在两个统计量  $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  使得对给定的  $\alpha (0 < \alpha < 1)$  有

$$P\{\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha,$$

则称  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$  为  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间,  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  分别称为置信下限和置信上限.

正态总体未知参数的置信区间如表 6-1 所示.

表 6-1

待估参数		抽样分布	双侧置信区间
$\mu$	$\sigma^2$ 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$	$\left( \bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ $P\{ U  \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
	$\sigma^2$ 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left( \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$ $P\{ T  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
$\sigma^2$	$\mu$ 已知	$W' = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$\left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$ $P\{W' \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} = P\{W' \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} = \frac{\alpha}{2}$
	$\mu$ 未知	$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$
$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 已知	$U = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$\left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$ $P\{ U  \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
	已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 但 $\sigma^2$ 未知	$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$ $P\{ T  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$		$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\left[ \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}, F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \right]$ $P\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)\} = \frac{\alpha}{2},$ $P\left\{\frac{1}{F} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)\right\} = \frac{\alpha}{2}$

● 关于求置信区间的问题,应该说比较简单,只要记住上述几个公式即可(当然能推导出此公式为好)。

**【例 6.4】** 设总体  $X$  的方差为 1, 据来自  $X$  的容量为 100 的简单随机样本, 测得均值为 5, 则  $X$  的期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为\_\_\_\_\_。

**【分析】** 当样本容量较大时, 可将总体看做正态总体, 于是本题属于已知方差, 求均值的置信区间的问题, 所求置信区间即为  $\left[ \bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ , 代入数值即得答案为

[4.8, 5.2].

#### 四、重要公式与结论

(1)  $E(\bar{X}) = E(X)$ ,  $E(S^2) = D(X)$ , 即样本均值  $\bar{X}$  和样本方差  $S^2$  分别是总体  $X$  的期望  $E(X)$  和方差  $D(X)$  的无偏估计量.

(2) 样本的任意  $k$  阶原点矩均是对应的总体  $k$  阶原点矩的一致估计.

(3) 若  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计, 且  $D(\hat{\theta}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 则  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的一致估计.

(4) 若  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的矩估计,  $g(x)$  为连续函数, 则  $g(\hat{\theta})$  为  $g(\theta)$  的矩估计.

(5) 若  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的最大似然估计,  $g(x)$  为单调函数, 则  $g(\hat{\theta})$  为  $g(\theta)$  的最大似然估计.

(6) 若  $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$  为  $\theta$  的置信度是  $1 - \alpha$  的置信区间,  $g(x)$  为单调增加函数(或单调减少), 则  $[g(\hat{\theta}_1), g(\hat{\theta}_2)]$ (或  $[g(\hat{\theta}_2), g(\hat{\theta}_1)]$ ) 为  $g(\theta)$  的置信度是  $1 - \alpha$  的置信区间.

### 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

#### 题型一 求矩估计和最大似然估计

**提示** (1) 对于矩估计, 只有一个未知参数时, 令  $\bar{X} = E(X)$ ; 有两个未知参数时, 例如,  $X \sim$

$N(\mu, \sigma^2)$  ( $\mu, \sigma^2$  未知), 则  $\mu, \sigma^2$  的矩估计量分别为  $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

(2) 对于最大似然估计, 其求解步骤为:

① 写出似然函数  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \dots, \theta_m)$ ;

② 取对数  $\ln L$ ;

③ 求偏导数  $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, \dots, m$ ;

④ 判断方程(组)  $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0$  是否有解. 若有解, 则其解即为所求最大似然估计; 若无解, 则最大似然估计常在  $\theta_i$  的边界点上达到.

**【例 6.5】** 一个罐子里装有黑球和白球, 黑、白球数之比为  $a : 1$ . 现有放回地一个接一个地抽球, 直至抽到黑球为止, 记  $X$  为所抽的白球个数. 这样做了  $n$  次之后, 获得一组样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . 基于此, 求未知参数  $a$  的矩估计和最大似然估计.

**【解】** 由题意知, 随机变量  $X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{a}{a+1} \cdot \left(\frac{1}{a+1}\right)^k, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{则 } EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a}{a+1} \cdot \left(\frac{1}{a+1}\right)^k = \frac{a}{(a+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{a+1}\right)^{k-1} = \frac{1}{a},$$

$$\text{令 } \bar{X} = EX \Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{\bar{X}}, \text{ 即 } a \text{ 的矩估计 } \hat{a} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

对于给定的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 似然函数为

$$L(a) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{a}{a+1} \left(\frac{1}{a+1}\right)^{X_i} \right] = \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \left(\frac{1}{a+1}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}, \text{ 于是}$$

$$\ln L(a) = n \ln \left( \frac{a}{a+1} \right) - \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \ln(a+1).$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(a)}{da} = 0, \text{ 则 } n \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right) - \frac{1}{a+1} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = 0 \Rightarrow \hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

故  $a$  的最大似然估计  $\hat{a} = \frac{1}{\bar{X}}$ .

**【例 6.6】** 设  $X$  服从  $(0, \theta)$  ( $\theta > 0$ ) 上的均匀分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的样本, 求  $\theta$  的最大似然估计量与矩估计量.

**【解】** (1)  $X$  的密度函数为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

$$\text{似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 < x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

显然, 当  $\theta > 0$  时,  $L(\theta)$  是单调减函数,  $\theta$  越小,  $L(\theta)$  就越大, 但  $\theta \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$ , 所以

$$\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \text{ 是 } \theta \text{ 的最大似然估计量.}$$

$$(2) \text{ 因 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^\theta \frac{x}{\theta} dx = \frac{\theta}{2},$$

$$\text{令 } E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 即 } \frac{\theta}{2} = \bar{X}, \text{ 得 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = 2\bar{X}.$$

**【例 6.7】** 设随机变量  $X$  的密度为  $f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$ ,

$x_1, x_2, \dots, x_n$  为  $x$  的  $n$  次观测值, 试求  $\sigma$  的最大似然估计.

**【解】** 似然函数  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\sigma}},$

$$\ln L = (-n) \ln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0, \text{ 得 } \sigma \text{ 的最大似然估计 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

**【例 6.8】** 已知某种白炽灯泡寿命服从正态分布, 在某星期中所生产的该种灯泡中随机抽取 10 只, 测得其寿命 (以小时计) 为 1067, 919, 1196, 785, 1126, 936, 918, 1156, 920, 948. 设总体参数均未知, 试用最大似然估计法估计该星期中生产的灯泡能使用 1300 h 以上的概率.

**【解】** 设总体, 即白炽灯泡寿命  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 由【例 6.1】可知  $\mu, \sigma^2$  的最大似然估计为

$$\hat{\mu} = \bar{X} = 997.1.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{10} \left( \sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 10 \bar{X}^2 \right) = 15574.29,$$

$$\hat{\sigma} \approx 124.80.$$

故  $P\{X > 1300\}$  的最大似然估计为  $1 - \Phi\left(\frac{1300 - 997.1}{124.80}\right) = 0.008$ .

【例 6.9】设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

其中,  $\theta > -1$  是未知参数,  $X_1, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个容量为  $n$  的简单随机样本, 分别用矩估计法和最大似然估计法求  $\theta$  的估计量.

【解】总体  $X$  的数学期望  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$ ,

样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 令  $\bar{X} = \frac{\theta+1}{\theta+2}$ , 解之得未知参数  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ .

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观测值, 则似然函数为

$$L = \begin{cases} (\theta+1)^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^\theta, & 0 < x_i < 1 (i=1, 2, \dots, n) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $0 < x_i < 1 (i=1, 2, \dots, n)$  时,  $L > 0$ , 且

$$\ln L = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

令  $\frac{d \ln L}{d\theta} = 0$ , 解得  $\theta$  的最大似然估计值为  $\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$ ,

从而  $\theta$  的最大似然估计量为  $\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$ .

【例 6.10】设总体  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta}, & x \geq \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

其中  $\theta > 0, \theta, \mu$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本. 试求  $\theta, \mu$  的最大似然估计量.

【解】因为似然函数为

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}, & x_i \geq \mu, i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

于是  $\ln L = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\theta} \mu$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{\theta^2} \mu \quad ①$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta} > 0. \quad ②$$

由 ② 可知  $\ln L$  关于  $\mu$  单调增加, 即  $L(x_1, \dots, x_n; \theta, \mu)$  关于  $\mu$  单调增加, 又因为  $\mu \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$ , 故  $\mu$  的最大似然估计为

$$\hat{\mu} = \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}.$$

另外,由式①,令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ ,即得 $\theta$ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \min_{1 \leq i \leq n} \{X_i\},$$

从本例可以看出,最大似然估计可能在驻点,即似然方程的解上取得,也可能在未知参数的边界点上取得.

**【例 6.11】** 设  $Z = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本. 试求  $E(X)$  的最大似然估计.

**【解】** 因为  $E(X) = E(e^Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz$

$$= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dz = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}.$$

故  $E(X)$  为未知参数  $\mu$  与  $\sigma^2$  的函数,且分别为  $\mu$  与  $\sigma^2$  的单调增加函数. 由最大似然估计的性质可知,只须求出  $\mu, \sigma^2$  的最大似然估计. 因为对于总体  $X$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 对应地有总体  $Z = \ln X$  的样本  $Z_1 = \ln X_1, Z_2 = \ln X_2, \dots, Z_n = \ln X_n$ , 故易得  $\mu, \sigma^2$  的最大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\mu})^2.$$

所以有  $E(X)$  的最大似然估计量为

$$E(\hat{X}) = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} = \exp \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2 \right].$$

**【例 6.12】** 设总体  $X$  的概率分布为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$\theta^2$	$1-2\theta$

其中  $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$  是未知参数,利用总体  $X$  的如下样本值

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3,

求  $\theta$  的矩估计值和最大似然估计值.

**【解】**  $EX = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2 \times \theta^2 + 3 \times (1-2\theta) = 3-4\theta$ ,

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \times (3+1+3+0+3+1+2+3) = 2.$$

令  $EX = \bar{x}$ , 即  $3-4\theta = 2$ ,

解得  $\theta$  的矩估计值为  $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$ .

对于给定的样本值,似然函数为

$$L(\theta) = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln \theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = \frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)},$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0, \quad \text{解得 } \theta_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}.$$

因  $\frac{7+\sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$  不合题意, 所以  $\theta$  的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

### 题型二 评价估计的优劣

**提示** 无偏性、有效性一般按定义判断, 而一致性常用大数定律或重要结论来判断.

**【例 6.13】** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是随机变量  $X$  的一个样本, 试证: 估计量  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,

$W = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$  ( $\alpha_i \geq 0$  为常数,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ) 都是  $E(X)$  的无偏估计, 且  $\bar{X}$  的方差不超过  $W$  的方差.

**【证】** 因为  $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot nE(X) = E(X)$ ,

$$E(W) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X) = E(X) \sum_{i=1}^n \alpha_i = E(X),$$

所以  $\bar{X}, W$  均为  $E(X)$  的无偏估计.

$$\text{因为 } D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n} D(X),$$

$$D(W) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 D(X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 D(X) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) D(X).$$

又由于  $(n-1) \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$ , 即

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j}{n}.$$

$$\text{而 } \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = 1,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq \frac{1}{n}. \quad \text{故 } D(\bar{X}) \leq D(W).$$

**注** 也可用 Lagrange 乘数法求函数  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  在条件  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  下的条件极值而得证.

**【例 6.14】** 设从均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2 > 0$  的总体中分别抽取容量为  $n_1, n_2$  的两个独立样本, 样本均值分别记为  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ . 试证: 对于任意满足  $a+b=1$  的常数  $a$  和  $b$ ,  $T = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$  都是  $\mu$  的无偏估计, 并问  $a, b$  为多少时,  $D(T)$  达到最小?

**【分析】** 此类问题实质上是高等数学中的最值问题, 不同课程之间的联系须引起注意.

**【证明】** 设总体为  $X$ , 由已知有  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ , 于是

$$\begin{aligned} E(T) &= E(a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2) = aE(\bar{X}_1) + bE(\bar{X}_2) \\ &= aE(X) + bE(X) = (a+b)\mu = \mu. \end{aligned}$$

即  $T = a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$  是  $\mu$  的无偏估计. 因为



$$\begin{aligned} D(T) &= D(a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2) = a^2 D(\bar{X}_1) + b^2 D(\bar{X}_2) \\ &= a^2 \frac{\sigma^2}{n_1} + b^2 \frac{\sigma^2}{n_2} = \left[ \frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2} \right] \sigma^2. \end{aligned}$$

为了求  $D(T)$  的最小值, 令

$$\frac{dD(T)}{da} = \left[ \frac{2a}{n_1} - \frac{2(1-a)}{n_2} \right] \sigma^2 = 0.$$

解之得  $a = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ , 并且  $\frac{d^2 D(T)}{da^2} = \frac{2(n_1 + n_2)}{n_1 n_2} \sigma^2 > 0$ ,

故当  $a = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$  时,  $D(T)$  达到最小, 即此时有

$$a = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, b = \frac{n_2}{n_1 + n_2}.$$

**【例 6.15】** 设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自  $X$  的简单随机样本.

- (1) 求  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ ;
- (2) 求  $\hat{\theta}$  的方差  $D(\hat{\theta})$ ;
- (3) 讨论  $\hat{\theta}$  的无偏性和一致性(相合性).

**【解】** (1) 因为  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^\theta \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{1}{2}\theta$ .

于是, 令  $E(X) = \bar{X}$ , 这里  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 即  $\frac{1}{2}\theta = \bar{X}$ , 得  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ .

$$(2) D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n}D(X).$$

$$\text{因为 } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^\theta \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{6}{20}\theta^2,$$

$$\text{故 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^2}{20}. \text{ 于是 } D(\hat{\theta}) = \frac{1}{5n}\theta^2.$$

$$(3) \text{ 因为 } E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{1}{2}\theta = \theta,$$

故  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$  为  $\theta$  的无偏估计量. 又  $D(\hat{\theta}) = \frac{1}{5n}\theta^2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故

$\hat{\theta} = 2\bar{X}$  为  $\theta$  的一致估计.

### 题型三 区间估计或置信区间的命题

**提示** 区间估计可分为两类问题, 一种是直接求未知参数的置信区间, 即正问题, 这类问题只须按相应的公式计算; 另一种是已知置信区间或其长度反求置信区间中的未知量, 例如样本容量等, 即逆问题.

**【例 6.16】** 从一批钉子中随机抽取 16 枚, 测得其长度(单位: cm) 为

2.14, 2.10, 2.13, 2.15, 2.13, 2.12, 2.13, 2.10

2.15, 2.12, 2.14, 2.10, 2.13, 2.11, 2.14, 2.11

假设钉子的长度  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 在下列两种情况下分别求总体均值  $\mu$  的置信度为 90% 的置信区间.

(1) 已知  $\sigma = 0.01$ ; (2)  $\sigma$  未知.

【解】由观察值可得

$$\bar{x} = 2.125, \quad S = 0.01713.$$

(1) 已知  $\sigma = 0.01$ ,  $1 - \alpha = 0.90$ ,  $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ ,  $n = 16$ .

选取随机变量  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ .

由  $P\{|U| < u_{0.05}\} = 0.90$ , 查标准正态分布表得  $u_{0.05} = 1.645$ .

$$\text{计算} \quad \bar{x} - \frac{u_{0.05} \times \sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 - \frac{1.645 \times 0.01}{\sqrt{16}} = 2.121,$$

$$\bar{x} + \frac{u_{0.05} \times \sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 + \frac{1.645 \times 0.01}{\sqrt{16}} = 2.129.$$

故所求的置信区间为  $(2.121, 2.129)$ .

(2) 由于  $\sigma$  未知, 因此用随机变量  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ , 由  $P\{|T| < t_{0.05}(n-1)\} = 0.90$ ,

查  $t$  分布表得  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ .

$$\text{计算得} \quad \bar{x} - t_{0.05}(15) \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.125 - \frac{1.753 \times 0.01713}{\sqrt{16}} \approx 2.117,$$

$$\bar{x} + t_{0.05}(15) \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.125 + \frac{1.753 \times 0.01713}{\sqrt{16}} \approx 2.133.$$

故所求的  $\mu$  的置信度为 0.90 的区间为  $(2.117, 2.133)$ .

【例 6.17】随机地取某种炮弹 9 发作试验, 测得炮口速度的样本标准差  $S = 11(\text{m/s})$ . 设炮口速度  $X$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 求这种炮弹的炮口速度的标准差  $\sigma$  的 95% 的置信区间.

【解】 $1 - \alpha = 0.95$ ,  $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ,  $n = 9$ ,  $S = 11$ .

取随机变量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .

由  $P\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\} = 1 - \alpha$ ,

查  $\chi^2$  分布表, 得  $\chi_{0.025}^2(8) = 17.535$ ,  $\chi_{0.975}^2(8) = 2.18$ .

故  $\sigma$  的 95% 的置信区间为

$$\left[ \frac{\sqrt{8} \times 11}{\sqrt{17.535}}, \frac{\sqrt{8} \times 11}{\sqrt{2.18}} \right] = (7.4, 21.1).$$

【例 6.18】假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体  $X$  的简单随机样本值, 已知  $Y = \ln X$  服从正态分布  $N(\mu, 1)$ .

(1) 求  $X$  的数学期望  $E(X)$  (记  $E(X)$  为  $b$ );

(2) 求  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求  $b$  的置信度为 0.95 的置信区间.

**【分析】**  $Y$  的分布已知, 而  $X = e^Y$ , 于是, 由一个随机变量函数的数学期望公式即可求得  $E(X)$ , 由于  $\mu$  为正态总体  $Y$  的均值, 于是由单正态总体, 方差已知时区间估计公式即得  $\mu$  的置信区间,  $b$  为  $\mu$  的函数, 利用此函数关系即可求得  $b$  的置信区间.

**【解】** (1) 因  $Y$  的密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}, -\infty < y < +\infty.$$

于是, (令  $t = y - \mu$ )

$$\begin{aligned} b = E(X) &= E(e^Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t+\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} dt = e^{\mu+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(2) 当置信度  $1-\alpha = 0.95$  时,  $\alpha = 0.05$ , 从而置信水平  $\alpha = 0.05$  的双侧分位数  $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$ , 总体  $Y \sim N(\mu, 1)$ . 故  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间是

$$\left( \bar{Y} - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}}, \bar{Y} + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{4}} \right),$$

其中,  $\bar{Y}$  表示总体  $Y$  的样本均值. 于是, 将已知数据代入得

$$\bar{y} = \frac{1}{4} (\ln 0.5 + \ln 0.8 + \ln 1.25 + \ln 2) = \frac{1}{4} \ln 1 = 0,$$

故  $\mu$  的 0.95 置信区间为  $(-0.98, 0.98)$ .

(3) 因为  $b = e^{\mu+\frac{1}{2}}$ , 而  $e^x$  单调递增, 故  $b$  的 0.95 置信区间为  $(e^{-0.98+\frac{1}{2}}, e^{0.98+\frac{1}{2}})$ , 即  $(e^{-0.48}, e^{1.48})$ .

**【例 6.19】** 设  $X_1, \dots, X_{2n}$  为来自正态总体  $N(\mu_1, 18)$  的样本,  $Y_1, \dots, Y_n$  是来自正态总体  $N(\mu_2, 16)$  的样本, 要使  $\mu_1 - \mu_2$  的 95% 置信区间的长度不超过  $l$ , 问  $n$  至少要取多大?

**【分析】** 因两个总体的方差已知, 于是可选用对应的区间估计公式而求得  $n$ .

**【解】** 因为置信区间的下限、上限分别为

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}.$$

于是置信区间的长度

$$\begin{aligned} L &= 2u_{0.025} \sqrt{\frac{18}{2n} + \frac{16}{n}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{n}} \times 1.96 \leq l. \end{aligned}$$

故  $n \geq \frac{384.16}{l^2}$ . 即  $n$  至少要取  $\left[ \frac{384.16}{l^2} \right] + 1$  (假定  $\frac{384.16}{l^2}$  为非正整数).

习 题 六

1. 填空题.

(1) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 若  $\sigma^2$  已知, 总体均值  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间为:

$$\left( \bar{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right), \text{ 则 } \lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 设由来自正态总体  $X \sim N(\mu, 0.9^2)$  容量为 9 的简单随机样本, 得样本均值  $\bar{X} = 5$ , 则未知参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 设  $X_1, X_2$  为来自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 若  $CX_1 + \frac{1}{1999}X_2$  为  $\mu$  的一个无偏估计, 则  $C = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自总体  $X \sim U(\theta, \theta + 1) (\theta > 0)$  的样本, 则  $\theta$  的矩估计量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ; 最大似然估计量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $a, b$  为常数, 且  $0 < a < b$ , 则随机区间

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{b}, \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{a} \right]$$

的长度  $L$  的数学期望为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 选择题.

(1) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  已知, 则总体均值  $\mu$  的置信区间长度  $l$  与置信度  $1 - \alpha$  的关系是

A. 当  $1 - \alpha$  缩小时,  $l$  缩短.

B. 当  $1 - \alpha$  缩小时,  $l$  增大.

C. 当  $1 - \alpha$  缩小时,  $l$  不变.

D. 以上说法均错. 【   】

(2) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知, 若样本容量  $n$  和置信度  $1 - \alpha$  均不变, 则对于不同的样本观测值, 总体均值  $\mu$  的置信区间的长度

A. 变长.

B. 变短.

C. 不变.

D. 不能确定. 【   】

(3) 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且同分布,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,

$D(X_i) = \sigma^2$ , 则  $S$

A. 是  $\sigma$  的一致估计.

B. 是  $\sigma$  的无偏估计.

C. 是  $\sigma$  的是通过似然函数求的.

D. 与  $\bar{X}$  相互独立. 【   】

(4) 设  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计, 且  $D(\hat{\theta}) \neq 0$ , 则  $\hat{\theta}^2$  必为  $\theta^2$  的

A. 无偏估计.

B. 有偏估计.

C. 一致估计.

D. 有效估计. 【   】

(5) 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为取自总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的样本, 则  $\mu^2 + \sigma^2$  的矩估计量为

A.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$

B.  $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$

C.  $\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$

D.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$  【   】

(6) 设总体  $X$  的分布中未知参数  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间是  $[T_1, T_2]$ , 即

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha,$$

则下列说法正确的是

- A. 对  $T_1, T_2$  的观测值  $t_1, t_2, \theta \in [t_1, t_2]$ . B.  $\theta$  以  $1 - \alpha$  的概率落入区间  $[T_1, T_2]$ .  
C. 区间  $[T_1, T_2]$  以  $1 - \alpha$  的概率包含  $\theta$ . D.  $\theta$  的数学期望  $E(\theta)$  必属于  $[T_1, T_2]$ .

【 】

### 3. 计算与证明题.

- (1) 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的 Poisson 分布,  $X_1, \dots, X_n$  为样本, 试求  $\lambda$  的矩估计和最大似然估计.  
(2) 设总体  $X$  服从  $(a, b)$  上的均匀分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本, 试求  $a^3, b^3$  的矩估计和最大似然估计.

- (3) 设总体  $X$  的密度函数为 
$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x^{-1} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0,$$

其中,  $-\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 > 0$  为未知参数, 试求  $\mu$  和  $\sigma^2$  的最大似然估计.

- (4) 设总体  $X$  服从  $(0, \theta)$  上的均匀分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本.

- ① 求  $\theta$  的矩估计  $\hat{\theta}_1$ , 并讨论其无偏性和一致性;  
② 求  $\theta$  的最大似然估计  $\hat{\theta}_2$ , 并讨论其无偏性和一致性.

- (5) 设总体  $X$  的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda a x^{a-1} e^{-\lambda x^a}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0, a > 0)$$

据来自总体  $X$  的样本  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 求未知参数  $X$  的最大似然估计量.

- (6) 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为取自总体  $X$  的样本,  $\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , 证明

- ①  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$  为  $E(X)$  的无偏估计;

- ② 在上述所有无偏估计中, 以  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  最有效.

- (7) 设某产品的性能指标  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 现随机抽取 20 个产品进行检测, 检测后经计算得这些产品的性能指标均值  $\bar{X} = 5.21$ , 方差  $S^2 = 0.049$ , 试求  $X$  的标准差  $\sigma$  的置信度为 0.95 的置信区间.  
(8) 设某产品的性能指标在技术改进前服从正态分布  $N(\mu_1, 2.18^2)$ , 而在改进后服从  $N(\mu_2, 1.76^2)$ , 现对改进前的产品随机抽取 200 个, 算得均值为 5.32, 改进后的产品抽取 100 个, 算得均值为 5.76, 试求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 95% 的置信区间.

### 参 考 答 案

1. (1)  $\lambda = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ . (2)  $(4.412, 5.588)$ . (3)  $\frac{1998}{1999}$ . (4)  $\bar{X} - \frac{1}{2}, \min\{X_i\}$ . (5)  $n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sigma^2$ .

2. (1) A (2) C (3) A (4) B (5) D (6) C

3. (1)  $\lambda$  的矩估计  $\hat{\lambda}_1 = \bar{X}$ ,  $\lambda$  的最大似然估计  $\hat{\lambda}_2 = \bar{X}$ , 其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

(2)  $a^3, b^3$  的矩估计为  $\hat{a}^3 = (\bar{X} - \sqrt{3M_2})^3, \hat{b}^3 = (\bar{X} + \sqrt{3M_2})^3$ . 其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, M_2 =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2; a^3, b^3$  的最大似然估计为  $\hat{a}^3 = X_{(1)}^3, \hat{b}^3 = X_{(n)}^3$ , 其中  $X_{(1)}, X_{(n)}$  分别为样本的最小、最大次序统计量.

(3)  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\mu})^2$ .

(4) ①  $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ , 且具有无偏性和一致性; ②  $\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ , 为有偏估计, 但有一致性.

(5)  $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^a}$ . (6) 利用多元函数求极值为 Lagrange 乘数法.

(7) 先求  $\sigma^2$  的置信区间  $[0.0282, 0.1043]$ , 于是得  $\sigma$  的置信区间  $[0.168, 0.323]$ .

(8) 为两正态总体下, 方差已知, 均值差的区间估计. 置信区间为  $[-0.899, 0.019]$ .

## 第七章 假设检验

### 第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析

#### 一、显著性检验的基本思想

为了对总体的分布类型或分布中的未知参数作出推断,首先对它们提出一个假设  $H_0$ ,然后在  $H_0$  为真的条件下,通过选取恰当的统计量来构造一个小概率事件,若在一次试验中,小概率事件居然发生了,就完全有理由拒绝  $H_0$  的正确性,否则没有充分理由拒绝  $H_0$  的正确性,从而接受  $H_0$ ,这就是显著性检验的基本思想.

#### 二、假设检验的基本步骤

- (1) 由实际问题提出原假设  $H_0$  (与备选假设  $H_1$ );
- (2) 选取适当的统计量,并在  $H_0$  为真的条件下确定该统计量的分布;
- (3) 根据问题要求确定显著性水平  $\alpha$  (一般题目中会给定),从而得到拒绝域;
- (4) 由样本观测值计算统计量的观测值,看是否属于拒绝域,从而对  $H_0$  作出判断.

#### 三、两类错误

当  $H_0$  本来是正确的,但检验后作出了拒绝  $H_0$  的判断,这种错误称为第一类错误,也称拒真错误;当  $H_0$  本来是不正确的,但检验后作出了接受  $H_0$  的判断,这种错误称为第二类错误,也称受伪错误.

### 四、正态总体未知参数的假设检验(见表 7-1)

表 7-1 (检验水平为  $\alpha$ )

	原假设 $H_0$	$H_0$ 下的检验统计量及分布	备择假设 $H_1$	$H_0$ 的拒绝域
一个正态总体	$\mu = \mu_0$	当 $\mu = \mu_0$ 时, $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\mu \neq \mu_0$	$ U  > u_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\begin{cases} \bar{X} > \mu_0 + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{X} < \mu_0 - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$
	$\mu \leq \mu_0$		$\mu > \mu_0$	$U > u_\alpha$ 即 $\bar{X} > \mu_0 + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	$\mu \geq \mu_0$		$\mu < \mu_0$	$U < -u_\alpha$ 即 $\bar{X} < \mu_0 - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	$\mu = \mu_0$		$\mu \neq \mu_0$	$ T  > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\begin{cases} \bar{X} > \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \\ \bar{X} < \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \end{cases}$
一个正态总体	$\mu \leq \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\mu > \mu_0$	$T > t_\alpha(n-1)$ 即 $\bar{X} > \mu_0 + t_\alpha(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
	$\mu \geq \mu_0$		$\mu < \mu_0$	$T < -t_\alpha(n-1)$ 即 $\bar{X} < \mu_0 - t_\alpha(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	当 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, $W' = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \sim \chi^2(n)$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$W' > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $W' < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$		$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$W' > \chi_\alpha^2(n)$
一个正态总体	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$W' < \chi_{1-\alpha}^2(n)$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	当 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$W > \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $W < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$		$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$W > \chi_\alpha^2(n-1)$
	$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$W < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
两个正态总体	$\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 已知 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$	当 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时, $U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ U  > u_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$		$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$U > u_\alpha$
	$\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$		$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$U < -u_\alpha$
	$\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 未知但 $\sigma_1^2 \parallel \sigma_2^2$	当 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时, $T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$ T  > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2 \leq \delta$		$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$T > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$
	$\mu_1 - \mu_2 \geq \delta$		$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$T < -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时, $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F < F_{\frac{\alpha}{2}}^{-1}(n_2 - 1, n_1 - 1)$
	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$		$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F > F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$
两个正态总体	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$		$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F < F_\alpha^{-1}(n_2 - 1, n_1 - 1)$



## 五、假设检验与区间估计的联系

参数的假设检验与区间估计虽然是统计推断的两种不同形式,但它们也有密切的联系.下面通过一种具体的情形予以说明:设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知,  $x_1, \dots, x_n$  为样本观测值. 对给定的显著水平  $\alpha$ , 检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

易知选取检验统计量  $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ , 可得  $\mu_0$  的接受域为

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < u_{\frac{\alpha}{2}}$$

即

$$\mu_0 \in \left( \bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (1)$$

另外, 由单正态总体在方差已知时,  $\mu$  的区间估计公式可知, 此时  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计是  $\left( \bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ , 这正好为式 (1). 因此由假设检验 ( $\mu = \mu_0$ ) 的接受域即可得到  $\mu$  的区间估计, 而且不难发现反之亦然. 其他情形也有类似的结果. 但也要指出的是在统计结果的解释上, 这两种统计推断形式是有差别的, 在此不再赘述.

## 第 2 节 重要题型的解题方法和技巧

### 题型一 正态总体的均值和方差的假设检验

**提示** 假设检验的问题一般可按下列步骤进行:

- (1) 根据具体问题作出假设;
- (2) 选取相应的检验统计量;
- (3) 写出拒绝域或接受域;
- (4) 将已知数据代入统计量进行计算即可做出判断.

**【例 7.1】** 食品厂用自动装罐机装罐头食品, 每罐标准重量为 500 g, 每隔一定时间需要检验机器的工作情况, 现抽 10 罐, 测得其重量(单位: g):

495, 510, 505, 498, 503, 492, 502, 512, 497, 506.

假设重量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 试问机器工作是否正常 ( $\alpha = 0.02$ )?

**【解】** ①  $H_0: \mu = 500$ , ② 因  $\sigma^2$  未知, 所以选取统计量, 在  $H_0$  成立的条件下

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 500}{S/\sqrt{10}} \sim t(9).$$

由样本数据, 得  $\bar{x} = 502$ ,  $s = 6.5$ ,  $T_0 = \frac{502 - 500}{6.5/\sqrt{10}} = 0.97$ .

查  $t$  分布表, 得  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.01}(9) = 2.82$ .

因为  $|T_0| = 0.97 < 2.82$ , 故可认为自动装罐机工作正常.

**【例 7.2】** 用包装机包装某种洗衣粉, 在正常情况下, 每袋重量为 1000 g, 标准差  $\sigma$  不能超过 15 g.

假设每袋洗衣粉的净重服从正态分布. 某天检验机器工作的情况, 从已装好的袋中随

机抽取 10 袋,测得其净重(单位:g) 为

1020, 1030, 968, 994, 1014, 998, 976, 982, 950, 1048.

问这天机器是否工作正常( $\alpha = 0.05$ )?

【解】①  $H_0: \sigma^2 \leq 15^2$ , ② 选取统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ .

对于  $\alpha = 0.05$ , 查  $\chi^2$  分布表, 得  $\chi_{0.05}^2(9) = 16.919$ . 由样本数据, 得

$$\bar{x} = 998, \quad s = 30.23, \quad \chi_0^2 = \frac{9 \times 30.23^2}{15^2} = 36.5540.$$

因为  $\chi_0^2 = 36.554 > \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$ ,

故拒绝接受  $H_0$ , 即包装机在这天工作不正常, 应调整.

【例 7.3】设  $(X_1, \dots, X_m)$  是来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的样本,  $(Y_1, \dots, Y_n)$  是来自正态总体  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的样本, 其中  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$  均未知, 但  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , 试在显著性水平  $\sigma$  下, 检验下列假设

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta,$$

$\delta$  为已知常数.

【分析】首先备选假设  $H_1$  不写成  $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ , 是因为根据实际问题不须考虑或不可能有  $\mu_1 - \mu_2 < \delta$  的情形, 其次要在  $H_0$  为真的条件下找到恰当的统计量, 这与  $\delta = 0$  的情形是类似的.

【解】选取下列检验统计量

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \sigma}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2),$$

其中

$$S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}.$$

于是对显著性水平  $\alpha$ , 可得拒绝域

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2).$$

其中  $t_\alpha(m+n-2)$  为  $t(m+n-2)$  分布的  $\alpha$  分位数,

即

$$P\left\{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \geq t_\alpha(m+n-2)\right\} = \alpha.$$

● 本题为单边检验问题, 不难发现它与双边检验并没有什么本质的不同, 只是拒绝域仅在一侧选取.

## 题型二 有关两类错误的命题

【提示】正确理解两类错误的含义是求解的关键.

【例 7.4】设  $(X_1, \dots, X_n)$  是来自正态总体  $N(\mu, 4)$  的一个样本. 在显著性水平  $\alpha$  下检验

$$H_0: \mu = 0, \quad H_1: \mu \neq 0.$$

现取拒绝域  $W = \left\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sqrt{n} \left| \frac{\bar{x}}{2} \right| > u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$ . 当实际情况为  $\mu = 1$  时, 试求犯第二类错误的概率.

【分析】第二类错误的概率为  $P(\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假}) = P(\text{样本观测值不属于拒绝域} \mid \mu = 1)$

【解】设犯第二类错误的概率为  $\beta$ , 则因为  $H_0$  不成立,  $\mu = 1$  时, 总体  $X \sim N(1, 4)$ , 于是  $\bar{X} \sim N\left(1, \frac{4}{n}\right)$ , 故

$$\begin{aligned}\beta &= P\left\{\sqrt{n} \frac{|\bar{X}|}{2} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = P\left\{|\bar{X}| \leq \frac{2u_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\} = \Phi\left(u_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2} + u_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2} - u_{\frac{\alpha}{2}}\right).\end{aligned}$$

① 当样本容量  $n$  与显著性水平  $\alpha$  给定时即可查表算出  $\beta$ , 当  $n$  不大时, 一般  $\beta$  都比较大, 这也是显著性检验中为什么“拒绝  $H_0$ ”是可靠的, 而“接受  $H_0$ ”是不大可靠的原因. 另外可以看出当容量  $n \rightarrow \infty$  时,  $\beta \rightarrow 0$ , 故要两类错误都尽可能小, 必须将容量取得足够大.

【例 7.5】设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  未知,  $x_1, \dots, x_n$  为来自  $X$  的样本值, 现对  $\mu$  进行假设检验. 若在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下拒绝了  $H_0: \mu = \mu_0$ , 则当显著性水平改为  $\alpha = 0.01$  时, 下列结论正确的是

(A) 必拒绝  $H_0$ .

(B) 必接受  $H_0$ .

(C) 第一类错误的概率变大.

(D) 可能接受, 也可能拒绝  $H_0$ .

【 】

【解】因为此时假设检验的拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

故对固定的样本值,  $\alpha$  变小时, 上述不等式不一定仍成立, 所以选(D).

### 习 题 七

#### 1. 填空题.

(1) 设  $(X_1, \dots, X_n)$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\sigma^2$  未知, 现要检验假设  $H_0: \mu = \mu_0$ , 则应选取的统计量是 \_\_\_\_\_; 当  $H_0$  成立时, 该统计量服从 \_\_\_\_\_ 分布.

(2) 在显著性检验中, 若要使犯两类错误的概率同时变小, 则只有增加 \_\_\_\_\_.

#### 2. 单项选择题.

(1) 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知,  $x_1, \dots, x_n$  为取自  $X$  的样本观测值, 现在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下接受了  $H_0: \mu = \mu_0$ . 若将  $\alpha$  改为 0.01 时, 下面结论中正确的

A. 必拒绝  $H_0$ .

B. 必接受  $H_0$ .

C. 犯第一类错误概率变大.

D. 犯第二类错误概率变小.

【 】

(2) 在假设检验中,  $H_0$  表示原假设,  $H_1$  为备选假设, 则称为犯第二类错误的是

A.  $H_1$  不真, 接受  $H_1$ .

B.  $H_0$  不真, 接受  $H_1$ .

C.  $H_0$  不真, 接受  $H_0$ .

D.  $H_0$  为真, 接受  $H_1$ .

【 】

(3) 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\mu$  和  $\sigma^2$  为未知参数, 且

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; Q^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

则检验假设  $H_0: \mu = 0$  时, 应选取的统计量为

A.  $\sqrt{n(n-1)} \frac{\bar{X}}{Q}.$

B.  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}}{Q}.$

C.  $\sqrt{n-1} \frac{\bar{X}}{Q}.$

D.  $\sqrt{n} \frac{\bar{X}}{Q^2}.$

【 】

### 3. 计算题.

- (1) 设用过去的铸造方法,零件强度服从正态分布,其标准差为  $1.6(\text{kg}/\text{mm}^2)$ . 为了降低成本,改变了铸造方法,测得用新方法铸出的零件强度如下:

51.9, 53.0, 52.7, 54.1, 53.2,  
52.3, 52.5, 51.1, 54.7.

问改变方法后零件强度的方差是否发生了显著变化(取显著性水平  $\alpha = 0.05$ )?

- (2) 一自动车床加工零件的长度服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 车床正常工作时,加工零件长度均值为 10.5, 经过一段时间的生产后,要检验一下这一车床是否工作正常. 为此随机抽取该车床加工的零件 31 个,算得均值为 11.08, 标准差为 0.516. 设加工零件长度的方差不变,问此车床是否可以认为工作正常? ( $\alpha$  取 0.05)
- (3) 设有甲、乙两种零件彼此可以代用,但乙零件比甲零件制造简单、造价低,经过试验获得它们的抗压强度如下表所示.(单位:  $\text{kg}/\text{cm}^2$ )

甲种零件	88	87	92	90	91
乙种零件	89	89	90	84	88

已知甲、乙两种零件的抗压强度分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ . 问能否在保证抗压强度质量下,用乙种零件代替甲种零件? ( $\alpha$  取 0.05)

- (4) 在正态总体  $X \sim N(\mu, 1)$  中抽取容量为 100 的样本,经计算样本均值为 5.32,

① 试检验  $H_0: \mu = 5$  是否成立(取  $\alpha = 0.01$ ),

② 计算上述检验在  $H_1: \mu = 4.8$  下犯第二类错误的概率.

### 参 考 答 案

1. (1)  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}, t(n-1)$ . (2) 样本容量.

2. (1) B (2) C (3) A

3. (1)  $\mu$  未知, 方差的检验,  $H_0: \sigma^2 = 1.6^2$ .

$$\chi_{0.025}^2(8) < \chi^2 = \frac{(9-1)S^2}{\sigma^2} = 3.73 < \chi_{0.975}^2(8)$$

故接受  $H_0$ , 即方差没有显著变化.

(2) 选取检验统计量  $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}, H_0: \mu = \mu_0 = 10.5$ , 检验结果为不能认为车床工作正常.

$$(3) H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}},$$

检验结果为接受  $H_0$ , 即可用乙代替甲.

(4) ① 拒绝  $H_0$ . ②  $\beta = 0.7257$ .

# 附录 课后习题答案详解

## 第一篇 高等数学

### 第一章 函数、极限和连续

#### 习题一

##### 1. 填空题

(1)【解】可得  $e^e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ex} = \int_{-\infty}^e te^t dt = (te^t - e^t) \Big|_{-\infty}^e = ae^e - e^e$ , 所以  $a = 2$ .

(2)【解】  $\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + n} < \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + i} < \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + n + 1}$ ,

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$ ,

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}$ .

(3)【解】因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{ax - \sin x}{\ln(1+t^3)} dt = c \neq 0$ , 所以  $b = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} \stackrel{a=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} = c \neq 0$ , 即  $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$ .

(4)【解】  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -1$ .

(5)【解】  $f[f(x)] = 1$ .

(6)【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2$ .

(7)【解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + a \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + a \cos x}{1} = f'(0) + a = b + a = A$ .

(8)【解】  $0 \neq k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + bx e^x) - 1 - ax}{x^3(1+bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + bx e^x - 1 - ax}{x^3}$   
 $\xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + bx e^x + b e^x - a}{3x^2} \stackrel{b+1=a}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2b e^x + bx e^x}{6x}$ .

所以  $2b+1=0, b=-\frac{1}{2}, a=\frac{1}{2}$ .

$$(9) \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

$$(10) \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1990}}{n^k - (n-1)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1990n^{1989}}{kn^{k-1} + \dots} = A,$$

$$\text{所以 } k-1 = 1990, k = 1991, \frac{1}{k} = A, A = \frac{1}{1991}.$$

## 2. 选择题

$$(1) \text{【解】} \text{令 } f(x) = 1, \varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}, \text{ 则 } \varphi[f(x)] = 1, f[\varphi(x)] = 1, \text{ 排除 A, C. 令 } \varphi(x) =$$

$$\begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ -1 & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}, [\varphi(x)]^2 = 1, \text{ 排除 B, D. 若 } g(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} \text{ 在 } (-\infty + \infty) \text{ 内连续, 则 } \varphi(x) = g(x)f(x) \text{ 在}$$

$(-\infty, +\infty)$  内连续, 矛盾. 所以 D 是答案.

(2)【解】B 是答案.

$$(3) \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \text{ 故选 D.}$$

$$(4) \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0 = f(0) = a, \text{ 故选 A.}$$

$$(5) \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \times (n+1)^2} \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = 1, \text{ 故选 B.}$$

$$(6) \text{【解】} 8 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^5 x^{100} + \dots}{x^{100} + \dots} = a^5, a = \sqrt[5]{8}, \text{ 故选 C.}$$

(7)【解】C 为答案.

$$(8) \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2^x \ln 2 + 3^x \ln 3) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \neq 1, \text{ 故选 B.}$$

$$(9) \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)(1+2x)(1+3x) + a = 0, 1+a = 0, a = -1, \text{ 故选 A.}$$

$$(10) \text{【解】} 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{\cos^2 x} + b \sin x}{\frac{-2c}{1-2x} + 2x d e^{-x^2}} = -\frac{a}{2c},$$

所以  $a = -4c$ , 故选 D.

## 3. 计算题

$$(1) \text{①【解】} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x}} = e.$$

$$\text{②【解】} \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - \sin x}{1}} = e^2.$$

$$\text{③【解】} \text{令 } y = \frac{1}{x}, \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (\sin 2y + \cos y)^{\frac{1}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2y + \cos y)}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cos y - \sin y}{\sin 2y + \cos y}} = e^2.$$

$$\text{④【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$(2) \text{①【解】} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{3x-1})}{\arcsin 2 \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{2 \sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2 \sqrt[3]{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

$$\text{②【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - x^2(1 - \cos x^2)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x^2 + 1)\cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\cos^2 x + 2(x^2 + 1)\cos x \sin x}{4x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x\cos^2 x + \sin 2x}{4x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cos x \sin x}{4x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos^2 x + 4x\cos x \sin x + 2\cos 2x}{12x^2} + \frac{1}{2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos^2 x + 2\cos 2x}{12x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\cos x \sin x - 4\sin 2x}{24x} + \frac{5}{6} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin 2x}{24x} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{3} \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x \cdot \sqrt{1-x^2})}{\tan x \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x \cdot \sqrt{1-x^2})}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cos x} \left( -\sqrt{1-x^2} \sin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos x \right)}{2x} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{2x \cos x} + \frac{1}{2(1-x^2)} \right) = -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \textcircled{1} \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^2 - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2 - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{2n}}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{令 } x = \frac{1}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 - \left( 1 + x \right)^{\frac{2}{x}}}{x} \\
&= -2 \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)' = -2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \\
&= -2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = e^2.
\end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\ln \sqrt[n]{n}} \stackrel{\text{令 } \sqrt[n]{n} = x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{3} \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( x + \frac{a}{n} \right) + \left( x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left( x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right] \cdot \frac{1}{n} \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n-1)x + \frac{1+1+\cdots+(n-1)a}{n} \right) \frac{1}{n} \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} a = x + \frac{1}{2}a.
\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{【解】} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}} \right)$$

$$\forall i < j, \frac{1}{1+\frac{1}{n^i}} < \frac{1}{1+\frac{1}{n^j}}, \text{ 从而 } \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^i}\right)^{\frac{1}{i}}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^j}\right)^{\frac{1}{j}}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^j}\right)^{\frac{1}{j}}}$$

$$\text{因此 } \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}} \right) > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} \right) = 1.$$

$$\textcircled{5} \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n & \stackrel{x=1/n, c=b/a}{=} a \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+c^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \\ & = a e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+c^x}{2} - 1 \right) \frac{1}{x}} = a e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+c^x-2}{2x}} = a e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c^x \ln c}{2}} = a e^{\frac{\ln c}{2}} = a \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{【解】} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2 - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2}{x^2}(1 - \cos x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sin x}{3} = 0. \end{aligned}$$

所以,  $f'(0) = 0$ , 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

5. 求下列函数的间断点并判别类型

$$\textcircled{1} \text{【解】} f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\frac{1}{x} - 1}{2\frac{1}{x} + 1} = 1, f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\frac{1}{x} - 1}{2\frac{1}{x} + 1} = -1,$$

所以  $x = 0$  为第一类间断点.

$$\textcircled{2} \text{【解】} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} \cdot x = \begin{cases} -x, & |x| \geq 1 \\ x, & |x| < 1 \end{cases}$$

显然,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ , 所以,  $x = 1, x = -1$  为第一类间断点.

$$\textcircled{3} \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\sin 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0. \text{ 所以 } x = 0 \text{ 为第一类跳跃间断点;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x^2 - 1} \text{ 不存在. 所以 } x = 1 \text{ 为第二类间断点;}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ 不存在, 而 } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{x(2x + \pi)}{2\cos x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{4x + \pi}{-2\sin x} = -\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } x = -\frac{\pi}{2} \text{ 为第一类可去间断点;}$$

$$\lim_{x \rightarrow -k\pi - \frac{\pi}{2}} \frac{x(2x + \pi)}{2\cos x} = \infty, (k = 1, 2, \dots) \text{ 所以 } x = -k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ 为第二类无穷间断点.}$$

$$\begin{aligned} 6. \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 + x + b \int_0^x e^{-t^2} dt}{x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2 + 1 + be^{-x^2}}{5x^4} \stackrel{\text{分子极限为 } 0, \text{ 所以 } b = -1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2 + 1 - e^{-x^2}}{5x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6ax + 2xe^{-x^2}}{20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3a + xe^{-x^2}}{10x^2} \\ &\stackrel{\text{分子极限为 } 0, \text{ 所以 } a = -\frac{1}{3}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2}}{20x} = -\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

7. 【解】由于  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点,

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} \text{ 存在. 所以}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)] = 0. \text{ 即}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x + \sin^2 x - (\alpha + \beta \sin x)^2}{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} + (\alpha + \beta \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \alpha^2) + (1 - 2\alpha\beta)\sin x + (1 - \beta^2)\sin^2 x}{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} + (\alpha + \beta \sin x)} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha} = 1 - \alpha, \end{aligned}$$



所以  $\alpha = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2\beta) + (1 - \beta^2) \sin x}{\sin x \cdot (\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} + (1 + \beta \sin x))}.$$

若上式极限存在, 必须分子为 0, 即  $1 - 2\beta = 0, \beta = \frac{1}{2}$ .

8. 【解】因为极限存在, 从而  $a = \frac{1}{5}$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} [(x^5 + 7x^4 + 2)^a - x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{令 } y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 + 7y + 2y^5)^{\frac{1}{5}} - 1}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{5} (1 + 7y + 2y^5)^{-\frac{4}{5}} (7 + 10y^4) = \frac{7}{5}. \text{ 所以 } b = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

9. 【解】当  $\alpha \leq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \sin \frac{1}{x})$  不存在, 所以  $x = 0$  为第二类间断点;

当  $\alpha > 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha \sin \frac{1}{x}) = 0$ , 所以  $\beta = -1$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  连续;  $\beta \neq -1$  时,  $x = 0$  为第一类跳跃间断点.

$$10. \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} + f(x)}{x^2} = 0.$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x} + f(x) \right) = 0$ .  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内二阶可导, 所以  $f(x), f'(x)$  在  $x = 0$  处连续. 因此

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 3x}{x} = -3.$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} + f(x)}{x^2} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} - 3 + f(x) + 3}{x^2} = 0, \text{ 即}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \frac{\sin 3x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{f(x) + 3}{x^2} = 0 \times \frac{9}{2} = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}.$$

$$\text{因为 } \frac{9}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x},$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 9. \text{ 即 } f''(0) = 9.$$

## 第二章 导数与微分

### 习题二

#### 1. 填空题

$$(1) \text{【解】} \frac{d}{dx} \int_x^0 x \cos t^2 dt = \int_x^0 \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4.$$

$$(2) \text{【解】} f'(x) = \frac{-1 - x - 1 + x}{(1+x)^3} = \frac{(-1)^1 2 \cdot 1!}{(1+x)^{1+1}}, \text{ 假设 } f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 2 \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}, \text{ 则}$$

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 2 \cdot (k+1)!}{(1+x)^{k+1+1}}, \text{ 所以 } f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(3) \text{【解】} \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{2t}, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \left( -\frac{\sin t}{2t} \right)'_t \frac{dt}{dx} = -\frac{2t \cos t - 2 \sin t}{4t^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}.$$

$$(4) \text{【解】} \text{隐函数求导得: } e^{xy} (1 + y') - (y + xy') \sin xy = 0,$$

即得:  $y' = \frac{y \sin xy - e^{xy}}{e^{xy} - x \sin xy}$ .

(5)【解】由  $f(-x) = -f(x)$ , 得  $-f'(-x) = -f'(x)$ , 所以  $f'(-x) = f'(x)$ , 所以  $f'(x_0) = f'(-x_0) = k$ .

(6)【解】 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - n\Delta x)}{\Delta x}$   
 $= m \lim_{m\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + m\Delta x) - f(x_0)}{m\Delta x} + n \lim_{n\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - n\Delta x) - f(x_0)}{-n\Delta x} = (m+n)f'(x_0)$ .

(7)【解】 $k \lim_{k\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k\Delta x) - f(x_0)}{k\Delta x} = \frac{1}{3}f'(x_0)$ , 所以  $kf'(x_0) = \frac{1}{3}f'(x_0)$ , 所以  $k = \frac{1}{3}$ .

(8)【解】 $\frac{d}{dx} \left[ f\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = -f'\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x}$ , 所以  $f'\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{2}$ .

令  $x^2 = 2$ , 所以  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ .

(9)【解】 $\frac{dy}{dx} = f'(x) \cos f(x) f'[\sin f(x)] \cos(f[\sin f(x)])$ .

(10)【解】对隐函数求导得:  $e^{2+xy}(2+y') - (y+xy') \sin(xy) = 0$ .

所以切线斜率  $k = y'(0) = -2$ . 法线斜率为  $\frac{1}{2}$ , 法线方程为

$y-1 = \frac{1}{2}x$ , 即  $x-2y+2=0$ .

## 2. 选择题

(1)【解】“ $\Leftarrow$ ”: 因为  $F'(0)$  存在, 所以  $F'(0^+) = F'(0^-)$ , 于是

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f(x) - f(0)) + f(x) \sin x}{x} = f'(0) + f(0).$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(f(x) - f(0)) - f(x) \sin x}{x} = f'(0) - f(0).$$

所以  $f'(0) + f(0) = f'(0) - f(0)$ ,  $2f(0) = 0$ ,  $f(0) = 0$ .

“ $\Rightarrow$ ”: 已知  $f(0) = 0$ , 所以

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f(x) - f(0)) + f(x) \sin x}{x} = f'(0) + f(0) = f'(0).$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(f(x) - f(0)) - f(x) \sin x}{x} = f'(0) - f(0) = f'(0).$$

所以  $F'(0) = f'(0)$  存在. 即答案为 A.

(2)【解】因为  $f(x)$  是连续函数,  $F'(x) = f(e^{-x})(e^{-x})' - f(x) = -e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$ , 所以答案是 A.

(3)【解】因为  $f(x) = [f(x)]^2$ , 且  $f(x)$  具有任意阶导数,

所以  $f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2![f(x)]^3$ . 假设  $f^{(k)}(x) = k![f(x)]^{k+1}$ ,

所以  $f^{(k+1)}(x) = (k+1)k![f(x)]^k f'(x) = (k+1)![f(x)]^{k+2}$ , 由数学归纳法知:

$f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$  对一切正整数成立. 即答案为 A.

(4)【解】因为  $f(1+x) = af(x)$ , 且  $f'(0) = b$ ,

$$\text{所以 } b = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a}f(1+x) - \frac{1}{a}f(1)}{x} = \frac{1}{a}f'(1),$$

所以  $f'(1) = ab$ , 即答案为 D.

$$(5) \text{【解】依题意知: } f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \geq 0 \\ 2x^3, & x < 0 \end{cases}, f''(x) = \begin{cases} 24x, & x \geq 0 \\ 12x, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{所以, } f'''(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{24x - 0}{x} = 24,$$

$$f'''(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{12x - 0}{x} = 12,$$

所以  $n = 2$ , C 是答案.

(6)【解】因为  $f(x)$  可导, 所以由微分定义  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ , 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

即答案为 B.

$$(7) \text{【解】在 } x = 0 \text{ 处可导一定在 } x = 0 \text{ 处连续, 所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b),$$

$$\text{所以 } b = 0. f'(0^+) = f'(0^-), \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{x}, \text{ 所以 } a = 0, \text{ 即答案为 C.}$$

(8)【解】由  $f'(0)$  存在可推出 A 中的极限值为  $\frac{1}{2}f'(0)$ , B 中的极限值为  $-f'(0)$ , D 中的极限值为  $f'(0)$ , 而 C 中的极限值为 0. 反之 A, C 中的极限值存在, 不一定  $f'(0)$  存在, 举反例如下:  $y = |x|$ , 排除 A, C. D 中的极限值存在,  $f'(0)$  不一定存在, 举反例如下:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 排除 D. 即答案为 B.}$$

(9)【解】若取  $y = x$ , 则 A 不正确; 若取  $y = x^2$ , 则 B 不正确; 若取  $y = x$ , 则 C 不正确; D 是答案.

(10)【解】 $f(x) = 0$ , 取  $a = 0$ . 排除 A;  $f(x) = x^2 + x + 1$ , 取  $a = 0$ .  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f'(0) = 1 > 0$ ,  $|f(x)| = f(x)$ , 在  $x = 0$  处可导. 排除 C;  $f(x) = -x^2 - x - 1$ , 取  $a = 0$ . 排除 D; 所以 B 是答案.

### 3. 计算题

$$(1) \text{【解】} y' = \frac{-\sin(10 + 3x^2) \cdot 6x}{\cos(10 + 3x^2)} = -6x \tan(10 + 3x^2).$$

$$(2) \text{【解】} y' = f'[\ln(x + \sqrt{a + x^2})] \cdot \frac{1}{x + \sqrt{a + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a + x^2}}\right) \\ = \frac{f'[\ln(x + \sqrt{a + x^2})]}{\sqrt{a + x^2}}.$$

$$(3) \text{【解】} e^{x^2} y' = 2x \cos x^2 + 2yy' \cos y^2 \Rightarrow y' = \frac{2x \cos x^2}{e^{y^2} - 2y \cos y^2}.$$

$$(4) \text{【解】} \frac{2x + 2yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{y'x - y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

$$x + yy' = y'x - y, \text{ 所以 } y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

$$(5) \text{【解】} \frac{dy}{dx} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \cos t + e^t \sin t} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-(\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2}{(\cos t + \sin t)^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2}{e^t (\cos t + \sin t)^3}.$$

$$(6) \text{【解】} dx = (2y + 1)dy, du = \frac{3}{2}(x^2 + x)^{\frac{1}{2}}(2x + 1)dx$$

$$\frac{(2y + 1)dy}{du} = \frac{dx}{\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + x}(2x + 1)dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{2}{3(2y+1)\sqrt{x^2+x(2x+1)}}.$$

(7)【解】由题意知:  $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(e^{3t}-1)3e^{3t}}{f'(t)}$ , 所以  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0} = 3$ .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3 \frac{[f''(e^{3t}-1)3(e^{3t})^2 + 3e^{3t}f'(e^{3t}-1)]f'(t) - e^{3t}f'(e^{3t}-1)f''(t)}{[f'(t)]^3}$$

$$\text{所以 } \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=0} = 3 \frac{[3f''(0) + 3f'(0)]f'(0) - f'(0)f''(0)}{[f'(0)]^3} = \frac{9f'(0) + 6f''(0)}{[f'(0)]^2}.$$

(8)【解】由  $\begin{cases} x = te^t \\ e^t + e^y = 2e \end{cases}$  得  $y_t' = -\frac{e^t}{e^y} = \frac{e^t}{e^t - 2e}$ .

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\frac{e^t}{e^t - 2e}}{\frac{e^t + te^t}{(1+t)(e^t - 2e)}} = \frac{1}{(1+t)(e^t - 2e)},$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=1} = -\frac{1}{2e}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{(1+t)(e^t - 2e)} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{2e^t - 2e + te^t}{(1+t)^2(e^t - 2e)^2e^t},$$

$$\text{所以 } \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=1} = -\frac{1}{8e^2} \text{ 在 } t=1 \text{ 处的曲率为 } k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{t=1} = \frac{\frac{1}{8e^2}}{\left(1 + \frac{1}{4e^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = e(1 + 4e^{-2})^{-\frac{3}{2}}.$$

4.【解】(1)  $f(x)$  在  $x=0$  点连接, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x}{x} = a$ ,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) - \cos x) = 0, g(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0) + 1 - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = g'(0) + 0 = g'(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - \cos x}{x} - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - \cos x - ax}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x - ax}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(\xi)x^2 - \cos x - ax}{x^2} \quad (0 < \xi < x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}g''(\xi)x^2 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}(g''(0) + 1), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{x[g'(x) + \sin x] - [g(x) - \cos x]}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}(g''(0) + 1), & x = 0 \end{cases}.$$

5.【解】 $F(x)$  连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ , 所以  $c = f(-0) = f(0)$ ;

因为  $F(x)$  二阶可导, 所以  $F'(x)$  连续, 所以  $b = f'_-(0) = f'(0)$ , 且

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x), & x \leq 0 \\ 2ax + f'_-(0), & x > 0 \end{cases}, F''(0) \text{ 存在, 所以 } F''_-(0) = F''_+(0),$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2ax + f'_-(0) - f'(0)}{x} = 2a, \text{ 所以 } a = \frac{1}{2}f''(0).$$

$$6.【解】f(x) = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x},$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},$$

$$f^{(2k+1)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, f^{(2k)}(0) = n!, k = 0, 1, 2, \dots$$

7.【解】使用莱布尼茨高阶导数公式

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x \cdot (\ln x)^{(n)} + n(\ln x)^{(n-1)} = x(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + n(-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \\ &= (-1)^{n-2} (n-2)! \left[ -\frac{(n-1)}{x^{n-1}} + \frac{n}{x^{n-1}} \right] = (-1)^{n-2} (n-2)! \frac{1}{x^{n-1}}, \end{aligned}$$

所以  $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-2} (n-2)!$ .

8.【解】因为  $y = (\arcsin x)^2$ , 所以  $y' = 2\arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,

$$y'' = 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\arcsin x \left[ -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \right] (-2x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

所以  $(1-x^2)y'' = 2 + xy'$ .

对上式二边求  $n-1$  阶导数. 按莱布尼兹公式有

$$(1-x^2)(y'')^{(n-1)} + (1-x^2)'C_{n-1}^1(y'')^{(n-2)} + (1-x^2)''C_{n-1}^2(y'')^{(n-3)} = x(y')^{(n-1)} + x'C_{n-1}^1(y')^{(n-2)},$$

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - 2x(n-1)y^{(n)} - 2\frac{(n-1)(n-2)}{2!}y^{(n-1)} = xy^{(n)} + (n-1)y^{(n-1)},$$

所以  $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} - (n-1)^2y^{(n-1)} = 0$ .

## 第三章 不定积分

### 习题三

1. (1)【解】因为  $d\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{1-x^2}dx$ .

所以  $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d\ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C$ .

(2)【解】因为  $\left(\operatorname{darctan} \frac{1+x}{1-x}\right)dx = \frac{(1-x)^2}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}dx = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}dx = \frac{dx}{1+x^2}$ ,

所以  $\int \frac{1}{1+x^2} \arctan \frac{1+x}{1-x} dx = \int \arctan \frac{1+x}{1-x} \operatorname{darctan} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C$ .

(3)【解】因为  $d \frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x + \sin x}{(1+\cos x)^2} dx$ .

所以  $\int \frac{\cos x + \sin x + 1}{(1+\cos x)^2} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} d \frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)^2 + C$ .

(4)【解】令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ ,

$$\int \frac{dx}{x(x^8+1)} = -\int \frac{t^7 dt}{t^8+1} = -\frac{1}{8} \int \frac{dt^8}{t^8+1} = -\frac{1}{8} \ln(1+t^8) + c = -\frac{1}{8} \ln\left(1+\frac{1}{x^8}\right) + C.$$

$$\begin{aligned} (5) \text{【解】} \int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx &= \int \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{2\cos \frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \tan \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$2. (1) \text{【解】} \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2+1}} \stackrel{x+1=\tan t}{=}$$

$$\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = - \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = - \frac{1}{\sin t} + C = - \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + C.$$

(2)【解】令  $x = \tan t$ , 则  $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt = \int \frac{(1 - \sin^2 t) d \sin t}{\sin^4 t} = \int \frac{d \sin t}{\sin^4 t} - \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = - \frac{1}{3 \sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C \\ &= - \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^3 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

(3)【解】令  $x = \tan t$ , 则  $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1}} &= \int \frac{dt}{(2 \tan^2 t + 1) \cos t} = \int \frac{\cos t}{2 \sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t + 1} \\ &= \arctan \sin t + c = \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

(4)【解】令  $x = a \sin t$ ,  $dx = a \cos t dt$ ,  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a^2 \sin^2 t \cdot a \cos t dt}{a \cos t} = a^2 \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} a^2 t - \frac{1}{4} a^2 \sin 2t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(5)【解】令  $x = \sin t$ ,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(1-x^2)^3} dx &= \int \cos^4 t dt = \int \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \int \frac{1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t}{4} dt \\ &= \frac{1}{4} t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4t) dt = \frac{3}{8} t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 4t + C \\ &= \frac{3}{8} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin 2t (1 + \frac{1}{4} \cos 2t) + C \\ &= \frac{3}{8} \arcsin x + \frac{1}{2} \sin t \cos t \left( 1 + \frac{1}{4} - \frac{\sin^2 t}{2} \right) + C \\ &= \frac{3}{8} \arcsin x + \frac{1}{8} x \sqrt{1-x^2} (5 - 2x^2) + C. \end{aligned}$$

(6)【解】令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = - \int t \sqrt{1-t^2} dt \stackrel{\text{令 } t = \sin u}{=} - \int \sin u \cos^2 u du \\ &= \int \cos^2 u d \cos u = \frac{1}{3} \cos^3 u + C = \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

(7)【解】令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = - \int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\stackrel{\text{令 } t = \sin u}{=} - \int (\sin u + 1) du = \cos u - u + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

3. (1)【解】 $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - 1 + e^{-2x}} dx = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2 + 1} = \arctan(e^x - e^{-x}) + C.$

(2)【解】令  $t = 2^x$ ,  $dx = \frac{dt}{t \ln 2}$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2^x(1+4^x)} &= \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = -\frac{1}{\ln 2} \left( \frac{1}{t} + \arctan t \right) + C \\ &= -\frac{1}{\ln 2} \left( \frac{1}{2^x} + \arctan 2^x \right) + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. (1) \text{【解】} \int \frac{x^5}{(x-2)^{100}} dx &= -\frac{1}{99} \int x^5 d(x-2)^{-99} = -\frac{x^5}{99(x-2)^{99}} + \frac{5}{99} \int x^4 (x-2)^{-99} dx \\ &= -\frac{x^5}{99(x-2)^{99}} - \frac{5x^4}{9702(x-2)^{98}} + \frac{10}{4851} \int x^3 (x-2)^{-98} dx \\ &= -\frac{x^5}{99(x-2)^{99}} - \frac{5x^4}{9702(x-2)^{98}} - \frac{10x^3}{470547(x-2)^{97}} - \frac{5x^2}{7528752(x-2)^{96}} - \\ &\quad - \frac{x}{71523144(x-2)^{95}} - \frac{1}{71523144(x-2)^{94}} + C.\end{aligned}$$

(2) 【解】令  $x = 1/t$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{t^4+1}{t^4}}} = -\int \frac{t dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{\sqrt{1+(t^2)^2}} \\ \text{令 } t^2 &= \tan u \quad \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 u}{\sec u} du = -\frac{1}{2} \ln |\tan u + \sec u| + C = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5. (1) \text{【解】} \int x \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \int x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{【解】} \int \sec^3 x dx &= \int \frac{1}{\cos x} d \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx. \\ \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \text{【解】} \int \frac{(\ln x)^3}{x^2} dx &= -\int (\ln x)^3 d \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} (\ln x)^3 + \int \frac{3(\ln x)^2}{x^2} dx \\ &= -\frac{(\ln x)^3}{x} - \frac{3(\ln x)^2}{x} + \int \frac{6 \ln x}{x^2} dx = -\frac{(\ln x)^3}{x} - \frac{3(\ln x)^2}{x} - \frac{6 \ln x}{x} + \int \frac{6}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} [(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 + 6 \ln x + 6] + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \text{【解】} \int \cos(\ln x) dx &= x \cos(\ln x) - \int x d \cos(\ln x) = x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx \\ &= x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x) dx,\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

$$\begin{aligned}(5) \text{【解】} \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{x \cos^4 \frac{x}{2}}{8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} d \frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \int x \csc \frac{x}{2} d \csc \frac{x}{2} = -\frac{1}{8} \int x d \csc^2 \frac{x}{2} = -\frac{1}{8} x \csc^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \csc^2 \frac{x}{2} d \frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{8} x \csc^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

$$6. (1) \text{【解】} \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d \frac{1}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

令  $x = \tan t$ , 则  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{1-\tan^2 t} \cdot \frac{1}{\cos t} dt \\ &= \int \frac{\cos t}{1-2\sin^2 t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\sqrt{2}\sin t}{1-2\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \arctan x d\sqrt{1+x^2} \\ &= \sqrt{1+x^2} \arctan x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{【解】} \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x d e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{【解】} \int f(x) dx &= \begin{cases} \int (x \ln(1+x^2) - 3) dx, & x \geq 0 \\ \int (x^2 + 2x - 3) e^{-x} dx, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} [x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geq 0 \\ -(x^2 + 4x + 1) e^{-x} + C_1, & x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

由于  $\int f(x) dx$  连续, 所以  $C = -1 + C_1, C_1 = 1 + C$ .

$$\text{即} \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} [x^2 - \ln(1+x^2)] - 3x + C, & x \geq 0 \\ -(x^2 + 4x + 1) e^{-x} + 1 + C, & x < 0 \end{cases}.$$

8. 【解】令  $t = e^x, x = \ln t, f'(t) = a \sin(\ln t) + b \cos(\ln t)$ ,

$$f(x) = \int [a \sin(\ln x) + b \cos(\ln x)] dx = \frac{x}{2} [(a+b) \sin(\ln x) + (b-a) \cos(\ln x)] + C.$$

$$9. (1) \text{【解】} \int 3^{x^2+3x} (2x+3) dx = \int 3^{x^2+3x} d(x^2+3x) = \frac{3^{x^2+3x}}{\ln 3} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} \int (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}} (3x - 1) dx &= \frac{1}{2} \int (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}} d(3x^2 - 2x + 5) \\ &= \frac{1}{5} (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$



(3)【解】因为  $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , 所以

$$\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2} [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^2 + C.$$

(4)【解】因为  $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2 + \sqrt{1+x^2}}$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int \frac{xdx}{(1+x^2 + \sqrt{1+x^2})\ln(1 + \sqrt{1+x^2})} &= \int \frac{d\ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1 + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \ln |\ln(1 + \sqrt{1+x^2})| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \text{【解】} \int \frac{xf'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx &= \int \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2 e^x} dx - \int \frac{f(x)}{xe^x} dx \\ &= \int \frac{1}{e^x} d\frac{f(x)}{x} - \int \frac{f(x)}{xe^x} dx \\ &= \frac{1}{e^x} \frac{f(x)}{x} + \int \frac{f(x)}{xe^x} dx - \int \frac{f(x)}{xe^x} dx = \frac{f(x)}{xe^x} + C. \end{aligned}$$

11.【解】令  $t = \cos x + 2$ , 则  $\cos x = t - 2$ , 从而

$$f'(t) = 1 - \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = -(t-2)^2 + \frac{1}{(t-2)^2}.$$

$$\text{所以 } f(x) = -\int \left[ (x-2)^2 - \frac{1}{(x-2)^2} \right] dx = -\frac{1}{3}(x-2)^3 - \frac{1}{x-2} + C.$$

$$\begin{aligned} 12. (1) \text{【解】} \int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \arctan x d\frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\ &\stackrel{\text{令 } x = \tan t}{=} -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt \\ &= -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \cos^2 t dt \\ &= -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \int \cos(2t+1) dt \\ &= -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} t + \frac{1}{8} \sin 2t + C \\ &= -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \arctan x + \frac{x}{4(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

$$(2) \text{【解】} \text{令 } u = \sqrt{\frac{x}{1+x}}, x = \frac{u^2}{1-u^2}, dx = \frac{2u}{(1-u^2)^2} du$$

$$\begin{aligned} \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx &= \int \arcsin u \frac{2u}{(1-u^2)^2} du \\ &\stackrel{\text{令 } u = \sin t}{=} \int t \frac{2 \sin t}{\cos^4 t} \cos t dt = 2 \int t \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt = \int t \tan^2 t dt \\ &= t \tan^2 t - \int \tan^2 t dt \\ &= t \tan^2 t - \int \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt \\ &= t \tan^2 t - \tan t + t + C \\ &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{【解】} \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &\stackrel{\text{令 } x = \sin t}{=} \int \frac{t}{\sin^2 t \cos t} \cos t dt + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\
 &= - \int t d \cot t + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\
 &= - t \cot t + \int \cot t dt + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\
 &= - t \cot t + \ln |\sin t| + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C \\
 &= - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln |x| + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 令 } t = \arctan x, x = \tan t, dx &= \sec^2 t dt, \\
 \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{t \sec^2 t}{\tan^2 t \sec^2 t} dt = \int \frac{t \cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{t(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t} dt \\
 &= - \int t d \cot t - \int t dt = - t \cot t + \int \cot t dt - \frac{1}{2} t^2 = - t \cot t + \ln |\sin t| - \frac{1}{2} t^2 + C \\
 &= - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.
 \end{aligned}$$

13. (1) 【解】 令  $x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt$ ,

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \sqrt{4-x^2} dx &= 32 \int \sin^3 t \cos^2 t dt = -32 \int (1-\cos^2 t) \cos^2 t d \cos t \\
 &= -\frac{32}{3} \cos^3 t + \frac{32}{5} \cos^5 t + c = \frac{1}{5} (4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

(2) 【解】 令  $x = a \sec t, dx = a \sec t \tan t dt$ ,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx &= \int \frac{a \tan t}{a \sec t} a \sec t \tan t dt = a \int \tan^2 t dt \\
 &= a \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} dt = a \int \frac{dt}{\cos^2 t} - at = a \tan t - at + C \\
 &= \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{【解】} \int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx &= \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx + \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \\
 &= \int \frac{de^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \\
 &= \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{【解】} \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx &\stackrel{\text{令 } u = \sqrt{x}}{=} 2 \int \frac{u^4}{\sqrt{2a-u^2}} du \stackrel{\text{令 } u = \sqrt{2a} \sin t}{=} 8a^2 \int \sin^4 t dt \\
 &= 8a^2 \int \left( \frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 dt = 2a^2 \int (1-2\cos 2t + \cos^2 2t) dt \\
 &= 2a^2 t - 2a^2 \sin 2t + 2a^2 \int \frac{1+\cos 4t}{2} dt = 3a^2 t - 2a^2 \sin 2t + \frac{a^2}{4} \sin 4t + C \\
 &= 3a^2 t - 4a^2 \sin t \cos t + a^2 \sin t \cos t (1-2\sin^2 t) + C \\
 &= 3a^2 t - 3a^2 \sin t \cos t - 2a^2 \sin^3 t \cos t + C \\
 &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - 3a^2 \sqrt{\frac{x}{2a}} \sqrt{\frac{2a-x}{2a}} - 2a^2 \frac{x}{2a} \sqrt{\frac{x}{2a}} \sqrt{\frac{2a-x}{2a}} + C \\
 &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C.
 \end{aligned}$$

$$14. (1) \text{【解】} \text{ 令 } \sqrt{1+\cos x} = u, \frac{dx}{\sin x} = \frac{2udu}{-\sin^2 x} = \frac{2udu}{\cos^2 x - 1} = \frac{2udu}{u^2(u^2-2)}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}} &= \int \frac{2u}{u^2(u^2-2)u} du = 2 \int \frac{du}{u^2(u^2-2)} \\ &= - \int \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2-2} \right) du \\ &= \frac{1}{u} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx &= 2 \int \frac{1}{2+\cos x} dx + \int \frac{d(2+\cos x)}{2+\cos x} \\ &\stackrel{\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t}{=} 2 \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} + \ln |2+\cos x| \\ &= 2 \int \frac{2dt}{3+t^2} + \ln |2+\cos x| \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + \ln |2+\cos x| + C \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \tan \frac{x}{2} \right) + \ln |2+\cos x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{【解】} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1+2\sin x \cos x - 1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} \\ &= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$15. (1) \text{【解】} \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} dx = -\frac{2}{3} \int \frac{d(1-x^{\frac{3}{2}})}{(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx &= \int \sqrt{\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}} dx = \int \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx + \int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \\ &= \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \operatorname{arcsine}^{-x} \stackrel{\text{令 } e^x = \sec t}{=} \int \frac{\sec t \tan t dt}{\tan t} + \operatorname{arcsine}^{-x} \\ &= \int \sec t dt + \operatorname{arcsine}^{-x} = \ln |\tan t + \sec t| + \operatorname{arcsine}^{-x} + C \\ &= \ln |e^x + \sqrt{e^{2x}-1}| + \operatorname{arcsine}^{-x} + C. \end{aligned}$$

$$(3) \text{【解】} \int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx = 2 \int \frac{(\sqrt{x-1})^2 \arctan \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2 + 1} d\sqrt{x-1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{令 } \sqrt{x-1} = u}{=} \int \frac{2u^2 \arctan u}{u^2 + 1} du = 2 \int \arctan u du - 2 \int \frac{\arctan u}{u^2 + 1} du \\
& = 2u \arctan u - 2 \int \frac{u}{1+u^2} du - 2 \int \arctan u d \arctan u \\
& = 2u \arctan u - 2 \int \frac{u}{1+u^2} du - (\arctan u)^2 \\
& = 2u \arctan u - \ln(1+u^2) - (\arctan u)^2 + C \\
& = 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln|x-1| - (\arctan \sqrt{x-1})^2 + C.
\end{aligned}$$

## 第四章 定积分及反常积分

### 习题四

1. 证明: 假设存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) \neq 0$ , 不妨假设  $f(\xi) > 0$ . 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 所以存在  $\delta > 0$ , 使得在  $[\xi - \delta, \xi + \delta]$  上  $f(x) > 0$ , 令  $m = \min_{\xi - \delta \leq x \leq \xi + \delta} f(x)$ . 定义  $\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\delta^2 - (x - \xi)^2}, & \xi - \delta \leq x \leq \xi + \delta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则  $\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f(x) \Phi(x) dx \geq m \frac{\pi \delta^2}{2} > 0$ , 和  $\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = 0$  矛盾, 所以  $f(x) = 0$ .

若  $f(a) \neq 0$ , 不妨设  $f(a) > 0$ . 由  $f$  的连续性, 得存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in [a, a + \delta]$  时,  $f(x) > 0$ . 记  $m = \min_{a \leq x \leq a + \delta} f(x)$ . 定义  $\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\delta^2 - (x - a)^2}, & a \leq x \leq a + \delta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 则  $\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \int_a^{a + \delta} f(x) \Phi(x) dx \geq m \cdot \frac{\pi \delta^2}{4} > 0$ , 矛盾, 故  $f(a) = 0$ .

同理可证  $f(b) = 0$ .

$$2. \text{证明: 先证: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \frac{\pi}{4}.$$

令  $t = \frac{\pi}{2} - x$ , 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\cos t)}{f(\cos t) + f(\sin t)} d(-t) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos t)}{f(\cos t) + f(\sin t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx
\end{aligned}$$

于是

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{所以 } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^\lambda}{(\cos x)^\lambda + (\sin x)^\lambda} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{同理 } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot x)^\lambda} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \text{证明: 因为 } \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] dx \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left| x - \frac{k}{n} \right| dx \\
&= M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( \frac{k}{n} - x \right) dx = \frac{M}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{M}{2n}.
\end{aligned}$$

4. 证明: 令  $t = \tan x, 0 < t < 1$  则  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ .

因为  $\left(\frac{t}{1+t^2}\right)' = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} > 0$ , 所以  $\frac{t}{1+t^2} < \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ ,

于是  $\frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt < \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-1} dt$ ,

即  $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2(n-1)}$ .

5. 证明: 由积分中值定理, 存在  $\xi \in [0, a]$ , 使得  $\beta \int_0^a f(x) dx = a\beta f(\xi)$ , 存在  $\eta \in [a, \beta]$ , 使得

$\alpha \int_a^\beta f(x) dx = \alpha(\beta-a)f(\eta)$ , 由于  $\xi \leq \eta$ ,  $f$  单调递减. 从而  $f(\xi) \geq f(\eta)$ .

即  $\alpha(\beta-a)f(\eta) \leq a\beta f(\xi) - \alpha f(\xi) \leq a\beta f(\xi) = \beta \int_0^a f(x) dx$ .

6. 证明:  $\forall x, t \in [a, b], f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2, \xi \in (x, t)$  或  $(t, x)$

令  $t = \frac{a+b}{2}$ , 所以  $f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

两边积分得  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$   
 $= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$

7. 证明: 由积分中值定理, 存在  $\xi \in [0, a]$ , 使  $\int_0^a f(x) dx = af(\xi)$ ;

存在  $\eta \in [a, 1]$ , 使  $\int_a^1 f(x) dx = f(\eta)(1-a)$ .

因为  $\eta \geq \xi$ ,  $f$  单调递减, 所以  $f(\eta) \leq f(\xi)$ .

所以

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 f(x) dx &= \alpha \int_0^a f(x) dx + \alpha \int_a^1 f(x) dx = \alpha^2 f(\xi) + \alpha f(\eta)(1-a) \\ &\leq \alpha^2 f(\xi) + \alpha f(\xi)(1-a) = \alpha f(\xi) = \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

8. 证明: 对于函数  $F(x) = \int_a^x f(u) du$ , 用泰勒公式展开:

$$\begin{aligned} \forall t, x \in [a, b], F(x) &= F(t) + F'(t)(x-t) + \frac{F''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{F'''(\xi)}{3!}(x-t)^3 \\ &= F(t) + f(t)(x-t) + \frac{f'(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(\xi)}{3!}(x-t)^3 \end{aligned} \quad (1)$$

$$(1) \text{ 中令 } x=a, t=b, \text{ 得到 } 0 = F(b) + f(b)(a-b) + \frac{f''(\xi_1)}{6}(a-b)^3, \xi_1 \in (a, b) \quad (2)$$

$$(2) \text{ 中令 } x=b, t=a, \text{ 得到 } F(b) = f(a)(b-a) + \frac{f''(\xi_2)}{6}(b-a)^3, \xi_2 \in (a, b) \quad (3)$$

$$(3) - (2) \text{ 得到 } 2F(b) = (f(a) + f(b))(b-a) + \frac{(b-a)^3}{6}(f''(\xi_2) + f''(\xi_1))$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b f(x) dx = F(b) &= (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{(b-a)^3}{6} \cdot \frac{f''(\xi_2) + f''(\xi_1)}{2} \\ &= (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \text{ 证明: } \int_0^\pi x f(\sin x) dx &\stackrel{\text{令 } x = \pi - t}{=} \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) d(-t) \\ &= \int_0^\pi \pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt \end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx,$$

$$\text{所以, } 2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \stackrel{\text{令 } t = \pi - u}{=} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\pi - u)) d(-u) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

$$\text{即 } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

10. 证明:  $-|f'(x)| \leq f'(x) \leq |f'(x)|$ , 所以

$$-\int_a^x |f'(t)| dt \leq \int_a^x f'(t) dt \leq \int_a^x |f'(t)| dt,$$

$$\text{即 } -\int_a^x |f'(t)| dt \leq f(x) \leq \int_a^x |f'(t)| dt,$$

$$-\int_x^b |f'(t)| dt \leq \int_x^b f'(t) dt \leq \int_x^b |f'(t)| dt,$$

$$\text{即 } -\int_x^b |f'(t)| dt \leq f(x) \leq \int_x^b |f'(t)| dt,$$

$$\text{所以 } -\int_a^b |f'(t)| dt \leq 2f(x) \leq \int_a^b |f'(t)| dt.$$

$$\text{即 } |f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx, (a < x < b).$$

11. 证明: 因为  $(0, 1)$  上  $f(x) \neq 0$ , 可设  $f(x) > 0$ .

因为  $f(0) = f(1) = 0$ ,

$\exists x_0 \in (0, 1)$  使  $f(x_0) = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x)$ ,

$$\text{所以 } \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{1}{f(x_0)} \int_0^1 |f''(x)| dx. \quad (1)$$

在  $(0, x_0)$  上用拉格朗日定理, 存在  $\alpha \in (0, x_0)$ , 使得  $f'(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0}$ ,

在  $(x_0, 1)$  上用拉格朗日定理, 存在  $\beta \in (x_0, 1)$ , 使得  $f'(\beta) = -\frac{f(x_0)}{1-x_0}$ .

$$\text{所以 } \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \int_a^\beta |f''(x)| dx \geq \left| \int_a^\beta f''(x) dx \right| = |f'(\beta) - f'(\alpha)| = \frac{f(x_0)}{x_0(1-x_0)} \geq 4f(x_0)$$

$$\text{因为 } x_0(1-x_0) \leq \left( \frac{x_0 + (1-x_0)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{f(x_0)} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq 4.$$

由(1)得

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4.$$

12. 证明: 将  $\ln x$  在  $x_0$  用泰勒公式展开, 得

$$\ln x = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{x_0^2}(\xi - x_0)^2 \leq \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0). \quad (1)$$

令  $x_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ,  $x = f(x)$  代入(1)得

$$\ln f(x) \leq \ln \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx} \left[ f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right].$$

将上式两边取  $\int_a^b$ , 最后一项为 0, 得

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \leq \ln \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

$$13. \text{证明: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \int_0^1 1^2 dx \geq \left( \int_0^1 f'(x) \cdot 1 dx \right)^2 = (f(1) - f(0))^2 = 1.$$

14.【解】因为  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 所以  $|f(x)|$  在  $[0, 2]$  上连续, 所以  $\exists \xi \in [0, 2]$ , 使

$$|f(\xi)| = \max |f(x)| \quad (0 \leq x \leq 2). \text{ 所以}$$

$$a = \left| \int_0^2 (x-1)f(x)dx \right| \leq \int_0^2 |x-1| |f(x)| dx \leq |f(\xi)| \int_0^2 |x-1| dx = |f(\xi)|.$$

15.【解】 (1)  $\int_0^2 \frac{e^x}{(e^x-1)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^2 \frac{d(e^x-1)}{(e^x-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (e^x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_{\epsilon}^2 = \frac{3}{2} (e^2-1)^{\frac{2}{3}}.$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_0^b \left[ \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \arctan x - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right) \Big|_0^b = \frac{\pi}{12}.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$ , 所以  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$  积分收敛. 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{令 } x = \tan t} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2.$$

$$(4) \int_0^1 \sin(\ln x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \sin(\ln x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)] \Big|_{\epsilon}^1 = -\frac{1}{2}.$$

$$(5) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \sec t} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{\cos t \cdot \sin t}{(-\tan t) \cos^2 t} dt = -\frac{\pi}{3}.$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \tan t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sec^2 t}{\sec^3 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

16. (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3 \sqrt{x^2+4}} = 1$ , 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2+4}} dx$  收敛.

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^3+4} \cdot x = 5$ , 从而  $\int_0^{+\infty} \frac{5x^2+2x+3}{x^3+4} dx$  发散.

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \arctan x}{3+2x^3} \cdot x^2 = \frac{1}{2}$ , 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{3+2x^3} dx$  收敛.

(4) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 1$ , 所以  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$  收敛.

(5) 因为  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{-2x}}{(2-x)^2} \cdot (2-x)^2 = e^{-4}$ , 所以  $\int_0^2 \frac{e^{-2x}}{(2-x)^2} dx$  发散.

$$(6) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int_0^c \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx + \int_c^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx.$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 0$ , 所以  $\int_0^c \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx$  收敛.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\int_c^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx$  收敛.

即  $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}} dx$  收敛.

## 第五章 微分中值定理

### 习题五

1. 证明: 令  $M = \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}$ ,  $m = \min_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}$ . 所以

$$m \leq \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \leq M.$$

所以存在  $\xi (\xi \in (a, b))$ , 使得  $f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \cdots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$ .

2. 证明: 假设  $F(x) = f(x) - x$ , 则  $F(a) = f(a) - a < 0$ ,  $F(b) = f(b) - b > 0$ , 于是由介值定理, 在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \xi$ .

3. 证明: (反证法) 设  $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = f(x) - x \neq 0$ . 则  $\varphi(x) = f(x) - x$  恒正或恒负. 不妨设  $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = f(x) - x > 0$ . 令  $m = \min_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x)$ , 则  $m > 0$ .

因此  $\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = f(x) - x \geq m$ . 于是  $f(1) \geq 1 + m > 1$ , 矛盾, 所以在  $[0, 1]$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \xi$ .

4. 证明: 假设  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $F(a) = f(a) - g(a) < 0$ ,  $F(b) = f(b) - g(b) > 0$ , 于是由介值定理, 在  $(a, b)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $f(\xi) = g(\xi)$ .

5. 证明: 令  $F(x) = x^5 - 3x - 2$ , 则  $F(1) = -4 < 0$ ,  $F(2) = 24 > 0$ , 所以在  $(1, 2)$  内至少有一个  $\xi$ , 满足  $F(\xi) = 0$ .

6. 证明: 由条件知  $0 < f(x) < 1$ . 令  $F(x) = f(x) - x$ , 于是  $F(0) > 0$ ,  $F(1) < 0$ , 所以存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $F(\xi) = 0$ . 假设存在  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ , 满足  $f(\xi_1) = \xi_1, f(\xi_2) = \xi_2$ , 不妨假设  $\xi_2 < \xi_1$ , 于是  $\xi_1 - \xi_2 = f(\xi_1) - f(\xi_2) = f'(\eta)(\xi_1 - \xi_2)$ , ( $\xi_2 < \eta < \xi_1$ ), 所以  $f'(\eta) = 1$ , 矛盾.

$$7. \text{证明: } f(0) = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = 3f(\xi_1)(1 - \frac{2}{3}) = f(\xi_1), \text{ 其中 } \frac{2}{3} < \xi_1 < 1.$$

由罗尔定理, 存在  $\xi$ , 满足  $0 < \xi < \xi_1$ , 且  $f'(\xi) = 0$ .

8. 证明: 由于  $F(1) = F(2) = 0$ , 所以存在  $\xi_1, 1 < \xi_1 < 2$ , 满足  $F'(\xi_1) = 0$ , 又  $F'(1) = 0$ , 所以存在  $\xi$ , 满足  $1 < \xi < \xi_1 < 2$ , 且  $F''(\xi) = 0$ .

9. 证明: 令  $F(t) = f(t), G(t) = \ln(1+t)$ , 由柯西定理, 得

$$\frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \xi \in (0, x),$$

所以  $\frac{f(x)}{\ln(1+x)} = (1+\xi)f'(\xi)$ , 即  $f(x) = (1+\xi)\ln(1+x)f'(\xi)$ .

10. 证明: 令  $F(x) = x^n f(x)$ , 由拉格朗日定理, 得  $b^n f(b) - a^n f(a) = [n\xi^{n-1} f(\xi) + \xi^n f'(\xi)](b-a), \xi \in (a, b)$ , 即  $\frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = [nf(\xi) + \xi f'(\xi)]\xi^{n-1}$ .

11. 证明: 令  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$ , 则  $F(a) = F(b) = 0$ , 所以存在在  $(a, b)$  中, 使

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

12. 证明:  $(f''(x) = \frac{2f'(x)}{1-x}, \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{2}{1-x})$  两边积分可得  $\ln f'(x)(x-1)^2 = c$ , 所以  $f'(x)(x-1)^2 = e^c$

令  $F(x) = f'(x)(x-1)^2, F'(x) = f''(x)(x-1)^2 + 2f'(x)(x-1)$ , 由  $f(0) = f(1) = 0$  知存在  $\eta \in (0, 1), f'(\eta) = 0$ , 即  $F(\eta) = 0$  又  $F(1) = 0$ . 所以存在  $\xi \in (\eta, 1), F'(\xi) = 0$ . 立即可得  $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ .

13. 证明: 令  $F(x) = e^{-x} f(x), G(x) = e^{-x}$ . 由柯西定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{1}{e^{x_1} - e^{x_2}} \begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \frac{-e^{-\xi} f(\xi) + e^{-\xi} f'(\xi)}{-e^{-\xi}} = f(\xi) - f'(\xi).$$

14. 证明: 不妨假设  $0 < x_1 < x_2$ , 令  $F(x) = \frac{e^x}{x}, G(x) = \frac{1}{x}$ , 在  $[x_1, x_2]$  上使用柯西定理,

$\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得



$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} = \frac{\frac{e^{x_2}}{x_2} - \frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{e^{\xi} \xi - e^{\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = e^{\xi} - \xi e^{\xi},$$

即  $x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1 - \xi) e^{\xi} (x_1 - x_2)$ .

15. 证明: 令  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , 所以  $F(a) = F(b) = 0$ . 由罗尔定理, 至少存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 于是  $f'(\xi)g(\xi) = g'(\xi)f(\xi)$ .

16. 证明: 令  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix}$ , 则

$F(b) - F(a) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix}$ , 由拉格朗日中值定理, 至少存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

17. 证明:  $\forall x, t \in [a, b]$ , 有  $f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2$ , 其中  $\xi$  介于  $x, t$  之间.

令  $t = \frac{a+b}{2}$ , 分别令  $x = b, x = a$ , 得到

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}, \xi_1 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right),$$

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}, \xi_2 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right).$$

$$\text{两式相加, 得 } f(b) + f(a) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{4} \left[ \frac{f''(\xi_1)}{2} + \frac{f''(\xi_2)}{2} \right]$$

所以存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

18. 证明: 令  $F(x) = f(x), G(x) = \frac{1}{x}$ , 由柯西定理, 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}} = -\eta^2 f'(\eta),$$

即  $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$ , 由拉格朗日定理知  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}.$$

19. 证明: 对于  $F(x) = e^x f(x)$ , 由拉格朗日定理,  $\exists \eta \in (a, b)$  使得

$$\frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b-a} = e^{\eta} [f(\eta) + f'(\eta)].$$

对  $G(x) = e^x$ , 在  $[a, b]$  上使用拉格朗日定理, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^{\xi}.$$

则  $e^{\xi} = \frac{e^b - e^a}{b-a} = \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b-a} = e^{\eta} [f(\eta) + f'(\eta)]$ .

20. 证明: 令  $g(x) = e^x$ , 由柯西定理, 得存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^{\eta}} = e^{-\eta} f'(\eta).$$

所以  $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta} f'(\eta)$ . 由拉格朗日中值定理,  $\exists \xi \in (a, b)$ ,

使得  $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \cdot e^{-\eta}$ .

## 第六章 常微分方程

## 习题六

1. (1)【解】  $\frac{dy}{dx} = e^x(e^{-y} - 1)$ ,  $\frac{dy}{e^{-y} - 1} = e^x dx$ ,  $-\ln(1 - e^y) = e^x + c$ .

$y = \ln(1 - ce^{-e^x})$ .

(2)【解】  $\frac{dy}{1-y^2} = \tan x dx$ ,

$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = -\ln |\cos x| + c$ ,  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+2}{1-2} \right| = c$ ,  $c = \frac{1}{2} \ln 3$ ,

$\ln \left| \frac{1+y}{3(1-y)} \right| = \ln \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $y = \frac{3 + \cos^2 x}{3 - \cos^2 x}$ .

2. (1)【解】  $\frac{dx}{dy} = \frac{e^{\frac{x}{y}} \left( \frac{x}{y} - 1 \right)}{1 + e^{\frac{x}{y}}}$ .

令  $\frac{x}{y} = u$ ,  $x = yu$ . (将  $y$  看成自变量)

$\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$ , 所以  $u + y \frac{du}{dy} = \frac{e^u(u-1)}{1+e^u}$ ,

$y \frac{du}{dy} = \frac{ue^u - e^u}{1+e^u} - u = -\frac{u+e^u}{1+e^u}$ ,

$\frac{1+e^u}{u+e^u} du = -\frac{dy}{y}$ ,  $\frac{d(u+e^u)}{u+e^u} = -\frac{dy}{y}$ ,  $\ln(u+e^u) = -\ln y + c$ ,

$\frac{1}{y} = \frac{u+e^u}{c}$ ,  $y = \frac{c}{u+e^u} = \frac{c}{\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}}$  即  $(x + ye^{\frac{x}{y}}) = c$ .

(2)【解】 令  $\frac{y}{x} = u$ ,  $y = xu$ .

$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ , 所以  $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 2u - 1}{u^2 + 2u - 1}$ .

$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 2u - 1}{u^2 + 2u - 1} - u = \frac{-u^3 - u^2 - u - 1}{u^2 + 2u - 1}$ ,

$-\frac{u^2 + 2u - 1}{u^3 + u^2 + u + 1} du = \frac{dx}{x}$ ,

$\left( \frac{1}{u+1} - \frac{2y}{u^2+1} \right) du = \frac{dx}{x}$ ,

$\ln \frac{u+1}{u^2+1} = \ln cx$ ,  $\frac{u+1}{u^2+1} = cx$ . 由  $y(1) = -1$ , 得  $u(1) = -1$ .

所以  $c = 0$ .  $\frac{u+1}{u^2+1} = 0$ , 得到  $u+1 = 0$ , 即  $y = -x$ .

3. (1)【解】 令  $u = \sin^2 y$ , 则  $u' = y' \sin 2y$ . 于是

$\sqrt{1+x^2} u' = 2xu + e^{2\sqrt{1+x^2}}$ ,  $u' - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} u = \frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$  为一阶线性方程,

解得  $u = e^{2\sqrt{1+x^2}} (c + \ln |x + \sqrt{1+x^2}|)$ . 即  $\sin^2 y = e^{2\sqrt{1+x^2}} (c + \ln |x + \sqrt{1+x^2}|)$ .

(2)【解】 原方程可化为  $\frac{dx}{dy} = 1 + \frac{2x}{y} - \frac{x}{y^2}$ .

即  $\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\right)x = 1$  为一阶线性方程(把  $y$  看成自变量,  $x$  看成因变量).

解得:  $x = y^2 + cy^2 e^{\frac{1}{y}}$ .

(3)【解】令  $\cos y = u$ , 则  $u' = -y' \sin y$ .

$-u'x \ln x + u(1 - xu) = 0$ , 即  $-u' + \frac{u}{x \ln x} = \frac{u^2}{\ln x}$  为伯努利方程.

$$\frac{-u'}{u^2} + \frac{1}{x \ln x} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{\ln x}.$$

令  $z = \frac{1}{u}$ , 则  $z' = \frac{-u'}{u^2}$ ,  $z' + \frac{1}{x \ln x} z = \frac{1}{\ln x}$  为一阶线性方程.

解得  $z = \frac{(x+C)}{\ln x}$ , 即  $\frac{1}{\cos y} = \frac{x+C}{\ln x}$ ,  $(x+C)\cos y = \ln x$ .

4. (1)【解】 $e^y dx + xe^y dy - 2y dy = 0$ .

于是  $d(xe^y) - dy^2 = 0$ . 两边积分得  $xe^y - y^2 = C$ , 即方程的解为  $xe^y - y^2 = C$ .

(2)【解】 $x dx + dy + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx - \frac{x}{y \sqrt{y^2 - x^2}} dy = 0$ .

设函数  $u(x, y)$  满足  $du = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx - \frac{x}{y \sqrt{y^2 - x^2}} dy$ .

所以  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$ ,  $u(x, y) = \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx + \varphi(y) = \arcsin \frac{x}{y} + \varphi(y)$

$$\text{即 } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y \sqrt{y^2 - x^2}}.$$

于是  $\varphi'(y) = 0$ ,  $\varphi(y) = c$ ,  $u(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} + C$

$d \frac{x^2}{2} + dy + du = 0$ , 两边积分得  $\frac{1}{2}x^2 + y + \arcsin \frac{x}{y} = C$ . 即原方程的解为  $\frac{1}{2}x^2 + y + \arcsin \frac{x}{y} = C$ .

(3)【解】由原方程可得  $(x^2 + y^2)dx + d(x^2 + y^2) = 0$ ,

即  $dx + \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$ . 两边积分, 得  $x + \ln(x^2 + y^2) = C$ ,

因此原方程解为  $x + \ln(x^2 + y^2) = C$ .

5. (1)【解】 $2yy'(x-1) = y^2 - x$ , 令  $u = y^2$ ,  $u' = 2yy'$ , 于是原方程化为

$u'(x-1) = u - x$ , 即  $u' - \frac{1}{x-1}u = -\frac{x}{x-1}$  为一阶线性方程. 解得

$$u = (x-1) \left( \frac{x}{x-1} - \ln(x-1) + x \right).$$

即  $y^2 = c(x-1) + x - (x-1)\ln(x-1)$ .

(2)【解】该方程为伯努利方程.

$$xy^{-6}y' + y^{-5} = x^3.$$

令  $y^{-5} = u$ ,  $u' = -5y^{-6}y'$ ,  $u' - \frac{5}{x}u = -5x^2$  为一阶线性方程. 解得  $u = x^5 \left( C + \frac{5}{2}x^{-2} \right)$ ,

于是  $y^{-5} = Cx^5 + \frac{5}{2}x^3$ .

6. 【解】 $\varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$ ,  $\varphi(0) = \varphi^2(0)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$ .

若  $\varphi(0) = 0$ , 对任何  $x$  有  $\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x)\varphi(\Delta x)$ ,

所以  $\varphi(x) = \min_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) \min_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi(x)\varphi(0) = 0$ .

即  $\varphi(x) = 0$ .

若  $\varphi(0) = 1$ ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)\varphi(\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)(\varphi(x) - \varphi(0))}{\Delta x}$$

即  $\varphi'(x) = \varphi(x)\varphi'(0)$ ,  $\varphi(0) = 1$ . 解得  $\varphi(x) = e^{\varphi'(0)x}$ .

7.【解】显然  $y(x_0) = y_0$ .

因为  $y' = -p(x)e^{\int_{x_0}^x -p(s)ds} \left( y_0 + \int_{x_0}^x Q(s)e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right) + e^{\int_{x_0}^x -p(x)dx} (Q(x)e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}) = -p(x)y + Q(x)$ .

于是  $y' + p(x)y = Q(x)$ . 证毕.

8. (1)【解】原方程可化为  $\begin{cases} \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -1 \\ x(1) = 0 \end{cases}$ . 把  $x$  看成  $y$  的函数,  $y$  是自变量.

解得  $x = y(C - \ln y)$ .

又  $x(1) = 0$ , 得  $C = 0$ . 即原方程解为  $x = -y \ln y$ .

(2)【解】令  $x + y = u$ . 则  $u' = 1 + y'$ . 于是原方程变为  $\begin{cases} xu' + \sin u = 0 \\ u(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ .

$-\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sin u}$ , 积分得  $\ln \frac{c}{x} = \ln(\csc u - \cot u)$ ,  $\frac{c}{x} = \csc u - \cot u$ .

又  $u(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $c = \frac{\pi}{2}$ .

原方程解为  $\frac{\pi}{2x} = \csc(x + y) - \cot(x + y)$ .

9. (1)【解】令  $y' = p$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ .

所以  $(1 + x^2) \frac{dp}{dx} + p^2 + 1 = 0$ ,  $\frac{dp}{p^2 + 1} = -\frac{dx}{1 + x^2}$ , 两边积分, 得

$$\arctan p = -\arctan x + c.$$

即  $\frac{p+x}{1-px} = \tan c = c_1$ ,  $p(1+c_1x) = c_1 - x$ ,

于是  $\frac{dy}{dx} = \frac{c_1 - x}{1+c_1x} = -\frac{1}{c_1} + \frac{c_1^2 + 1}{c_1(1+c_1x)}$ .

$dy = \left( -\frac{1}{c_1} + \frac{c_1^2 + 1}{c_1(1+c_1x)} \right) dx$ , 两边积分, 得

$$y = -\frac{1}{c_1}x + \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \ln |1 + c_1x| + c_2.$$

(2)【解】令  $y' = p$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ , 于是原方程变为

$$x \frac{dp}{dx} + xp^2 - p = 0, \frac{1}{p^2} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{p} = -1.$$

令  $\frac{1}{p} = u$ , 则  $u' = -\frac{1}{p^2} \frac{dp}{dx}$ ,

$u' + \frac{1}{x}u = 1$ ,  $u(2) = 1$ , 为一阶线性方程.

解得  $u = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x}$ ,  $u(2) = 1$ , 得  $c = 0$ , 于是  $u = \frac{1}{2}x$ .

即  $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}x$ ,  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}x$ ,  $y = 2 \ln x + c$ ,  $y(2) = 2$ , 得  $c = 2 - 2 \ln 2$ .

即  $y = 2\ln x + 2 - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2$ .

(3)【解】令  $y' = p$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . 原方程化为  $2p \frac{dp}{dy} + p^2 = y$ .

令  $p^2 = u$ , 则  $\frac{du}{dy} = 2p \frac{dp}{dy}$ . 得  $\frac{du}{dy} + u = y$  为关于  $y$  的一阶线性方程. 且  $u \Big|_{x=1} = p^2(0) = [y'(0)]^2 = 1$ , 即  $u(2) = 1$ .

解得  $u = y - 1 + Ce^{-y}$ .

所以  $1 = u(2) = 2 - 1 + Ce^{-2} = 1 + Ce^{-2}$ ,  $C = 0$ .

于是  $u = y - 1$ ,  $p = \pm \sqrt{y-1}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y-1}$ .

$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \pm dx$ , 两边积分得,  $\sqrt{y-1} = \pm \frac{x}{2} + C_1$ .

$y(0) = 2$ , 得到  $C_1 = 1$ , 得解  $\sqrt{y-1} = \pm \frac{x}{2} + 1$ .

10. (1)【解】特征方程为  $\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ ,

即  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = i, \lambda_4 = \lambda_5 = -i$ .

于是  $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x$ .

(2)【解】特征方程为  $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 10\lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_{3,4} = 1 \pm i$ . 于是  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + e^x (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$ .

由  $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 6, y'''(0) = -14$ ,

得  $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1, c_4 = 1$ ,

即  $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-3x} + e^x(\cos x + \sin x)$ .

11. (1)【解】特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ .

原方程对应的齐次方程通解为  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ .

非齐次方程特解:  $y_1^* = \frac{1}{D^2 + 1}x = (1 - D)x = x$  (常数省略);

$$y_2^* = \frac{1}{D^2 + 1}3\sin 2x = 3 \frac{1}{D^2 + 1}\sin 2x = \frac{3}{-4 + 1}\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$y_3^* = \frac{1}{D^2 + 1}2\cos x.$$

$$\text{考查 } \frac{1}{D^2 + 1}2e^{ix} = 2 \frac{1}{D^2 + 1}e^{ix}$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{2D}e^{ix}$$

$$= x(-ie^{ix}) = x(\sin x - i\cos x),$$

$$\text{所以 } y_3^* = \frac{1}{D^2 + 1}2\cos x = x\sin x.$$

所以原方程通解为  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x - \sin 2x + x\sin x$ .

(2)【解】特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$ .

原方程对应的齐次方程通解为  $\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ .

$$\text{非齐次方程通解 } y_1^* = \frac{1}{D^2 + 1}2xe^x = 2e^x \frac{1}{(D+1)^2 + 1}x = 2e^x \frac{1}{D^2 + 2D + 2}x$$

$$= 2e^x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}D \right)x = e^x(x-1).$$

$$y_2'' = \frac{1}{D^2+1} 4\sin x = -2x\cos x.$$

所以  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x(x-1) - 2x\cos x$ .

由  $y(0) = y'(0) = 0$ , 得  $c_1 = 1, c_2 = 2$ .

于是  $y = \cos x + 2\sin x + e^x(x-1) - 2x\cos x$ .

(3)【解】特征方程为  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ .

原方程对应的齐次方程的通解为  $\bar{y} = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$ .

当  $a = -2$  时,

$$y^* = \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-2x};$$

当  $a \neq -2$  时,

$$y^* = \frac{1}{(D+2)^2} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{(a+2)^2}.$$

$$\text{所以 } y = \begin{cases} (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2} e^{ax}, & a \neq -2 \\ (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}, & a = -2 \end{cases}.$$

12. (1)【解】令  $x = e^t$ , 则  $t = \ln x$ .

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' e^t, \frac{d^2 y}{dt^2} = y'' e^{2t} + y' e^t, \text{ 即 } \begin{cases} xy' = \frac{dy}{dt} \\ x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \end{cases}.$$

于是原方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 2\sin t. \text{ 解得 } y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t \cos t, \text{ 即原方程通解为:}$$

$$y = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x - \ln x \cos \ln x.$$

(2)【解】令  $x+1 = e^t$ , 则  $t = \ln(x+1)$ ,

$$\frac{dy}{dt} = y' e^t, \frac{d^2 y}{dt^2} = y'' e^{2t} + y' e^t, \text{ 即 } \begin{cases} (x+1)y' = \frac{dy}{dt} \\ (x^2+1)y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \end{cases}.$$

$$\text{于是原方程化为: } \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 6te^t.$$

$$\text{解得 } y = (c_1 + c_2 t)e^t + t^3 e^t.$$

$$\text{于是 } y = (c_1 + c_2 \ln(x+1))(x+1) + (x+1)\ln^3(x+1).$$

13.【解】设所求的曲线为  $y = f(x)$ . 曲线上点  $(x, y)$  处的切线方程为

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

令  $X = 0$ , A 点坐标  $[0, y - xf'(x)]$ .

(1) 若  $AB = AC$ , 则

$$[y - xf'(x)]^2 = x^2 + [xf'(x)]^2, \text{ 化简, 得}$$

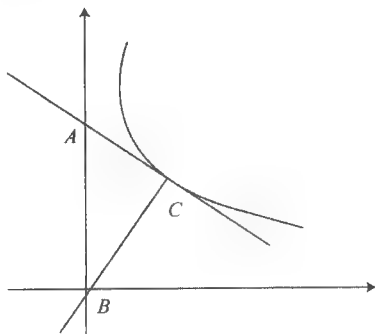
$$y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = x^2.$$

令  $u = y^2$ , 则  $u - x \frac{du}{dx} = x^2$  为一阶线性方程

$$\text{得解 } u = -x^2 + cx, \text{ 即 } y^2 + x^2 - cx = 0.$$

(2) 若  $AC = BC$ , 则

$$x^2 + [xf'(x)]^2 = x^2 + y^2,$$



$$f'(x) = \pm \frac{y}{x}, \ln \frac{y}{c} = \pm \ln x,$$

所以  $y = cx$  (舍去),  $xy = c$ .

(3) 若  $AB = BC$ , 则

$$(y - xf'(x))^2 = x^2 + y^2, \text{ 化简得 } -2yf'(x) + x[f'(x)]^2 = x,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4x^2}}{2x} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}, \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}.$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \text{ 原方程化为 } x \frac{du}{dx} = \pm \sqrt{u^2 + 1}.$$

$$\text{若 } x \frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 + 1}, \text{ 则 } \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dx}{x}, \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln cx.$$

$$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = cx, \text{ 即 } y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2;$$

$$\text{若 } x \frac{du}{dx} = -\sqrt{u^2 + 1}, \text{ 则 } \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = -\frac{dx}{x}, \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln \frac{c}{x}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{c}{x}, \text{ 即 } y + \sqrt{x^2 + y^2} = c.$$

14. 【解】取物体的初始位置为坐标原点, 取向下为  $x$  轴正方向.  $x(t)$  表示在时刻  $t$  时物体位置. 物体的重力为  $mg$ , 阻力为  $k \frac{dx}{dt}$  ( $k$  为比例系数). 由牛顿定律得到:

$$\begin{cases} mg - k \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ 即 } \begin{cases} x'' + \frac{k}{m} x' = g \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{解得 } x = c_1 + c_2 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t. \text{ 由 } x(0) = 0, \text{ 得 } c_1 + c_2 = 0,$$

$$x' = -\frac{k}{m}c_2 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \text{ 由 } x'(0) = 0, \text{ 得 } c_2 = \frac{m^2 g}{k^2}.$$

$$\text{因此, } c_1 = -c_2 = -\frac{m^2 g}{k^2},$$

$$x = -\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t.$$

15. 【解】高为  $h$ , 顶角为  $60^\circ$  的圆锥的底圆半径为  $\frac{\sqrt{3}}{3}h$ , 于是

$$-\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2 dh = 0.5 \times 0.6 \sqrt{2gh} dt,$$

$$\text{即 } -\frac{\pi}{3}h^2 dh = 0.3 \sqrt{2gh} dt, h(0) = 10.$$

$$-\frac{\pi}{9\sqrt{2}g}h^{\frac{5}{2}} dh = dt, \text{ 解得 } -4 \frac{\pi}{9\sqrt{2}g}h^{\frac{5}{2}} = t + c.$$

$$\text{由 } h(0) = 10, \text{ 得 } c = -\frac{4\pi}{9\sqrt{2}g}10^{\frac{5}{2}}.$$

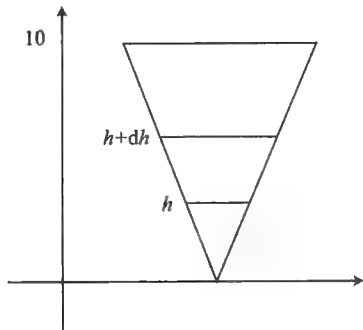
$$\text{所以满足初始条件的解为: } -\frac{4\pi}{9\sqrt{2}g}h^{\frac{5}{2}} = t - \frac{4\pi}{9\sqrt{2}g}10^{\frac{5}{2}}.$$

$$\text{当 } h = 0 \text{ 时, 得 } t = \frac{4\pi}{9\sqrt{2}g}10^{\frac{5}{2}} \approx 10(\text{s}).$$

16. 【解】在  $P(x, y)$  处的切线方程为  $Y - y = y'(X - x)$ .

$$\text{则 } T(x - \frac{y}{y'}, 0), |PQ| = |y|, |QT| = |\frac{y}{y'}|.$$

$$\text{则 } \triangle PQT \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} |y \cdot \frac{y}{y'}| = \frac{y^2}{2|y'|}.$$



曲边三角形  $OPQ$  的面积为  $\left| \int_0^x y(x) dx \right|$ , 于是得方程  $\frac{y^2}{2|y'|} = k \left| \int_0^x y(x) dx \right|$ .

两边对  $x$  求导, 得到  $\begin{cases} yy'' = 2(1-k)y'^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ .

令  $y' = p$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 于是  $yp \frac{dp}{dy} = 2(1-k)p^2$ .

若  $p = 0, y = c$ . 因为  $y(0) = 0$ , 则  $y = 0$ , 不合题意.

若  $p \neq 0, y \frac{dp}{dy} = 2(1-k)p, \ln p = 2(1-k) \ln y + \ln c_1, p = c_1 y^{2(1-k)}$ .

$\frac{dy}{dx} = c_1 y^{2(1-k)}, y^{2k-1} = (2k-1)(c_1 x + c_2)$ .

由  $y(0) = 0$ , 得  $c_2 = 0$ . 所以解为:  $y^{2k-1} = cx, (c = (2k-1)c_1 \text{ 为任意常数})$ .

**17.【解】** 假设在  $t$  时刻房间中二氧化碳的含量百分比为  $x\%$ , 即房中二氧化碳含量为  $x$ .

设  $dt$  时刻后二氧化碳含量改变量为  $dx$ . 则

$$dx = \left( 0.004 - \frac{x}{10} \right) dt;$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{10}(x - 0.04), x(0) = 0.12.$$

解之得  $x = 0.04 + ce^{-\frac{t}{10}}$ . 由  $x(0) = 0.12$  得  $c = 0.08$ ,

于是  $x = 0.04 + 0.08e^{-\frac{t}{10}}$ .

当  $t = 10$  时,  $x = 0.04 + 0.08 \cdot e^{-1} = 0.07$ .

## 第七章 一元微积分的应用

### 习题七

1. (1) 令  $f(x) = x^3$ , 可排除 A, B, C.

令  $F(x) = -f(-x), x_1 > x_2, -x_1 < -x_2$ . 所以  $F(x_1) = -f(-x_1) > -f(-x_2) = F(x_2)$ . 故选 D.

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} F(a) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - a \cos nx]^2 dx \\ &= a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx - 2a \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \\ &= \pi a^2 - 2a \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \end{aligned}$$

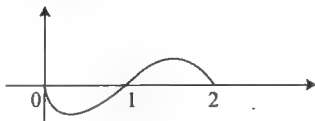
为  $a$  的二次式.

所以当  $a = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$  时,  $F(a)$  有极小值. 故选择 B.

(3)【解】由  $f'(x) > 0, x \neq 0$ , 知  $f(x)$  单调递增, 排除 C、D. 又当  $x < 0$  时,  $f''(x) \leq 0$ , 知  $f(x)$  为凸函数. 当  $x > 0$  时,  $f(x)$  为凹函数, 排除 A, 故 B 为正确答案.

(4)【解】假设两个极值点为  $x = t$  及  $x = -t (t \neq 0)$ , 于是  $f(t) = -f(-t)$ . 所以  $at^3 + bt^2 + ct + d = at^3 - bt^2 + ct - d$ , 所以  $b + d = 0$ . 又  $f'(t) = f'(-t) = 0$ , 即  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$  的根为  $x = \pm t$ , 所以  $b = 0$ , 于是  $d = 0$ . 所以  $f(x) = ax^3 + cx$  为奇函数, 关于原点对称. 因此 B 为正确答案.

(5)【解】曲线  $y = x(x-1)(x-2)$  的图形为



由图知 C 为答案.



2. (1)【解】由  $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$ , 所以  $0 < x < \frac{1}{4}$ , 即  $F(x)$  的单调递减区间为  $(0, \frac{1}{4})$ .

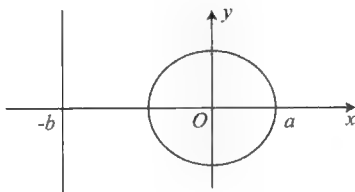
(2)【解】 $y' = 3x^2 - 1$ , 所以在  $x = \frac{1}{3}$  处切线的斜率为  $k = 3 \cdot \frac{1}{3^2} - 1 = -\frac{2}{3}$ .

切线方程:  $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{27}$ , 曲线和切线的交点为  $x = -\frac{2}{3}$ . [解曲线和切线的联立方程得  $x^3 - \frac{x}{3} + \frac{2}{27} = 0$ , 可得  $(x - \frac{1}{3})^2(x + \frac{2}{3}) = 0$ , 解得  $x = -\frac{2}{3}$ ]

$$\text{比值为 } \frac{\int_{-\frac{2}{3}}^0 (x^3 - x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}) dx}{\int_0^{\frac{1}{3}} (x^3 - x + \frac{2}{3} + \frac{2}{27}) dx} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{108}} = \frac{8}{1}.$$

(3)【解】参考 P193 页的【例 7.32】.

(4)【解】



$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a [(\sqrt{a^2 - y^2} + b)^2 - (-\sqrt{a^2 - y^2} + b)^2] dy \\ &= 2\pi \int_0^a 4b \sqrt{a^2 - y^2} dy \stackrel{y = a \sin t}{=} 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= 2ba^2 \pi^2. \end{aligned}$$

(5)【解】极坐标图形绕极轴旋转所成旋转体体积公式为

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_a^b \rho^3(\theta) \sin \theta d\theta,$$

所以

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 64(1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{-128\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta)^3 d(1 + \cos \theta) \\ &= -\frac{128\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 160\pi. \end{aligned}$$

(6)【解】 $A = 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ .

$$\begin{aligned} (7) \text{【解】} A &= 2\pi \int_0^{\pi} r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= -2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{2} a^2 (1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}} d(1 + \cos \theta) \\ &= -2\sqrt{2} a^2 \pi \frac{2}{5} (1 + \cos \theta)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{5} a^2. \end{aligned}$$

$$3. (1) \text{ 证明: } \varphi'(x) = \frac{f(x) [\int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt]}{[\int_0^x f(t) dt]^2} = \frac{f(x) \int_0^x (x-t) f(t) dt}{[\int_0^x f(t) dt]^2},$$

因为  $f(x) > 0, x > t$ , 所以  $\varphi'(x) > 0$ , 即  $\varphi(x)$  单调增加.

$$(2) \text{ 证明: } \varphi'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} \quad (a < \xi < x)$$

$$= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-a}.$$

因为  $f''(x) > 0$ , 因此  $f'(x)$  单调递增, 从而  $f'(x) > f'(\xi)$ , 于是  $\varphi'(x) > 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加.

$$(3) \text{ 证明: } F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} = \frac{\int_a^x [f(x) - f(t)] dt}{(x-a)^2} < 0,$$

所以  $F(x)$  单减.

$$(4) \text{ 证明: } ① F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2\sqrt{f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}} \geq 2. \text{ (因为 } f(x) > 0)$$

$$② F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt < 0, F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0,$$

所以存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 又因为  $F'(x) \geq 2$ ,  $F(x)$  单调递增, 即实根唯一.

$$(5) \text{ 证明: 令 } F(x) = \tan x - 1 + x \cdot F(0) = -1 < 0, F(1) = \tan 1 > 0,$$

所以存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $F(\xi) = 0$ . 又因为  $F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 1 > 0 (0 < x < 1)$ ,

所以  $F(x)$  单调递增, 即实根唯一.

$$(6) \text{ 证明: 令 } F(x) = a_1 \sin x + a_2 \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + a_n \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$\text{则 } F(0) = 0, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = 0.$$

$$\text{由罗尔定理, 存在 } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } F'(\xi) = 0,$$

$$\text{即 } a_1 \cos \xi + a_2 \cos 3\xi + \cdots + a_n \cos(2n-1)\xi = 0.$$

#### 4. 计算题

$$(1) \text{【解】由联立方程 } \begin{cases} x-y+1=0 \\ y=x^2-4x+5 \end{cases} \text{ 解得交点坐标 } (x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (4, 5).$$

由  $y' = 2x - 4$  求得二条法线的斜率分别为  $k_{x=1} = \frac{1}{2}, k_{x=4} = -\frac{1}{4}$ . 相应的法线方程为

$$y-2 = \frac{1}{2}(x-1), y-5 = -\frac{1}{4}(x-4). \text{ 解得法线的交点为 } (x_3, y_3) = \left(6, \frac{9}{2}\right).$$

于是

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{15}{4}.$$

$$(2) \text{【解】} \begin{cases} y-a^2 = 2a(x-a) \\ y = -x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (2a-4)x + (1-a^2) = 0$$

$$x_1 + x_2 = 4 - 2a$$

$$x_1 x_2 = 1 - a^2$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2\sqrt{2a^2 - 4a + 3}$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 + 4x - 1 - 2ax + a^2) dx = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 + (4-2a)x + a^2 - 1) dx$$

$$= \left( -\frac{x^3}{3} + (2-a)x^2 + (a^2-1)x \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + (2-a)(x_2^2 - x_1^2) + (a^2-1)(x_2 - x_1)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + (2-a)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (a^2 - 1)(x_2 - x_1) \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{2a^2 - 4a + 3}(4a^2 - 8a + 6) \\
&= \frac{4}{3}(2a^2 - 4a + 3)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

$$S'(a) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{2a^2 - 4a + 3}(4a - 4) = 0,$$

$$4a - 4 = 0,$$

$a = 1$ . 即  $a = 1$  时, 所围面积最小.

(3)【解】过点  $(1, 1)$  斜率为  $k$  的直线为

$$y = kx + 1 - k.$$

所以

$$\begin{aligned}
F(k) &= \int_0^2 [x^2 - kx - (1-k)]^2 dx \\
&= \int_0^2 [x^4 - 2kx^3 + (k^2 + 2k - 2)x^2 + 2k(1-k)x + (1-k)^2] dx \\
&= \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{2k}{4}x^4 + \frac{k^2 + 2k - 2}{3}x^3 + k(1-k)x^2 + (1-k)^2x \right]_0^2 \\
&= \frac{32}{5} - 8k + \frac{8}{3}(k^2 + 2k - 2) + 4k(1-k) + 2(1-k)^2.
\end{aligned}$$

令  $F'(k) = 0$ , 得

$$F'(k) = -8 + \frac{8}{3}(2k + 2) + (4 - 8k) - 4(1 - k) = \frac{4}{3}k - \frac{8}{3} = 0,$$

$$k = 2.$$

故所求直线方程为  $y = 2x - 1$ .

(4)【解】令  $f'(x) = 2x(2 - x^2)e^{-x^2} = 0$ , 得  $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$ .

$$f(0) = 0, f(\pm\sqrt{2}) = \int_0^2 (2-t)e^{-t} dt = te^{-t} - e^{-t} \Big|_0^2 = 1 + e^{-2},$$

$$f(\pm\infty) = \int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t} dt = te^{-t} - e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

所以, 最大值为  $f(\pm\sqrt{2}) = 1 + e^{-2}$ , 最小值为  $f(0) = 0$ .

(5)【解】

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - 2x - x^2) dx + \int_0^2 (x^2 - x^3 + 2x) dx = \frac{37}{12}.$$

旋转体体积: 由例 7.11

① 平面图形  $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$  绕  $y$  轴旋转所成旋转体体积

为

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

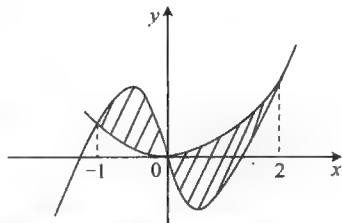
② (使用相同方法可以证明) 平面图形  $a \leq x \leq b \leq 0, 0 \leq y \leq f(x)$  绕  $y$  轴旋转所成旋转体体积为

$$V = -2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

由图知,

$$\begin{aligned}
V &= -2\pi \int_{-1}^0 x(x^3 - 2x - x^2) dx + 2\pi \int_0^2 x(x^2 - x^3 + 2x) dx \\
&= \frac{13\pi}{30} + \frac{88\pi}{15} = \frac{63\pi}{10}.
\end{aligned}$$

$$(6)【解】V = 2 \times 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx \stackrel{\text{令 } x-b = a \sin t}{=} 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (b + a \sin t) a^2 \cos^2 t dt$$



$$= 8\pi b a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8\pi b a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 b a^2.$$

$(x-b)^2 + y^2 = a^2$  绕  $y$  轴旋转相当于  $(y-b)^2 + x^2 = a^2$  绕  $x$  轴旋转.

所以旋转体的表面积

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \stackrel{x = a \sin t}{=} 4\pi ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

(7)【解】

液体静压力 = 液体比重  $\times$  液体深度  $\times$  受力面积

① 由图知抛物线方程为  $y = \frac{3}{5} \sqrt{5x}$ , 于是

$$dp = x \cdot 2y \cdot dx = 6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5}} dx = \frac{6}{5} \sqrt{5x^3} dx,$$

$$p = \int_0^{20} \frac{6}{5} \sqrt{5x^3} dx = \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{20} = 1920.$$

假设将薄板沉到水中, 深为  $h$  处, 此时薄板的曲线方程为

$$y = 3\sqrt{\frac{x-h}{5}}, dp = x \cdot 2y \cdot dx = 6x\sqrt{\frac{x-h}{5}} dx.$$

由题设知

$$6 \int_h^{h+20} x \sqrt{\frac{x-h}{5}} dx = 3840, \text{ 即 } \int_h^{h+20} x \sqrt{\frac{x-h}{5}} dx = 640,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{2}{5} (x-h)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-h)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_h^{h+20} = 640.$$

$$\frac{h}{3} = 4, h = 12.$$

② 由图知抛物线方程为  $y = 3\sqrt{\frac{20-x}{5}}$ . 于是  $dp = x \cdot 2y \cdot dx = 6x\sqrt{\frac{20-x}{5}} dx$

$$p = \frac{6}{\sqrt{5}} \int_0^{20} x \sqrt{20-x} dx = \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{5} (20-x)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{20} - \frac{120}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3} (20-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{20} = 1280.$$

假设将薄板沉到水中, 深为  $h$  处, 此时薄板的曲线方程为

$$y = 3\sqrt{\frac{20+h-x}{5}}, dp = x \cdot 2y \cdot dx = 6x\sqrt{\frac{20+h-x}{5}} dx.$$

由题设知

$$6 \int_h^{h+20} x \sqrt{\frac{20+h-x}{5}} dx = 2 \times 1280, \text{ 即 } \frac{6}{\sqrt{5}} \int_h^{h+20} x (20+h-x)^{\frac{1}{2}} dx = 2560$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{5} (20+h-x)^{\frac{5}{2}} \Big|_h^{h+20} - \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3} (20+h)(20+h-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_h^{h+20} = 2560$$

$$-12 + 20 + h = 16, h = 8.$$

5. 作图

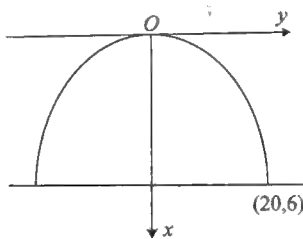
(1)【解】  $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}.$

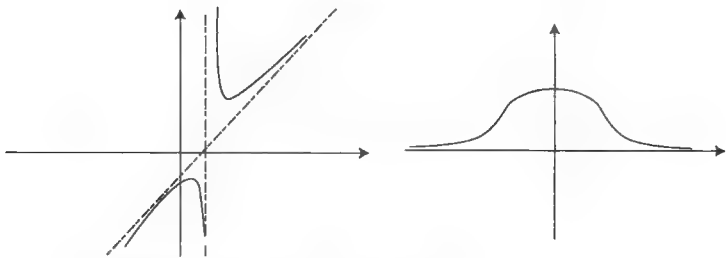
$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ , 垂直渐近线为  $x = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) = -1.$$

斜渐近线为  $y = x - 1$ .





(2)  $y = (1+x^2)e^{-x^2}$  为偶函数, 所以只须考虑  $x > 0$  情况.

$$y' = 2xe^{-x^2} - 2x(1+x^2)e^{-x^2} = -2x^3e^{-x^2}.$$

$x > 0$  时,  $y' < 0$ ,  $y$  递减,  $y(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ .

$$y'' = -6x^2e^{-x^2} + 4x^4e^{-x^2} = (4x^4 - 6x^2)e^{-x^2}.$$

$0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$  时, 函数是凸的,  $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$  时, 函数是凹的.

## 第八章 无穷级数

### 习题八

1. (1)【解】因为  $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  绝对收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  发散. 故选 B.

(2)【解】由莱布尼茨判别法,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ . 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\frac{1}{n}} = 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  发散, 故选 C.

(3)【解】 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 是  $f(x) = x^2$  ( $0 \leq x < 1$ ) 进行奇延拓后展成的傅氏级数.

所以  $s\left(-\frac{1}{2}\right) = -s\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ . 故选 B.

(4)【解】因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  条件收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 因为不知  $a_n$  是否大于 0, 故 A、B、D 的敛散性均无法判断.

对于 C,  $s_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1$ . 故选 C.

(5)【解】 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}$  收敛. 收敛级数的和收敛. 故选 D.

(6)【解】因为级数在  $x = -2$  收敛, 所以收敛半径大于 2. 幂级数在收敛半径内的任何点都绝对收敛. 故选 B.

(7)【解】因为  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  有相同收敛半径. 所以

$$|x-1| < 3, -2 < x < 4$$

在  $(-2, 4)$  中级数一定收敛, 在端点级数不一定收敛. 故选 A.

2. (1)【解】因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+2)} \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n \ln n}} = 1$ ,  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$  发散, 由积分判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散. 所以原级数发散.

(2)【解】因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}{n^3}} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ 收敛, 所以原级数收敛.}$$

(3)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} > 1$ , 所以原级数发散.

(4)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n + \frac{1}{n}} = 0 < 1$ , 所以原级数收敛.

(5)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!n!}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$ , 所以原级数收敛.

(6)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{\frac{1}{n!}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{(n+1)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} = 0 < 1$ , 则原级数收敛.

(7)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{-2}}{\left(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , 原级数收敛.

(8)【解】因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+y\ln y)^{\frac{1}{y}}}{y}$ , 令  $y = \frac{1}{n}$ .

令  $u = \frac{(1+y\ln y)^{\frac{1}{y}}}{y}$ ,  $\ln u = \frac{\ln(1+y\ln y) - y\ln y}{y}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln u &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y\ln y) - y\ln y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln y + 1}{1+y\ln y} - \ln y - 1}{1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + 1 - \ln y - y\ln^2 y - 1 - y\ln y}{1+y\ln y} = 0, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{y \rightarrow 0^+} u = e^0 = 1$ , 即原极限为 1. 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以原级数发散.

(9)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n} = 1 \neq 0$ , 所以原级数发散.

3. (1)【解】因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} a_n^{\frac{1}{n}} \neq 0$ , 原级数发散.

(2)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 0$ , 令  $f(x) = \frac{x+1}{(x+1)\sqrt{x+1}-1}$ .

当  $x > 0$  时,  $f'(x) = \frac{-(x+1)^2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 1}{[(x+1)\sqrt{x+1}-1]^2} < 0$ , 所以数列  $\left\{ \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \right\}$  单减. 根据莱布尼茨

判别法, 级数收敛.

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$  发散, 即原级数条件收敛.

(3)【解】因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \frac{2}{3}$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$  收敛, 即原级数绝对收敛.

(4)【解】因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$ ,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$  收敛, 原级数绝对收敛.

(5)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  收敛, 原级数绝对收敛.

(6)【解】 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{\pi}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$ .

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$ , 又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  条件收敛, 所以原级数条件收敛.

#### 4. 证明

(1) 证明: 因为  $a_n > 0$  且单调递减, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 不妨记为  $a$ , 又由  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 得  $a > 0$ . 容易验证

$$a_n > a, \forall n, \text{ 因此 } 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} < \frac{a_n - a_{n+1}}{a}.$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{a} (a_1 - a)$ , 收敛,

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - a_{n+1}}{a_n}$  收敛.

(2) 考查数列  $\{b_n a_n\}$ . 因为  $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta (\delta > 0 \text{ 为常数})$ , 所以  $b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} > 0$ , 即该数列递

减有下界, 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n a_n$  存在. 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1})$  收敛, 又  $a_{n+1} < \frac{b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1}}{\delta}$ , 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

$$5. (1) \text{【解】} \sum_{n=1}^{\infty} (3^n + \sqrt[3]{n})(x-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-1)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} (x-1)^{2n}.$$

第一个级数的收敛区域为  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , 第二个级数的收敛区域为  $(0, 2)$ , 所以它们的共同收敛区域为  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

当  $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{3^n}$ , 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{3^n}$  收敛, 所以该级数发散. 原级数的收敛区域为  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

(2)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}} = x^2 < 1$ , 于是  $|x| < 1$ .

当  $x = 1$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ , 收敛; 当  $x = -1$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ , 收敛. 于是原级数的收敛域为  $[-1, 1]$ .

(3)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n} |x|^{2n-1}} = \frac{|x|^2}{2} < 1, |x| < \sqrt{2}$ . 当  $x = \pm\sqrt{2}$  时, 得数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}}$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{-\sqrt{2}}$  都发散. 原级数的收敛域为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

$$(4) \text{【解】} \sum_{n=1}^{\infty} \left( x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n x^n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  的收敛区域  $(-1, 1)$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n x^n}$  的收敛区域  $(\frac{1}{2}, +\infty) \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$ . 所以公共收敛区域为  $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ .

(5)【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x-1|^{2n}}{n \cdot 9^n}} = \frac{(x-1)^2}{9} < 1$ ,  $|x-1| < 3$ , 当  $x-1 = \pm 3$  时, 得数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 发散. 该级数的收敛区域为  $(-2, 4)$ .

(6)【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}} |x-5|^n} = |x-5| < 1$ ,  $4 < x < 6$ ,  $x=4$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  收敛, 当  $x=6$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散. 该级数的收敛域为  $[4, 6)$ .

6. (1)【解】 因为  $\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{18} \left( \frac{1}{3n+1} - \frac{2}{3n+4} + \frac{1}{3n+7} \right)$ , 所以

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{18} \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+7} \right) = \frac{1}{24},$$

$$\text{即} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{24}.$$

$$(2) \text{【解】} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right).$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{n+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(3)【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}} = |x|^2 < 1$ , 级数收敛, 所以收敛半径为 1. 当  $x = \pm 1$  时, 由莱布尼兹判别法知收敛. 所以收敛区域为  $[-1, 1]$ .

$$\text{令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{所以 } s(x) = \int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, x \in [-1, 1].$$

(4)【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n+1)} |x|^n = |x| < 1$ . 当  $x = \pm 1$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(n+1)$  都发散. 所以收敛区域为  $(-1, 1)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)' = x \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$$

$$(5) \text{【解】} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x+1|^n}{2^n n}} = \frac{|x+1|}{2} < 1, -3 < x < 1,$$

当  $x=1$  时, 得数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 发散; 当  $x=-3$  时得数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ , 收敛. 于是收敛域为  $[-3, 1)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n} &= \int_{-1}^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n} \right)' dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^x \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x+1}{2} \right)^{n-1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^x \frac{2}{1-x} dx \\ &= \ln 2 - \ln(1-x) = \ln \frac{2}{1-x}, x \in [-3, 1). \end{aligned}$$



(6)【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}} = \frac{|x|}{2} < 1, |x| < 2$ . 当  $x = 2$  时, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$  发散. 当  $x = -2$  时, 得

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(n+1)$  发散, 所以收敛区域为  $(-2, 2)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} x^{n-1} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n-1}} \right)' = 4 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+1} \right)' = 2 \left( \frac{x^2}{2-x} \right)' = \frac{16}{(2-x)^3}, (-2, 2)$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{16}{(2-1)^3} = 16.$$

$$\begin{aligned} 7. (1) \text{【解】} f'(x) &= \frac{1-4x}{1+x-2x^2} = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{1-x} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} - 1] x^n. \end{aligned}$$

上述级数的收敛半径为  $\frac{1}{2}$ . 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} - 1] x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} - 1] \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n-1} 2^n - 1] x^n}{n}. \end{aligned}$$

当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 得数项级数  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n}$ .

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n-1} 2^n - 1] x^n}{n} (-1)^n \frac{1}{2^n}$  发散.

当  $x = \frac{1}{2}$  时得数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^n n}\right)$ . 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2^n n}$  收敛, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^n n}\right)$  收敛. 所以

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} - 1] x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n-1} 2^n - 1] x^n}{n} \text{ 的收敛区域为 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(2)【解】由 6(3) 得知

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{2} \arctan x = \frac{1}{4} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] + \frac{1}{2} \arctan x \\ &= \frac{1}{4} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

$$(3) \text{【解】} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}, (-1, 1].$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}.$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以当  $x = \pm 1$  时上述级数都收敛. 所以

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, [-1, 1].$$

$$\begin{aligned} (4) \text{【解】} f(x) &= \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{2}{1+2x} + \frac{1}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} + 1] x^n. \end{aligned}$$

以上级数的收敛半径为  $\frac{1}{2}$ .

当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 得  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2 + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right]$ , 发散;

当  $x = \frac{1}{2}$  时, 得  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n 2 + \frac{1}{2^n} \right]$ , 发散.

所以  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} + 1] x^n, \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

$$(5) \text{【解】} f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n}.$$

注意到  $f'(0) = 0, f(0) = -1$ .

$$f(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)} x^{2n+2},$$

当  $x = \pm 1$  时, 考查数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}$ . 由拉阿伯判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 - 11n}{(2n+1)^2} = \frac{5}{2}, \text{ 数项级数收敛. 所以}$$

$$f(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)} x^{2n+2}, [-1, 1].$$

$$\begin{aligned} 8. (1) \text{【解】} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+4-3} - \frac{1}{x+4-2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+4}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+4}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n, (-6, -2). \end{aligned}$$

$$(2) \text{【解】} f(x) = \lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x = \frac{1}{\ln 10} \ln(1+x-1) = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, (0, 2].$$

9. (1) 【解】① 余弦函数

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos \frac{nx}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d\sin \frac{nx}{2} = \frac{2}{n\pi} \left[ x^2 \sin \frac{nx}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin \frac{nx}{2} dx \\ &= \frac{-4}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \sin \frac{nx}{2} dx = \frac{8}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} x d\cos \frac{nx}{2} = \frac{8}{n^2 \pi} \left[ x \cos \frac{nx}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos \frac{nx}{2} dx \\ &= \frac{8}{n^2 \pi} \cdot 2\pi \cos \frac{2n\pi}{2} = (-1)^n \cdot \frac{16}{n^2}. \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{2} = \frac{4}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{16}{n^2} \cos \frac{nx}{2}, [0, 2\pi].$$

② 正弦函数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{nx}{2} dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d\cos \frac{nx}{2} = -\frac{2}{n\pi} \left[ x^2 \cos \frac{nx}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \cos \frac{nx}{2} dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} 4\pi^2 (-1)^n + \frac{8}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} x d\sin \frac{nx}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8\pi}{n} + \frac{8}{n^2 \pi} \left[ x \sin \frac{nx}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin \frac{nx}{2} dx = (-1)^{n+1} \frac{8\pi}{n} + \frac{16}{n^3 \pi} \cos \frac{nx}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8\pi}{n} + \frac{16}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2}, (0, 2\pi).$$

(2)【解】① 余弦函数

$$a_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{8}{n^2 \pi^2} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{2n\pi}{2} \right),$$

$$a_n = \begin{cases} -2, & n = 4k+2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$\text{于是 } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}, (0, 2).$$

② 正弦函数

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$\text{于是 } f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}, (0, 2).$$

10. (1)【解】 $|x|$  为偶函数, 将它展拓成以  $2\pi$  为周期的周期函数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1],$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{n^2 \pi}, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

$$\text{于是 } f(x) = \frac{1}{2} \cos x + |x| = \frac{\pi}{2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \cos x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, [-\pi, \pi].$$

(2)【解】 $f(x)$  为奇函数, 拓展成以  $2\pi$  为周期的周期函数得

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n} (-1)^n,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n} (-1)^n \right] \sin nx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{2} \right] \sin nx, (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

## 第九章 矢量代数与空间解析几何

### 习题九

1.【解】

由矢量加法的平行四边形法则知: 当  $0 < \langle a, b \rangle < \frac{\pi}{2}$  时,  $|a+b| > |a-b|$ ; 当  $\langle a, b \rangle > \frac{\pi}{2}$  时,  $|a+b| < |a-b|$ ; 当  $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$  时,  $|a+b| = |a-b|$ .

$$\begin{aligned} 2. \text{【解】} (1) & (a+b+c) \times c + (a+b+c) \times b - (b-c) \times a \\ &= a \times c + b \times c + a \times b + c \times b - b \times a + c \times a = 2a \times b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (a+2b-c) \cdot [(a-b) \times (a-b-c)] \\ &= (a+2b-c) \cdot [-a \times b - a \times c - b \times a + b \times c] = (a+2b-c) \cdot [-a \times c + b \times c] \\ &= a \cdot (b \times c) - 2b \cdot (a \times c) = 3a \cdot (b \times c). \end{aligned}$$

$$(3) [(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) = [a \times b + a \times c + b \times c] \cdot (c+a)$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

3.【解】 $0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\lambda \mathbf{a} + 17\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - \mathbf{b})$

$$= 3\lambda |\mathbf{a}|^2 - \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{2}{3}\pi + 51 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{2}{3}\pi - 17 |\mathbf{b}|^2 = 17\lambda - 680.$$

所以  $\lambda = 40$ .

4.【解】

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

所求单位矢量为  $\pm \frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ .

5.【解】

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 3\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 1 &= (4\mathbf{m} - \mathbf{n}) \cdot (2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}) + 3(4\mathbf{m} - \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} + 2\mathbf{n}) - 2(\mathbf{m} + 2\mathbf{n}) \cdot (2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}) + 1 \\ &= 8|\mathbf{m}|^2 + 3|\mathbf{n}|^2 + 12|\mathbf{m}|^2 - 6|\mathbf{n}|^2 - 4|\mathbf{m}|^2 + 12|\mathbf{n}|^2 + 1 \\ &= 16|\mathbf{m}|^2 + 9|\mathbf{n}|^2 + 1 = 16 \times 4 + 9 \times 1 + 1 = 74. \end{aligned}$$

6.【解】假设平行四边形的两边为矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

不妨假设  $\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n} \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n} \end{cases}$ , 则  $\begin{cases} \mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n} \\ \mathbf{b} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n} \end{cases}$ .

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2\mathbf{m} - \mathbf{n}) \times (-\mathbf{m} + 3\mathbf{n}) = 5\mathbf{m} \times \mathbf{n},$$

$$S_{\square} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 5|\mathbf{m} \times \mathbf{n}| = 5|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\sin(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 5.$$

7.【解】①  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

$$\text{所以 } 0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (k\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2k|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 2k + 4, k = -2;$$

$$\text{② } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (k\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (2 - k)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

以  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为邻边的平行四边形面积为  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ , 则

$$6 = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |2 - k| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2|2 - k|, k - 2 = \pm 3,$$

所以  $k = -1$  或  $k = 5$ .

8.【解】所求平面平行于  $x + y + 2z = 0$ , 所以该平面法向量为  $(1, 1, 2)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } x = 1, y = 1, z = 1. \text{ 即三平面的交点为 } (1, 1, 1).$$

$$\text{所以所求平面为 } (x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0,$$

$$\text{即 } x + y + 2z - 4 = 0.$$

9.【解】过平面  $x + 28y - 2z + 17 = 0$  和平面  $5x + 8y - z + 1 = 0$  的交线的平面方程为

$$x + 28y - 2z + 17 + \lambda(5x + 8y - z + 1) = 0,$$

$$\text{即 } (1 + 5\lambda)x + (28 + 8\lambda)y - (2 + \lambda)z + 17 + \lambda = 0.$$

设所求平面和球面的切点为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 于是在该点的法矢量为  $(x_0, y_0, z_0)$ . 于是

$$\begin{cases} (1 + 5\lambda)x_0 + (28 + 8\lambda)y_0 - (2 + \lambda)z_0 + 17 + \lambda = 0 \\ \frac{1 + 5\lambda}{x_0} = \frac{28 + 8\lambda}{y_0} = \frac{-(2 + \lambda)}{z_0} = t \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases},$$

消去  $x_0, y_0, z_0, t$ , 得

$$(1 + 5\lambda)^2 + (28 + 8\lambda)^2 + (2 + \lambda)^2 = (17 + \lambda)^2.$$

$$\text{即 } 89\lambda^2 + 428\lambda + 500 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -\frac{250}{89}.$$

当  $\lambda = -2$  时, 所求平面为  $3x - 4y - 5 = 0$ ;

当  $\lambda = -\frac{250}{89}$  时, 所求平面为  $387x - 164y - 24z - 421 = 0$ .

10.【解】由题意,设  $L_2$  的方向向量为  $(m, n, 1)$ , 其中  $m > 0$ .  $x$  轴的单位向量为  $(1, 0, 0)$ , 则

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{m}{1 \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \quad (*)$$

过  $L_1$  上的点  $(7, 3, 5)$  及点  $(2, -3, -1)$  的向量为  $(5, 6, 6)$ , 由题意, 该向量与  $L_1$  的方向向量  $(1, 2, 2)$  及  $L_2$  的方向向量  $(m, n, 1)$  共面. 所以混合积为 0, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ m & n & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

得到  $4n - 4 = 0, n = 1$ . 代入式  $(*)$ , 得到  $m = \frac{2}{\sqrt{6}}$ . 于是  $L_2$  的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{1}, \text{ 即 } \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{\sqrt{6}} = \frac{z+1}{\sqrt{6}}.$$

11.【解】将两直线方程转化为参数方程, 得

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = s \\ y = -5 + 2s \\ z = 2 + 7s \end{cases}$$

两直线上的点之间的距离平方为:

$$\begin{aligned} d^2 &= (-1 + 3t - s)^2 + (-3 + 2t + 5 - 2s)^2 + (t - 2 - 7s)^2 \\ &= (-1 + 3t - s)^2 + (2 + 2t - 2s)^2 + (t - 2 - 7s)^2 \end{aligned}$$

当  $t, s$  使  $d^2$  达到最小值时,  $d$  即为垂直距离.

$$\frac{\partial d^2}{\partial t} = 6(-1 + 3t - s) + 4(2 + 2t - 2s) + 2(t - 2 - 7s) = 0,$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial s} = -2(-1 + 3t - s) - 4(2 + 2t - 2s) - 14(t - 2 - 7s) = 0,$$

$$\text{解} \begin{cases} 28t - 28s - 2 = 0 \\ -28t + 108s + 22 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } s = -\frac{1}{4}, t = -\frac{5}{28}.$$

于是

$$d^2 = \left(-1 - \frac{15}{18} + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{10}{28} + \frac{2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{28} - 2 + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{105}{49},$$

$$\text{即 } d = \frac{3\sqrt{35}}{7}.$$

12.【解】假设直线与  $z$  轴交点为  $(0, 0, z_0)$ , 则  $2z_0 - 6 = 0, z_0 = 3$ ,

将  $(0, 0, 3)$  代入  $x + 4y - z + d = 0$ , 得到  $d = 3$ .

$$13.【解】由 \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}, \text{ 得直线与平面的交点为 } (0, -1, 0).$$

将已知直线转化为:  $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = z$ , 则该直线的方向向量为  $(-2, -1, 1)$ . 所求直线与平面的法向量为

$$(1, 1, 1), \text{ 已知直线的方向向量 } (-2, -1, 1) \text{ 都垂直, 于是所求直线的方向向量为 } \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + 3j - k.$$

$$\text{于是所求直线为 } \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}.$$

14.【解】过点  $(1, -1, 1), (-1, 1, 0)$  的向量为  $(2, -2, 1)$ , 由题意, 两直线的方向向量  $(1, 2, \lambda), (1, 1, 1)$  与

$$(2, -2, 1) \text{ 共面, 所以 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

得  $4\lambda - 5 = 0, \lambda = \frac{5}{4}$ .

15.【解】在  $xOy$  平面上的投影:  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ .

在  $xOz$  平面上的投影:  $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ ,

在  $yOz$  平面上的投影:  $\begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}, (|y| \leq \sqrt{2})$ .

16.【解】因为母线平行于  $z$  轴, 消去  $z$ , 得

$$5x^2 - 3y^2 = 1$$

即为所求.

17.【解】由平面束方程知, 直线  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$  的投影柱面方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(y - x - z - 1) = 0,$$

即  $(1 - \lambda)x + (1 + \lambda)y - (1 + \lambda)z - (1 + \lambda) = 0$ .

又上述平面与平面  $x + y + z = 0$  垂直, 所以

$$(1 - \lambda) \cdot 1 + (1 + \lambda) \cdot 1 - (1 + \lambda) \cdot 1 = 0,$$

得到  $\lambda = 1$ , 于是投影平面为

$$2y - 2z - 2 = 0, \text{ 即 } y - z - 1 = 0,$$

所求投影直线为  $\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ .

18.【解】因为母线平行于  $z$  轴, 只要在方程中消去  $z$ , 得到

$$5x^2 - 3y^2 = 1$$

为所求.

## 第十章 多元函数微分学

### 习题十

1.【解】 $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_2'y, \frac{\partial v}{\partial x} = g'(1 + y)$ , 所以  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (1 + y)g'(f_1' + f_2'y)$ .

2.【解】原式两边对  $y$  求导,  $z$  是  $y$  的函数, 得

$$2z \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\left(\frac{z}{y}\right) + y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right) \frac{\frac{\partial z}{\partial y}y - z}{y^2}, \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\varphi\left(\frac{z}{y}\right) - z\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz - y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

3.【解】 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$ .

4.【解】(1)  $f_1' + f_2' \frac{\partial z}{\partial x} + f_3' \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1' + f_3'}{f_2' + f_3'}$ ,

$$f_1' + f_3' \frac{\partial z}{\partial y} + f_2' \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_1' + f_2'}{f_2' + f_3'},$$

$$\text{于是 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{(f_1' + f_3')dx + (f_1' + f_2')dy}{f_2' + f_3'}.$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x + x \frac{\partial z}{\partial x}) + f_2' \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xf_1'}{1 - xf_1' - f_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'x \frac{\partial z}{\partial y} + f_2' \left(\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right), \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f_2'}{1 - xf_1' - f_2'},$$

$$\text{于是 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{xf_1'dx - f_2'dy}{1 - xf_1' - f_2'}.$$

$$5. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(e^x \sin y, x^2 + y^2) e^x \sin y + 2x f_2'(e^x \sin y, x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^x \sin y (f_{11}'' e^x \cos y + 2y f_{12}'') + e^x \cos y f_1' + 2x (f_{12}'' e^x \cos y + 2y f_{22}'') \\ &= f_{11}'' e^{2x} \sin y \cos y + 2e^x (y \sin y + x \cos y) f_{12}'' + 4xy f_{22}'' + f_1' e^x \cos y. \end{aligned}$$

$$6. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = 2f_1' + \frac{1}{y} f_2'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \left( 2f_{11}'' + \frac{1}{y} f_{12}'' \right) + \frac{1}{y} (2f_{12}'' + \frac{1}{y} f_{22}'') = 4f_{11}'' + \frac{4}{y} f_{12}'' + \frac{1}{y^2} f_{22}''.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_2'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} f_2' + \frac{x^2}{y^4} f_{22}''.$$

$$7. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y f_1' + f_2'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \ln y (f_{11}'' \ln y + f_{12}'') + f_{12}'' \ln y + f_{22}'' = f_{11}'' \ln^2 y + 2f_{12}'' \ln y + f_{22}''.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{y} f_1' + \ln y (f_{11}'' \frac{x}{y} - f_{12}'') + f_{12}'' \frac{x}{y} - f_{22}'' \\ &= \frac{x \ln y}{y} f_{11}'' + (\frac{x}{y} - \ln y) f_{12}'' - f_{22}'' + \frac{1}{y} f_1'. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x}{y} f_1' - f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2} f_1' + \frac{x}{y} (\frac{x}{y} f_{11}'' - f_{12}'') - \frac{x}{y} f_{12}'' + f_{22}'' = \frac{x^2}{y^2} f_{11}'' - \frac{2x}{y} f_{12}'' + f_{22}'' - \frac{x}{y^2} f_1'.$$

8. 【解】以上两式对  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0 \\ 1 + 2y \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 3z^2 \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \frac{dy}{dx} + (1+2z) \frac{dz}{dx} = -1 \\ 2y \frac{dy}{dx} + (1+3z^2) \frac{dz}{dx} = -1 \end{cases}.$$

由克莱姆法则解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2z - 3z^2}{1 + 3z^2 - 2y - 4yz}, \frac{dz}{dx} = \frac{2y - 1}{1 + 3z^2 - 2y - 4yz}.$$

$$9. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + x f'\left(\frac{y}{x}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3} f'''\left(\frac{y}{x}\right) + 2 \frac{y}{x^3} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{y^2}{x^3} f'' + 2 \frac{y}{x^3} \varphi' + \frac{y^2}{x^4} \varphi'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x} f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} f'''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= -\frac{y}{x^2} f'' - \frac{1}{x^2} \varphi' - \frac{y}{x^3} \varphi'' \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} f'' + \frac{1}{x^2} \varphi''$$

$$\text{于是 } x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x} f'' + \frac{2y}{x} \varphi' + \frac{y^2}{x^2} \varphi'' - 2 \frac{y^2}{x} f'' - \frac{2y}{x} \varphi' - \frac{2y^2}{x^2} \varphi'' + \frac{y^2}{x} f'' + \frac{y^2}{x^2} \varphi'' = 0.$$

$$10. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x f_1' + y f_2'(xy)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x[-f_{11}'' + xf_{12}''\varphi'] + f_2'\varphi' + y\varphi'[-f_{12}'' + xf_{22}''\varphi'] + xyf_2'\varphi'' \\ &= (\varphi' + xy\varphi'')f_2' - 2xf_{11}'' + (2x^2 - y)\varphi'f_{12}'' + xy(\varphi')^2f_{22}'',\end{aligned}$$

$$11. \text{【解】} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + p(x), \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p(x)}{1 - \varphi'(u)}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} - p(y), \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-p(y)}{1 - \varphi'(u)}.$$

$$\begin{aligned}p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y} &= p(y)z'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + p(x)z'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{p(y)z'(u)p(x)}{1 - \varphi'(u)} - \frac{p(x)z'(u)p(y)}{1 - \varphi'(u)} = 0.\end{aligned}$$

$$12. \text{【解】} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} = Q(x, y(x)).$$

$$\text{所以 } \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot y',$$

$$\text{于是 } \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial y} + z \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot y' = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} + (z - y') \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

$$13. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = u_x' e^{ax+y} + au e^{ax+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = u_y' e^{ax+y} + u e^{ax+y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= u_{xy}'' e^{ax+y} + u_x' e^{ax+y} + au_y' e^{ax+y} + au e^{ax+y} \\ &= au_y' e^{ax+y} + u_x' e^{ax+y} + au e^{ax+y}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z &= au_y' e^{ax+y} + u_x' e^{ax+y} + au e^{ax+y} - u_x' e^{ax+y} - au e^{ax+y} - u_y' e^{ax+y} - u e^{ax+y} + u e^{ax+y} \\ &= au_y' e^{ax+y} - u_y' e^{ax+y} = 0.\end{aligned}$$

于是  $a = 1$ .

$$14. \text{【解】} \frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f' \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} x^2 \right)$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f' \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} y^2 \right).$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' + f' \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

$$\text{令 } u = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 得 } f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0.$$

$$\text{于是 } u f''(u) + f'(u) = 0, (u f'(u))' = 0.$$

$$u f'(u) = c_1, f'(u) = \frac{c_1}{u}, f(u) = c_1 \ln u + c_2.$$

即  $z = c_1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c_2$  ( $c_1, c_2$  为任意常数).

15. 【解】设切点为  $(x_0, y_0, z_0)$  则所求切面的法向量为  $\{2x_0, 4y_0, 6z_0\}$ . 所以

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{3} = t, x_0 = \frac{t}{2}, y_0 = t, z_0 = \frac{t}{2}.$$

$$\text{代入曲面方程得: } \frac{t^2}{4} + 2t^2 + 3 \frac{t^2}{4} = 12, t = \pm 2.$$

当  $t = 2$  时,

$$x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 1.$$

所求切面方程为  $(x-1) + 4(y-2) + 3(z-1) = 0$ , 即  $x + 4y + 3z - 12 = 0$ ;

当  $t = -2$  时,



$$x_0 = -1, y_0 = -2, z_0 = -1.$$

所求切面方程为  $(x+1) + 4(y+2) + 3(z+1) = 0$ , 即  $x + 4y + 3z + 12 = 0$ .

$$16. \text{【解】} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 (F) \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 (G) \end{cases}$$

在  $M(1, 1, 1)$  处

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_M = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \bigg|_M = 16, \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_M = \begin{vmatrix} 2z & 2x-3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \bigg|_M = 9,$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_M = \begin{vmatrix} 2x-3 & 2y \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \bigg|_M = -1$$

所以在  $M(1, 1, 1)$  处圆的方向向量为  $(16, 9, -1)$ .

$$\text{所求切线为 } \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1},$$

所求法平面为  $16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0$ , 即  $16x + 9y - z - 24 = 0$ .

$$17. \text{【解】} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x = -1, y = -1, z(-1, -1) = -1.$$

当  $x = 0$  时,  $z = y^2 + y, -3 \leq y \leq 0$ .

最大值为  $z(0, -3) = 9$ , 最小值为  $z(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ .

当  $y = 0$  时,  $z = x^2 + x, -3 \leq x \leq 0$ .

最大值为  $z(-3, 0) = 6$ . 最小值为  $z(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ .

当  $x + y = -3$  时,  $z = 3x^2 + 9x + 6, -3 \leq x \leq 0$ .

当  $x = -\frac{3}{2}$  时  $z$  有最小值  $z = -\frac{3}{4}$ . 即  $z(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$ .

当  $x = 0$  时  $z$  有最大值  $z = 6$ . 即  $z(0, -3) = 6$ .

当  $x = -3$  时  $z$  有最大值  $z = 6$ . 即  $z(-3, 0) = 6$ .

综上所述:  $z(0, -3) = z(-3, 0) = 6$  为最大值,  $z(-1, -1) = -1$  为最小值.

18. 【解】设直角平行六面体在第一象限的顶点为  $(x, y, z)$ .

题目转化为求  $V = 8xyz$  的最大值, 其中  $x, y, z$  满足  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda \cdot \frac{x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2} = 0, \text{解得 } x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}. \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda \cdot \frac{z}{c^2} = 0 \end{cases}$$

当  $x \rightarrow a-, y \rightarrow b-, z \rightarrow c-$  任意一个成立时, 都有  $V \rightarrow 0$ . 所以,

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}, \text{时 } V_{\max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

19. 【解】设曲面上达到最短距离的点为  $(x, y, z)$ , 则题目转化为求  $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$  的最小值, 其中  $x, y, z$  满足  $(x-y)^2 - z^2 = 1$ .

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x-y)^2 - \lambda z^2 - \lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \lambda(x-y) = 0 & ① \\ y - \lambda(x-y) = 0 & ② \\ z - \lambda z = 0 & ③ \end{cases} \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0 \end{cases}$$

由③,若 $\lambda = 1$ ,

代入①,②得 $\begin{cases} x+x-y=0 \\ y-x+y=0 \end{cases}$ ,解得 $x=0, y=0$ .代入曲面方程 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ ,得到 $z^2 = 1$ ,此时 $d^2 = 1$ .

由③,若 $\lambda \neq 1$ ,解得 $z=0$ ,由①,②得到 $x=-y$ ,代入曲面方程 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ ,得到 $x^2 = \frac{1}{4}, y^2 = \frac{1}{4}$ ,此时 $d^2 = \frac{1}{2}, d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

所以所求的最短距离为 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**20.【解】**构造函数 $F(x, y, z, \lambda) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{y} - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{z} - 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2) = 0 \end{cases}, \text{解之得, } x=r, y=\sqrt{2}r, z=\sqrt{3}r.$$

因为在球面上当 $y^2 + z^2$ 趋于 $6r^2$ , $x$ 趋于 $0^+$ 时, $u$ 趋于 $-\infty$ .

所以当 $x=r, y=\sqrt{2}r, z=\sqrt{3}r$ 时, $u$ 达到最大值.

$$u_{\max} = \ln r + 2\ln \sqrt{2}r + 3\ln \sqrt{3}r = \ln(6\sqrt{3}r^5).$$

对于任意正实数 $a, b, c$ ,令 $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ .

$$\text{则 } \ln \sqrt{a} + 2\ln \sqrt{b} + 3\ln \sqrt{c} \leq \ln 6\sqrt{3}r^5, r = \left(\frac{a+b+c}{6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{即 } \ln ab^2c^3 \leq 2\ln 6\sqrt{3} \left(\frac{a+b+c}{6}\right)^3$$

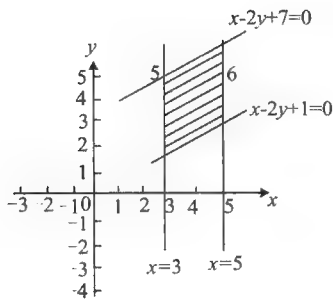
$$abc^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6}\right)^3.$$

## 第十一章 重积分

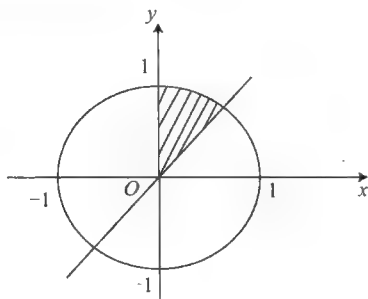
### 习题十一

$$1. \text{【解】}(1) I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x, y) dy.$$

$$(2) I = \int_2^3 dy \int_3^{2y-1} f(x, y) dx + \int_3^5 dy \int_3^5 f(x, y) dx + \int_5^6 dy \int_{2y-7}^5 f(x, y) dx = \int_3^5 dx \int_{\frac{x-7}{2}}^{\frac{x+7}{2}} f(x, y) dy.$$



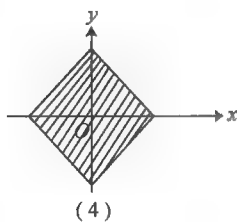
(2)



(3)

$$\begin{aligned} (3) I &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) I &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{-1}^0 dx \int_{-x-1}^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_{-y-1}^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx. \end{aligned}$$



(4)

2. 【解】(1) 原式 =  $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx.$

(2) 原式 =  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$

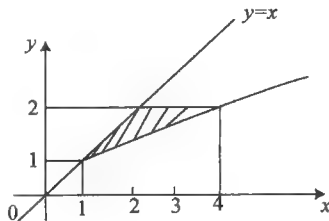
(3) 原式 =  $\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$

3. 【解】(1) 由已知条件可得:  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$

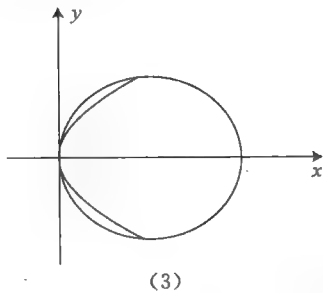
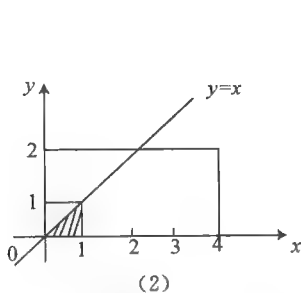
(2) 由已知条件可得:  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$

(3) 由已知条件可得:  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$

4. 【解】(1) 由图可知原式 =  $\int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi x}{2y} \Big|_y^{y^2} dy$   
 $= -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy$   
 $= -\frac{4}{\pi^2} y \sin \frac{\pi y}{2} \Big|_1^2 + \frac{4}{\pi^2} \int_1^2 \sin \frac{\pi y}{2} dy = \frac{4}{\pi^3} (\pi + 2).$



(2) 由图可知: 原式 =  $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dy \int_y^1 dx = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dy - \int_0^1 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$   
 $= \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^1 y de^{-\frac{y^2}{2}} = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dy + ye^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-\frac{1}{2}}.$



(3)【解】因为  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}$  满足  $f(x, -y) = -f(x, y)$ , 即  $f(x, y)$  关于  $y$  为奇函数, 又积分区域关于  $x$  轴对称, 所以该二重积分等于 0.

(4)【解】因为  $y' = 4x^3 - 3x^2$ ,  $y'' = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1) < 0$ , 解得  $0 < x < \frac{1}{2}$ . 此时图形在  $x$  轴下方, 所以

$$\iint_D \frac{y}{x^6} dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{x^4-x^3}^0 \frac{y}{x^6} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y^2}{x^6} \Big|_{x^4-x^3}^0 dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x^4-x^3)^2}{x^6} dx = -\frac{7}{48}.$$

(5)【解】使用极坐标变换可得:

$$\text{原式} = \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta}{\rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho = 0.$$

5. (1)【解】使用极坐标变换可得:

$$\iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\epsilon}^1 \ln \rho^2 \rho d\rho = \pi \int_{\epsilon}^1 \ln \rho^2 d\rho^2 = \pi (\rho^2 \ln \rho^2 - \rho^2) \Big|_{\epsilon}^1 = \pi (-\epsilon^2 \ln \epsilon^2 + \epsilon^2 - 1),$$

$$\text{因此 } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy = -\pi.$$

(2)【解】交换积分次序:

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy &= \int_0^a f'(y) dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} = \int_0^a f'(y) dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{-ay+2 \cdot \frac{a+y}{2} x - x^2}} \\ &= \int_0^a f'(y) \arcsin \left( \frac{x - \frac{a+y}{2}}{\frac{a-y}{2}} \right) \Big|_y^a dy = \int_0^a f'(y) \pi dy = \pi [f(a) - f(0)]. \end{aligned}$$

$$(3)【解】令 \rho^2 = x^2 + y^2, 则原式 = \iint_{D_{\rho, \theta}} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

$$\stackrel{\text{令 } \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = u}{=} \pi \int_0^1 \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du \stackrel{\text{令 } u = \tan \theta}{=} \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{8} (\pi - 2).$$

$$\begin{aligned} 6. \text{ 证明: 因为 } \frac{1}{2\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a 2\pi \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^a f(\rho) e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho, \text{ 得证.} \end{aligned}$$

$$7. \text{ 证明: 令 } F(x) = \int_a^x p(t) f(t) dt \int_a^x p(t) g(t) dt - \int_a^x p(t) dt \int_a^x p(t) f(t) g(t) dt,$$

则:  $F(0) = 0$ , 且可以得到:

$$F'(x) = p(x) f(x) \int_a^x p(t) g(t) dt + p(x) g(x) \int_a^x p(t) f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 & -p(x) \int_a^x p(t) f(t) g(t) dt - p(x) f(x) g(x) \int_a^x p(t) dt \\
 & = \int_a^x p(t) p(x) [f(x) - f(t)] [g(t) - g(x)] dt \leq 0.
 \end{aligned}$$

$F'(x) \leq 0$  成立, 因为  $p(x)$  是  $[a, b]$  上的非负连续函数,  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续且单调递增. 所以  $F(x)$  单减. 于是

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

**8.【解】** 证明: 因为区域  $D$  既对  $x$  轴对称, 又对  $y$  轴对称. 所以

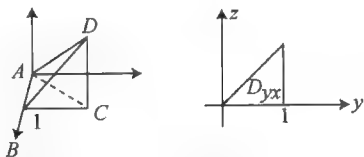
当  $m$  为奇数时,  $x^m y^n$  为对于  $x$  的奇函数, 二重积分为 0;

当  $n$  为奇数时,  $x^m y^n$  为对于  $y$  的奇函数, 二重积分为 0.

综上可得:  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$

$$\begin{aligned}
 \text{9. 证明: 由题意可知: } \frac{dF}{dt} &= \int_0^t dy \int_0^y (y-t)^2 f(x) dx = \int_0^t f(x) \left[ \int_x^t (y-t)^2 dy \right] dx \\
 &= \int_0^t \frac{1}{3} (y-t)^3 \Big|_x^t f(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^x (x-t)^3 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^t (t-x)^3 f(x) dx.
 \end{aligned}$$

**10.【解】** 因为  $\int \frac{\sin z}{1-z} dz$  不能积成有限形式, 所以必须交换积分次序. 由题意可得到积分区域如图所示:



$$\begin{aligned}
 \text{由图知 } \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{1-z} dz &= \iint_{D_{yx}} \frac{\sin z}{1-z} dz = \iint_{D_{yx}} \frac{\sin z}{1-z} (1-y) dy dz \\
 &= \int_0^1 \frac{\sin z}{1-z} dz \int_z^1 (1-y) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z) \sin z dz = \frac{1}{2} (1 - \sin 1).
 \end{aligned}$$

**11.【解】** 令  $y = r \cos \varphi, z = r \cos \theta \sin \varphi, x = r \sin \theta \sin \varphi$ , 则

$dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ , 于是

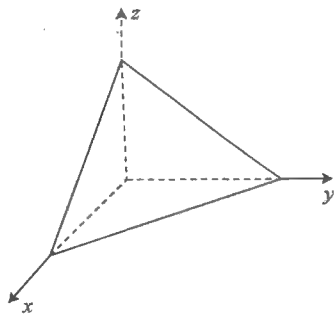
$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} (2r \cos \varphi + r \sin \varphi) r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_a^{2a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos \varphi + \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \\
 &= \frac{15\pi}{2} a^4 \left[ -\cos^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right] = \frac{15a^4 \pi}{16} (2 + \pi).
 \end{aligned}$$

**12. 计算下列三重积分:**

(1) 积分区域如右图所示

根据图示可知:

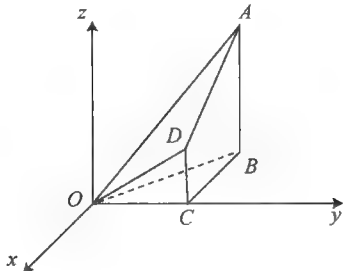
$$\begin{aligned}
 \text{【解】 } \iiint_D (1+x+y+z)^{-3} dv &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} dz \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1+x+y+z)^{-2} \Big|_0^{1-x-y} dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [2^{-2} - (1+x+y)^{-2}] dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [(1+x+y)^{-2} - 2^{-2}] dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ -(1+x+y)^{-1} \Big|_0^{1-x} - \frac{1}{4} (1-x) \right] dx
 \end{aligned}$$



(1)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (1+x)^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(1-x)^2 \Big|_0^1 \right\} = \frac{1}{2} \left[ \ln 2 - \frac{5}{8} \right].
 \end{aligned}$$

(2) 积分区域如图所示:

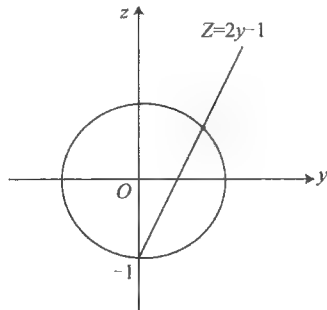


(2)

【解】四面体  $O-ABCD$  为积分区域.

$$\begin{aligned}
 \text{根据图示可知: } \iiint_{\Omega} e^{x+y+z} dv &= \iint_{D_{xy}} e^{x+y} \int_0^{-x-x-y} e^z dz = \iint_{D_{xy}} e^{x+y} (e^{-x} - 1) dx dy = \iint_{D_{xy}} (e^y - e^{x+y}) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left[ \int_{-y}^0 (e^y - e^{x+y}) dx \right] dy = \int_0^1 (xe^y - e^{x+y}) \Big|_{-y}^0 dy \\
 &= \int_0^1 (ye^y - e^y + 1) dy = ye^y \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^y dy + 1 = 3 - e.
 \end{aligned}$$

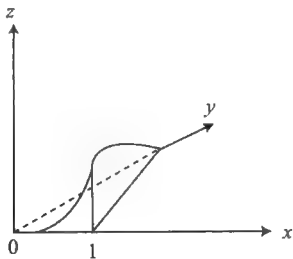
(3) 【解】由  $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ z = 2y - 1 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} y_1 = \frac{4}{5} \\ z_1 = \frac{3}{5} \end{cases}$ ,  $\begin{cases} y_2 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$  积分区域如右图所示:



(3)

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} dv &= \iiint_{\Omega_1} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} dv + \iiint_{\Omega_2} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} dv \\
 &= \int_0^{\frac{3}{5}} 2z dz \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy + \int_{\frac{3}{5}}^1 2z dz \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{3}{5}} 2z \frac{(1+z)}{2} dz + 2\pi \int_{\frac{3}{5}}^1 2z \sqrt{1-z^2} dz \\
 &= 2\pi \left( \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_0^{\frac{3}{5}} - 2\pi \frac{2}{3} (1-z^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{3}{5}}^1 \\
 &= 2\pi \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{125} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25} \right) + 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{125} = \frac{89}{75} \pi.
 \end{aligned}$$

(4) 【解】积分区域如下图所示:



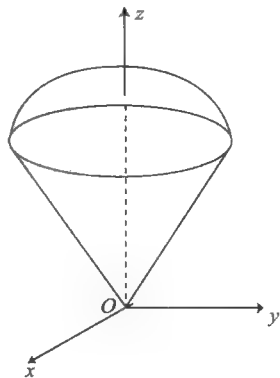
(4)

根据图示可知:

$$\begin{aligned}\iint_D xy dv &= \iint_{D_{xy}} xy dx dy \int_0^{xy} dz = \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 dx dy = \int_0^1 x^2 \left[ \int_0^{1-x} y^2 dy \right] dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{3} (1-x)^3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (1-3x+3x^2-x^3) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

(5)【解】用球坐标变换

$$\begin{aligned}\iint_a z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv &= \iiint_a r \cos \varphi \cdot r \cdot r^2 \sin \varphi d\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \varphi \cos \varphi \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \right)_0^{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{20}.\end{aligned}$$



(5)

(6)【解】在点  $z$  处, 由相似三角形得  $\frac{h}{h-z} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{l}{2}}$ , 即  $l = \frac{h-z}{h}$ .

$l$  为点  $z$  处截面正方形的边长. 于是

$$\begin{aligned}\iiint_a r^2 dv &= \iiint_a [x^2 + y^2 + (z-h)^2] dv = \iiint_a (x^2 + y^2) dv + \iiint_a (z-h)^2 dv \\ &= 2 \int_0^h \left[ \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy \right] dz + \int_0^h (z-h)^2 \cdot \frac{(h-z)^2}{h^2} dz \\ &= 8 \int_0^h \frac{(h-z)}{2h} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{h-z}{2h}} dz + \frac{1}{h^2} \int_0^h (z-h)^4 dz \\ &= \frac{1}{6h^4} \int_0^h (z-h)^4 dz + \frac{1}{h^2} \int_0^h (z-h)^4 dz = \left( \frac{1}{6h^4} + \frac{1}{h^2} \right) \cdot \frac{(z-h)^5}{5} \Big|_0^h \\ &= \frac{h}{30} (6h^2 + 1).\end{aligned}$$

13. (1)【解】由  $\begin{cases} xy = a^2 \\ x + y = \frac{5}{2}a \end{cases}$ , 得  $x = \frac{a}{2}, x = 2a$ . 所以

$$\begin{aligned}S &= \iint_D dx dy = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left[ \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x} dy \right] dx = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left( \frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x} \right) dx \\ &= \left( \frac{5}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 - a^2 \ln x \right) \Big|_{\frac{a}{2}}^{2a} = \frac{15}{8}a^2 - 2a^2 \ln 2.\end{aligned}$$

(2)【解】令  $x+y=u, y=vx$ . 则  $v = \frac{y}{x}$ , 雅可比行列式为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{(1+v)^2}{u}, \text{ 所以 } \frac{J(x,y)}{J(u,v)} = \frac{u}{(1+v)^2},$$

$$\text{于是 } S = \iint_D dx dy = \iint_{D_{uv}} \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \int_a^b u du \int_a^{\beta} \frac{1}{(1+v)^2} dv = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \frac{\beta - \alpha}{(1+\beta)(1+\alpha)}.$$

(3)【解】令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . 于是面积  $S$  为

$$S = \iint_D dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\theta d\theta = -a^2 \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2, \text{ 其中 } a > 0.$$

(4)【解】由表达式可知图形关于  $x$  轴对称, 于是总面积为上半平面部分面积的 2 倍.

化成极坐标, 得

$$r = a \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3).$$

因为  $r > 0$ , 所以

$$\cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \geq 0,$$

求解  $\begin{cases} \cos\theta \geq 0 \\ 4\cos^2\theta - 3 \geq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} \cos\theta \leq 0 \\ 4\cos^2\theta - 3 \leq 0 \end{cases}$ , 且  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

解得  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$  或  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ . 于是面积  $S$  为

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_{D_{xy}(y \geq 0)} dx dy = 2 \left( \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2\theta (4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \cos^2\theta (4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta. \end{aligned}$$

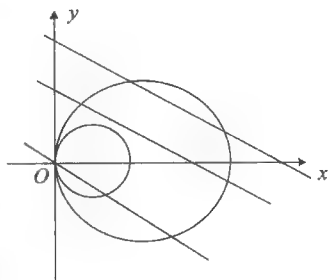
其中,  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \cos^2\theta (4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta \xrightarrow{\text{令 } \theta = \pi - \varphi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\varphi (4\cos^2\varphi - 3)^2 d\varphi$

$$\begin{aligned} \text{于是 } S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2\theta (4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\theta (4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\theta (4\cos^2\theta - 3)^2 d\theta = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

14. 【解】该曲面在平面上的投影区域如图所示.

于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$



15. (1) 【解】由题意可知:

曲顶的曲面为  $z = xy$  及  $x + y + z = 1$ . 于是所求体积必须分成两部分.

记该两部分在  $xOy$  平面上的投影区域分别为  $D_1, D_2$ . 则体积  $V$  为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1 - x - y) dy \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\frac{1-x}{1+x}} dx + \int_0^1 \left[ (1-x)y - \frac{1}{2} y^2 \right] \Big|_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dx \\ &= \left( -\frac{11}{4} + 4\ln 2 \right) + \left( \frac{25}{6} - 6\ln 2 \right) = \frac{17}{12} - 2\ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{【解】} V &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^2 dr = \int_0^\pi \frac{1}{4} r^4 \Big|_{\cos\theta}^{2\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (16\cos^4\theta - \cos^4\theta) d\theta = \frac{45}{32} \pi. \end{aligned}$$

(3) 【解】由  $\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ , 得  $z = 4$ . 于是

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^4 dz \iint_{D_{xy}} dx dy + \int_4^8 dz \iint_{D_{xy}} dx dy = \int_0^4 \pi z dz + \int_4^8 \pi (8 - z) dz = 16\pi.$$

16. 【解】由题意得:

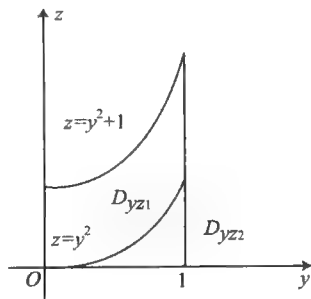
$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 r dr \int_r^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz.$$

$$17. \text{【解】} (1) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$$

积分区域及在  $yOz$  平面上的投影如右图:

$$\text{因为 } \iiint_V f(x, y, z) dv = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx,$$

所以





$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz &= \iint_{D_{yz1}} dy dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z) dx + \iint_{D_{yz2}} dy dz \int_0^1 f(x,y,z) dx \\&= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^2+1} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z) dx + \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x,y,z) dx \\&= \int_0^1 dy \left\{ \int_{y^2}^{y^2+1} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z) dx + \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x,y,z) dx \right\}\end{aligned}$$

向  $xOz$  平面投影, 可得以下积分.

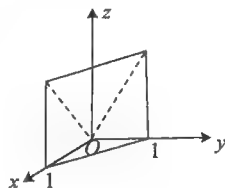
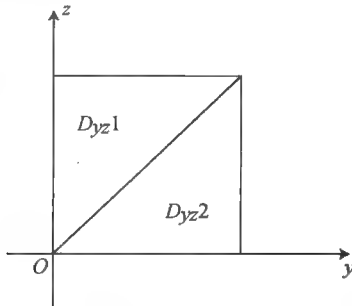
按照  $y, x, z$  次序积分:

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z) dz &= \iint_{D_{xz1}} dx dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z) dy + \iint_{D_{xz2}} dx dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z) dy + \iint_{D_{xz3}} dx dz \int_0^1 f(x,y,z) dy \\&= \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z) dy + \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z) dy + \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_0^1 f(x,y,z) dy \\&= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dx \right\} \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z) dy + \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_0^1 f(x,y,z) dy \Big\} + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z) dy.\end{aligned}$$

(2) 积分区域如右图:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz$$

积分区域在  $yOz$  平面上的投影如下图:



$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz &= \iint_{D_{yz1}} dy dz \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx + \iint_{D_{yz2}} dy dz \int_0^{1-y} f(x,y,z) dx \\&= \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx + \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z) dx \\&= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z) dx \right\}, \\ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz &= \iint_{D_{yz1}} dy dz \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx + \iint_{D_{yz2}} dy dz \int_0^{1-y} f(x,y,z) dx \\&= \int_0^1 dy \left\{ \int_y^1 dz \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx + \int_0^y dz \int_0^{1-y} f(x,y,z) dx \right\}.\end{aligned}$$

**18.【解】** 设直线  $l$  和  $z$  轴平行,  $l$  和  $xOy$  平面的交点坐标为  $x_1$  和  $y_1$ , 则物体绕  $l$  的转动惯量为

$$I_l = \iiint_{\Omega} [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] \rho(x,y,z) dx dy dz.$$

将球心放在原点, 则密度  $\rho(x,y,z) = kr$ ,  $r$  为点  $(x,y,z)$  到球心的距离. 因为球的质量为  $M$ , 所以

$$\begin{aligned}M &= \iiint_{\Omega} kr dx dy dz = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r r^2 dr = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R \\&= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{r^4}{4} \sin\varphi d\varphi = k \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{r^4}{4} = 2k\pi \times 2 \times \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = k\pi R^4.\end{aligned}$$

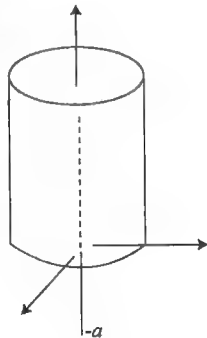
这时,  $k = \frac{M}{\pi R^4}$ ,  $\rho = \frac{Mr}{\pi R^4}$ .

取球的切线平行于  $z$  轴, 与  $xOy$  平面的交点坐标为  $(0, R)$ , 该切线为  $l$ , 球体绕  $l$  转动的转动惯量为

$$\begin{aligned}
 I_l &= \iiint_{\Omega} [(x^2 + (y-R)^2)] k r dx dy dz = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 - 2yR + R^2) k r dx dy dz \\
 &= R^2 \iiint_{\Omega} k r dx dy dz + \iiint_{\Omega} k r (x^2 + y^2) dx dy dz - \iiint_{\Omega} 2k r y dx dy dz \\
 &= R^2 M + k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \int_0^R r^5 dr - 0 = R^2 M + k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \cdot \frac{1}{6} R^6 \\
 &= R^2 M + k \times 2\pi \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{6} R^6 = R^2 M + \frac{4}{9} \frac{M}{\pi R^4} \pi R^6 \\
 &= \frac{13}{9} R^2 M.
 \end{aligned}$$

19. 【解】取坐标系如右图所示. 因为圆柱关于  $x$  轴、 $y$  轴对称, 所以引力关于  $x$  轴、 $y$  轴方向的投影为 0. 关于  $z$  轴方向的投影为

$$\begin{aligned}
 dF_z &= \frac{\mu m \rho (z+a)}{(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} dv \\
 F &= \mu m \rho \iiint_{\Omega} \frac{(z+a)}{(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} dv \\
 &= \mu m \rho \int_0^H (z+a) \left[ \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz \\
 &\stackrel{\text{柱坐标}}{=} \mu m \rho \int_0^H (z+a) \left[ 2\pi \int_0^R \frac{r}{(r^2 + (z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} dr \right] dz \\
 &= \mu m \rho \int_0^H (z+a) \left[ \pi \int_0^R \frac{dr^2}{(r^2 + (z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz \\
 &\stackrel{\text{令 } x=r^2}{=} \mu m \rho \int_0^H (z+a) \left[ \pi \int_0^{R^2} \frac{dx}{(x + (z+a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dz \\
 &= \mu m \rho \int_0^H (z+a) \left[ -2\pi \int_0^{R^2} (z+a) \frac{1}{(r^2 + (z+a)^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^{R^2} \right] dz \\
 &= -2\pi \mu m \rho \int_0^H (z+a) \frac{1}{(r^2 + (z+a)^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^R dz \\
 &= 2\pi \mu m \rho \int_0^H \left[ \frac{z+a}{z+a} - \frac{z+a}{\sqrt{R^2 + (z+a)^2}} \right] dz \\
 &= 2\pi \mu m \rho [H - \sqrt{R^2 + (H+a)^2} + \sqrt{R^2 + a^2}].
 \end{aligned}$$



20. 【解】该两个球面的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = a - \frac{R^2}{2a} \\ x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2} \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  内的方程为

$$\begin{aligned}
 z &= a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= R \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 2\pi R \int_0^{\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{4a^2}}} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \\
 &= \pi R \int_0^{\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{4a^2}}} \frac{dr^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a},
 \end{aligned}$$

于是,  $\frac{dS}{dR} = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a}$ . 令  $\frac{dS}{dR} = 0$ , 得  $R = \frac{4}{3}a$ .

$\frac{d^2S}{dR^2} = 4\pi - \frac{6\pi R}{a}$ . 这时, 当  $R = \frac{4}{3}a$ ,  $\frac{d^2S}{dR^2} = -4\pi < 0$ .

所以  $S$  达到极大值, 因为只有一个驻点, 所以达到最大值, 即  $R = \frac{4}{3}a$  时, 面积最大.

## 第十二章 曲线、曲面积分及场论初步

### 习题十二

1. 【解】因为  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y^2 f(xy) + xy^3 f'(xy) - 1}{y^2}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{y^2 f(xy) + xy^3 f'(xy) - 1}{y^2}$ ,

$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ , 所以积分与路径无关.

$$\begin{aligned} \text{于是, } I &= \int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{3}{y^2} [y^2 f(3y) - 1] dy + \int_3^1 \frac{1+4f(2x)}{2} dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}}^2 3f(3y) dy - \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{3}{y^2} dy + \int_3^1 \frac{1}{2} dx + 2 \int_3^1 f(2x) dx \\ &= \int_2^6 f(u) du + \frac{3}{y} \Big|_{\frac{2}{3}}^2 + \frac{1}{2} x \Big|_3^1 + \int_6^2 f(u) du = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = -4. \end{aligned}$$

2. 【解】因为  $\frac{\partial p}{\partial y} = e^y$ ,  $\frac{\partial q}{\partial x} = e^y$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ , 所以积分与路径无关.

$$\begin{aligned} \text{于是, } I &= \int_{L(0,0)}^{(1,2)} (e^y + x) dx + (xe^y - 2y) dy \\ &= \int_0^1 (1+x) dx + \int_0^2 (e^y - 2y) dy \\ &= x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + e^y \Big|_0^2 - y^2 \Big|_0^2 = e^2 - \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{【解】} I &= \int_{L(\widehat{AMB})} (e^x \sin y + 8y) dx + (e^x \cos y - 7x) dy \\ &= - \iint_D \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy - \int_{BA} (e^x \sin y + 8y) dx + (e^x \cos y - 7x) dy \\ &= - \iint_D (e^x \cos y - 7 - e^x \cos y - 8) dx dy = 15 \cdot \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{135\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{【解】} I &= \int_{ABC} (a_1 x + a_2 y + a_3) dx + (b_1 x + b_2 y + b_3) dy \\ &= - \iint_D \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy - \int_{CA} (a_1 x + a_2 y + a_3) dx + (b_1 x + b_2 y + b_3) dy \\ &= - \iint_D (b_1 - a_2) dx dy - \int_1^{-1} (a_2 x + a_3) dx \\ &= (a_2 - b_1) \frac{1}{4} \pi + (a_2 - b_1) \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x^2} dy \right] dx + 2a_3 = (a_2 - b_1) \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \right) + 2a_3. \end{aligned}$$

5. 【解】因为  $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2} \cos \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3} \sin \frac{x}{y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} \cos \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3} \sin \frac{x}{y}$

所以,  $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ , 于是该积分等于沿直线  $AB(x = \pi)$  由 1 到 2 的积分.

$$\begin{aligned} \text{即 } I &= \int_{L(A)}^{L(B)} \left( \sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} \right) dx - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y} dy = - \int_1^2 \frac{\pi^2}{y^2} \cos \frac{\pi}{y} dy \\ &= \pi \int_1^2 \cos \frac{\pi}{y} d \frac{\pi}{y} = \pi. \end{aligned}$$

6. 【解】对于函数  $u(x, y) = \frac{-1}{[(x-c)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}$ ,

$$\text{因为 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-c}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{所以 } du(x,y) = \frac{(x-c)dx+ydy}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}. \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB} \frac{(x-c)dx+ydy}{[(x-c)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} = \int_{(a,0)}^{(0,b)} du(x,y) = u(0,b) - u(a,0) \\ &= \frac{-1}{[(0-c)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{-1}{[(a-c)^2+0]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{c^2+b^2}} + \frac{1}{|a-c|} \quad (a \neq c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \text{【解】} &\text{因为 } \int_L (e^{y^2-x^2} \cos 2xy - 3y)dx + (e^{y^2-x^2} \sin 2xy - b^2)dy \quad (b > 0), \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{OA} (e^{y^2-x^2} \cos 2xy - 3y)dx + (e^{y^2-x^2} \sin 2xy - b^2)dy \\ &= \iint_D (e^{y^2-x^2} (-2x) \sin 2xy + e^{y^2-x^2} 2y \cos 2xy - e^{y^2-x^2} 2y \cos 2xy + e^{y^2-x^2} 2x \sin 2xy + 3) dx dy - \int_0^a e^{-x^2} dx \\ &= 3 \iint_D dx dy - \int_0^a e^{-x^2} dx = 3\pi - \int_0^a e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \lim_{a \rightarrow +\infty} (3\pi - \int_0^a e^{-x^2} dx) = 3\pi - \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$8. \text{【解】} \text{椭圆 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \sqrt{5} \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{于是 } dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt. \text{ 所求侧面积} \\ A &= \int_L |z| dl = \int_0^\pi 3 \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = 3 \int_0^\pi \sin t \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} dt \\ &= -3 \int_0^\pi \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} d \cos t \stackrel{\text{令 } \cos t = u}{=} -3 \int_1^{-1} \sqrt{5 + 4u^2} du = 6 \int_0^1 \sqrt{5 + 4u^2} du \\ &= 6 \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}u^2}{\frac{1}{5}}} du \stackrel{\text{令 } y^2 = \frac{4}{5}u^2}{=} 6 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{5} \sqrt{1 + y^2} d\left(\frac{\sqrt{5}}{2}y\right) \\ &= 15 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{1 + y^2} dy = 15 \left( \frac{y}{2} \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 9 + \frac{15}{4} \ln 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \text{【解】} &I = \int_{AB} [\Phi(y)e^x - my]dx + [\Phi'(y)e^x - m]dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{BA} [\Phi(y)e^x - my]dx + [\Phi'(y)e^x - m]dy \\ &= \iint_D (\Phi'(y)e^x - \Phi'(y)e^x + m) dx dy - \int_{BA} \Phi(y)e^x dx + [\Phi'(y)e^x - m]dy + \int_{BA} my dx \\ &= mS - \int_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} d[\Phi(y)e^x - my] + m \int_{x_2}^{x_1} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \right) dx \\ &= mS - [\Phi(y)e^x - my] \Big|_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} + \frac{m}{x_2 - x_1} \left[ \frac{1}{2} (y_2 - y_1) x^2 + (x_2 y_1 - y_2 x_1) x \right] \Big|_{x_2}^{x_1} \\ &= mS - [(\Phi(y_1)e^{x_1} - my_1) - (\Phi(y_2)e^{x_2} - my_2)] + \frac{m}{x_2 - x_1} \cdot \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} (y_2 - y_1) x_1^2 + (x_2 y_1 - y_2 x_1) x_1 - \frac{1}{2} (y_2 - y_1) x_2^2 + (x_2 y_1 - y_2 x_1) x_2 \right] \\ &= mS - \Phi(y_1)e^{x_1} + \Phi(y_2)e^{x_2} - m(y_2 - y_1) - m \left[ \frac{1}{2} (y_2 - y_1) (x_2 + x_1) + (x_2 y_1 - y_2 x_1) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \text{【解】} &I = \int_{AMB} [e^x \sin y - ay]dx + [e^x \cos y - bx]dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{BA} [e^x \sin y - ay]dx + [e^x \cos y - bx]dy \end{aligned}$$

$$= \iint_D (e^x \cos y - b - e^x \cos y + a) dx dy = \iint_D (a - b) dx dy = \frac{\pi}{8} (a - b)^3, \text{ 其中 } a > b > 0.$$

11. 【解】曲线  $L$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$ . 所以

$$\begin{aligned} I &= \oint_L 3y dx - xz dy + yz^2 dz = \int_0^{2\pi} [3 \cdot 2\sin\theta \cdot (-2\sin\theta) - 4\cos\theta \cdot 2\cos\theta] d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} (12\sin^2\theta + 8\cos^2\theta) d\theta = -\int_0^{2\pi} (8 + 4\sin^2\theta) d\theta = -16\pi - \int_0^{2\pi} 4 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= -16\pi - 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = -16\pi - 4\pi + 0 = -20\pi. \end{aligned}$$

12. 【解】因为球面关于原点中心对称, 所以  $I = \iint_{\Sigma} x dS = 0$ .

13. 使用奥—高公式

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Sigma} \frac{e^x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{e^x}{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz \quad (\text{使用先做 } y, z \text{ 的二重积分再做 } x \text{ 的积分}) \\ &= \int_1^2 e^x \left[ \iint_{y^2 + z^2 \leq x^2} \frac{dy dz}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right] dx = \int_1^2 e^x \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x \frac{1}{\rho} \rho d\rho \right] dx = 2\pi \int_1^2 x e^x dx = 2\pi e^2. \end{aligned}$$

14. 依题意得:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P &= 2x \Big|_P = 6, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = 2y \Big|_P = 8, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = -2z \Big|_P = -10, \\ \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 & (F) \\ x^2 + y^2 = z^2 & (G) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_P = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \Big|_P = \begin{vmatrix} 4y & -2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix} \Big|_P = \begin{vmatrix} 4 \times 4 & -2 \times 5 \\ 2 \times 4 & -2 \times 5 \end{vmatrix} = -80,$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_P = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} \Big|_P = \begin{vmatrix} -2z & 4x \\ -2z & 2x \end{vmatrix} \Big|_P = \begin{vmatrix} -2 \times 5 & 4 \times 3 \\ -2 \times 5 & 2 \times 3 \end{vmatrix} = 60,$$

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_P = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \Big|_P - \begin{vmatrix} 4x & 4y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} \Big|_P = 0.$$

所以方向向量  $l = \{-80, 48, 0\}$ , 方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-80}{\sqrt{80^2 + 48^2 + 0}} = \frac{-80}{\sqrt{8704}}, \cos \beta = \frac{60}{\sqrt{80^2 + 48^2 + 0}} = \frac{60}{\sqrt{8704}},$$

$$\cos \gamma = \frac{0}{\sqrt{80^2 + 48^2 + 0}} = 0.$$

$$\text{于是 } \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_P = \frac{-480}{\sqrt{8704}} + \frac{480}{\sqrt{8704}} = 0.$$

## 第十三章 函数方程与不等式证明

### 习题十三

1. 证明: 令  $f(x) = a^x$ , 则  $f'(x) = a^x \ln a$  在  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$  上使用拉格朗日定理

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}} = a^{\xi} \ln a \frac{1}{n(n+1)},$$

即  $\frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} = \frac{a^{\xi}}{n(n+1)}$ . 又因为  $f(x) = a^x$ , 当  $a > 1$  时为单调递增的函数, 所以当  $\xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$  时,  $a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\xi} < a^{\frac{1}{n}}$ .

所以

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2} (a > 1, n \geq 1).$$

2. 证明: 令  $f(x) = (x+b)^p - x^p - b^p$ ,

显然  $f(0) = 0$ . 当  $x > 0$  时, 因为  $0 < p < 1$ , 所以  $-1 < p-1 < 0$ ,

$$f'(x) = p(x+b)^{p-1} - px^{p-1} < 0,$$

所以当  $x > 0$  时,  $f(x)$  单减, 所以  $f(a) \leq f(0) = 0$ . 所以

$$(a+b)^p - a^p - b^p \leq 0,$$

$$\text{即得 } (a+b)^p \leq a^p + b^p,$$

3. 证明: 令  $F(x) = \left[ \int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x [f(t)]^3 dt$ , 显然  $F(0) = 0$ . 因为  $0 < f'(x) < 1$ , 所以  $f(x)$  单调递增.

又  $f(0) = 0$ , 所以当  $x > 0$  时  $f(x) > 0$ .

$$F'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt - f^3(x) = f(x) \left[ 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right] \quad ①$$

令  $\Phi(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$ , 显然  $\Phi(0) = 0$ . 因为  $0 < f'(x) < 1$ , 所以  $1 - f'(x) > 0$ , 即  $\Phi(x)$  在  $x \in (0, +\infty)$  单调递增. 即得:

$$\Phi'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) > 0,$$

所以当  $x > 0$  时,  $\Phi(x) > 0$ . 由 ① 知  $F'(x) > 0 (x > 0)$ . 当  $x > 0$  时  $F(x) \geq F(0)$ .

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} = 0.$$

所以  $F(1) \geq F(0) = 0$ .

$$\text{即证得: } \left[ \int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

4. 证明: (1) 先证当  $0 \leq x < 1, 0 < p < 1$  时, 有

$$2^{1-p} \geq x^p + (1-x)^p \geq 1.$$

$$\text{令 } F(x) = x^p + (1-x)^p,$$

$F'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$ ,  $-1 < p-1 < 0$ ,  $F(x)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上单调递增.  $F(x)$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上单调递减.

令  $F'(x) = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ .  $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-p}$ . 即  $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-p}$  为最大值, 又  $F(1) = F(0) = 1$ , 即 1 为其最小值. 所

以当  $0 \leq x \leq 1, 0 < p < 1$  时, 有

$$2^{1-p} \geq x^p + (1-x)^p \geq 1.$$

(2) 令  $x = \frac{|a|}{|a|+|b|}$ , 则  $1-x = \frac{|b|}{|a|+|b|}$ . 代入 (1) 的结论, 即可得到

$$2^{1-p} \geq \frac{|a|^p}{(|a|+|b|)^p} + \frac{|b|^p}{(|a|+|b|)^p} \geq 1,$$

即  $(|a|+|b|)^p \leq |a|^p + |b|^p \leq 2^{1-p}(|a|+|b|)^p$ ,  $(0 < p < 1)$ .

5. 证明: 条件极值问题:  $\begin{cases} s(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{条件: } x + y + z = 6 \end{cases}$ .

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 6), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 & ① \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 & ② \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda = 0 & ③ \end{cases}$$

解 ①②③ 得:  $x = y = z = 2$ . 只有一个驻点, 当  $x = y = z = 2$  时达到最小值 12. 所以

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 12, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

6. 证明: (1) 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是增加的, 所以  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $f(x) > f(a)$ , 即有

$$\int_a^b f(x) dx > (b-a)f(a).$$

$$\text{令 } F(x) = \int_a^x f(t) dt - (x-a) \frac{f(a)+f(x)}{2},$$

$$F'(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(x)}{2} - (x-a) \frac{f'(x)}{2} = \frac{f(x)-f(a)}{2} - (x-a) \frac{f'(x)}{2}.$$

由拉格朗日中值定理  $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$ , 其中  $a < \xi < x$ , 所以

$$F'(x) = \frac{f'(\xi)(x-a)}{2} - \frac{f'(x)}{2}(x-a) \quad (a < \xi < x) = \frac{1}{2}(x-a)[f'(\xi) - f'(x)].$$

又因为  $f''(x) > 0$ , 所以  $F'(x)$  单增, 所以  $F'(x) < 0$ . 所以  $F(x)$  单减. 又因为  $F(a) = 0$ , 所以  $F(b) < F(a) = 0$ . 即可得

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(2) 证法同(1).

$$7. (1) \text{ 令 } f(x) = x^2, p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}.$$

因为  $f(x) = x^2$  为凸函数, 所以运用凸函数的性质可得

$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n).$$

$$\text{即 } \left( \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n},$$

$$\text{即得到 } \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

(2) 取  $f(x) = \ln x$ , 则  $f(x)$  为凹函数. 令  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ . 利用凹函数的性质, 即得

$$\ln \left( \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \geq \frac{1}{n} \ln x_1 + \cdots + \frac{1}{n} \ln x_n = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

$$\text{即得到 } \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

$$8. \text{ 证明: 因为 } \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) df'(x)$$

$$= \frac{1}{2} (x-a)(x-b) f'(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f'(x)(2x-a-b) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_a^b (2x-a-b) df(x) = -\frac{1}{2} f(x)(2x-a-b) \Big|_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b f(x) 2 dx$$

$$= \int_a^b f(x) dx,$$

$$\text{所以 } \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)(x-a)(x-b)| dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \int_a^b (x-a)(b-x) dx = \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

9. 证明: 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 所以  $f(x)$  连续. 又因为当  $x \in [a, b]$  时,  $f(x)f''(x) < 0$ , 所以当  $x \in [a, b]$  时,  $f(x) \neq 0$ . 分二种情形:

① 当  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) < 0$  时, 由  $f(x)f''(x) < 0$  得到  $f''(x) > 0$ . 由第 6 题得到

$$\int_a^b f(x) dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} < 0,$$

$$\text{所以 } \int_a^b -f(x) dx > -(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} > 0, \text{ 即}$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx > \frac{1}{2} |f(a) + f(b)|.$$

② 当  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) > 0$  时. 由  $f(x)f''(x) < 0$  得到  $f''(x) < 0$ . 由第 6 题得到

$$\int_a^b f(x) dx > (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} > 0, \text{ 即 } \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)| dx > \frac{1}{2} |f(a)+f(b)|.$$

10. 证明: ① 令  $f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ . 于是  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } f'(x) &= -\frac{4}{(2x+1)^2} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} \\ &= -\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{x(x+1)} > 0, \end{aligned}$$

即当  $x > 0$  时,  $f(x)$  单增. 所以当  $x > 0$  时  $f(x) < 0$ . 即

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

② 令  $y(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ . 于是  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ .

当  $x > 0$  时  $y'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2x+1}{2x(x+1)\sqrt{x(x+1)}} > 0$ , 即当  $x > 0$  时,  $y(x)$  单增, 所以当  $x > 0$  时

$y(x) < 0$ , 即

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

由 ①② 可得:  $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ .

$$\begin{aligned} 11. \text{ 证明: } \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx &= -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(x) d\cos nx = -\frac{1}{n} f(x) \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{n} (f(2\pi) - f(0)) + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{f(2\pi) - f(0)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = \frac{2[f(2\pi) - f(0)]}{n}.$$

12. 证明: 由拉格朗日中值定理可得:

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) - f(x_1) = (1-a)(x_2 - x_1)f'(\xi_1), \quad ①$$

$$f(x_2) - f(ax_1 + (1-a)x_2) = a(x_2 - x_1)f'(\xi_2) \quad ②$$

①  $\times a$  - ②  $\times (1-a)$  得到

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) = af(x_1) + (1-a)f(x_2) + a(1-a)(x_2 - x_1)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)]$$

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) + a(1-a)(x_2 - x_1)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] = af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) + a(1-a)(x_2 - x_1)f''(\xi) = af(x_1) + (1-a)f(x_2).$$

因为  $f''(\xi) > 0$ , 即  $a(1-a)(x_2 - x_1)f''(\xi) > 0$ .

所以  $af(x_1) + (1-a)f(x_2) > f[ax_1 + (1-a)x_2]$ .

$$\begin{aligned} 13. \text{ 证明: } \int_C P dx + Q dy &= \int_C \left(P \frac{dx}{dl} + Q \frac{dy}{dl}\right) dl = \int_C \{P, Q\} \cdot \{\cos \alpha, \cos \beta\} dl \\ &= \int_C \sqrt{P^2 + Q^2} \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \cos \theta dl = \int_C \sqrt{P^2 + Q^2} \cos \theta dl. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq \int_C \sqrt{P^2 + Q^2} |\cos \theta| dl \leq \max_{(x,y) \in C} \sqrt{P^2 + Q^2} \int_C dl = LM.$$

14. 证明因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = 3$ . 所以

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 3 dx \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f(0)| dx.$$

又对于  $[0, 1]$  上的一切  $x$  和  $y$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  成立. 所以

$$\int_0^1 |f(x) - f(0)| dx = \int_0^1 |x - 0| dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } \left| \int_0^1 f(x) dx - 3 \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{5}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{7}{2}.$$



## 第二篇 线性代数

## 第一章 行列式

## 习题一

1. (1)【解】  $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$  中行标的排列为 1234, 逆序为 0; 列标排列为 2134, 逆序为 1.  $0+1=1$  为奇数, 所以, 该项符号为“-”, 所以答案为  $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ .

(2)【解】 排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  可经过  $\frac{n(n-1)}{2}$  次对换后变成排列  $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ .

(3)【解】 15423 的逆序为 5, 23145 的逆序为 2,  $2+5=7$  为奇数, 所以该项的符号为“-”.

(4)【解】  $x^3$  的系数只要考查  $x \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -x & -x \end{vmatrix} = -2x^3 + x^2$ , 所以  $x^3$  前的系数为 -2.

(5)【解】  $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2) = 0$ , 所以  $a = b = 0$ .

(6)【解】 由题意可知, 行列式为下三角的形式, 所以  $D = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .

(7)【解】  $|-A| \cdot |B| = (-1)^5 |A| \cdot |B| = (-2)^5 \cdot (-2) = 64$ ;

$|-B| \cdot |A| = (-1)^4 |B| \cdot |A| = (-2)^4 \cdot 2 = 32$ .

(8)【解】  $\begin{vmatrix} A_3 - 2A_1 \\ 3A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} A_3 - 2A_1 \\ A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_1 \end{vmatrix} - 0 = -3 \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = 6$ .

(9)【解】  $|2A^* B^{-1}| = 2^n |A^*| |B^{-1}| = 2^n ||A| A^{-1}|| |B^{-1}|$   
 $= 2^n |A|^n |A^{-1}| |B^{-1}| = -\frac{2^{2n-1}}{3}$ .

2. (1)【解】 项  $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1n}a_{n1}$  的行标排列为 12 $\cdots$  $n$ , 逆序为 0. 列标排列为 23 $\cdots$  $n1$ , 逆序为  $n-1$ . 所以答案是 D.

(2)【解】  $||A| A^*| = |A|^n |A^*| = |A|^n |A|^{n-1} = |A|^{2n-1}$ . 所以答案是 D.

(3)【解】 经过初等变换后, 有可能对换行列式的行, 从而改变行列式的符号, 所以排除 A, B, D. 即答案是 C.

(4)【解】  $A$  的第一列与  $C$  的第一列交换位置, 经过了  $n$  次列变换, 同理  $A$  的第  $k$  列与  $C$  的第  $k$  列交换位置, 又经过了  $n$  次列变换,  $A$  总共有  $m$  列, 所以

$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{nm} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |A| |B|$ . 即答案是 D.

(5)【解】 因为  $|A-B| = \begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$   
 $= \frac{1}{3} |A| - 2 |B| = 2$ .

所以答案是 B.

## 3. 计算证明题

(1)【解】  $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = (-1) \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$ .

$$\begin{aligned}
 (2) \text{【解】} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{由最后一行起, 每行减前一行}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{每列加第 } n \text{ 列}} \begin{vmatrix} n-1 & n & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n-1).
 \end{aligned}$$

(3) ① 当  $n=2$  时,

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 \\ x_2+1 & x_2+2 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

② 当  $n>2$  时

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第 } k \text{ 列}]{\text{第 } k+1 \text{ 列减去}} \begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2+1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n+1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(4) 证明: 范德蒙行列式:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & y \\ a^2 & b^2 & c^2 & y^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & y^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-a)(a-y)(b-y)(c-y) \\
 &= -(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)y^2 + \cdots.
 \end{aligned}$$

行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$  即为  $y^2$  前的系数, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c), \text{ 又因为 } a \neq b \neq c,$$

所以  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$  的充要条件是  $a+b+c=0$ .

(5) 证明: 由题意知  $A^T = -A$ , 又  $|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|$  ( $n$  为奇数), 所以  $|A| = 0$ .

(6) 证明: 因为  $f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$

所以由罗尔定理, 存在数  $\delta (0 < \delta < 1)$ , 使  $f'(\delta) = 0$ .

(7) 证明: 假设多项式的  $n+1$  个不同的零点为  $x_0, x_1, \cdots, x_n$ , 将它们代入多项式, 得关于  $C_i$  方程组

$$\begin{aligned}
 C_0 + C_1 x_0 + \cdots + C_n x_0^n &= 0 \\
 C_0 + C_1 x_1 + \cdots + C_n x_1^n &= 0 \\
 &\vdots \\
 C_0 + C_1 x_n + \cdots + C_n x_n^n &= 0
 \end{aligned}$$

$$C_0, C_1, \cdots, C_n \text{ 的系数矩阵为 } A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

则  $|A|$  为范德蒙行列式

又  $x_1 \cdots x_n$  互不相同, 所以  $|A| \neq 0$ , 即  $C_0 = C_1 = \cdots = C_n = 0$ .

$$(8) \text{【解】} \text{ 因为 } F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} \\ = x(12x^2 - 6x^2) - (6x^3 - 2x^3) = 6x^3 - 4x^3 = 2x^3,$$

所以  $F'(x) = 6x^2$ .

## 第二章 矩阵

### 习题二

$$1. (1) \text{【解】} |A - 3B| = |-2\alpha_1 \quad -2\alpha_2 \quad -2\alpha_3 \quad \alpha - 3\beta| = -8 \times |\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha - 3\beta| \\ = -8(|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha| - 3|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta|) = -8(|A| - 3|B|) = 56.$$

$$(2) \text{【解】} \text{ 假设 } A = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_m], \alpha_i \text{ 是 } A \text{ 的列向量. 对于 } j = 1, 2, \cdots, m, \text{ 令 } X_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 第 } j \text{ 个元素不为 } 0.$$

$$\text{则 } [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_m] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, m), \text{ 所以 } A = 0.$$

(3)【解】 $\Rightarrow$  由  $AB = 0$ , 而且  $B$  为非零矩阵, 所以存在  $B$  的某个列向量  $b_j$  为非零列向量, 且满足  $Ab_j = 0$ . 即方程组  $AX = 0$  有非零解. 所以  $|A| = 0$ ;

$\Leftarrow$ : 若  $|A| = 0$ , 则  $AX = 0$  有非零解. 则存在非零矩阵  $B$ , 满足  $AB = 0$ .

综上,  $AB = 0$  的充分必要条件是  $|A| = 0$ .

(4)【解】 $B \neq C$  且  $AB = AC \Leftrightarrow A(B - C) = 0$  且  $B - C$  非零  $\Leftrightarrow |A| = 0$ .

$$(5) \text{【解】} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}.$$

$$(6) \text{【解】} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$B = A^2 - 3A + 2E = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{B^*}{|B|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(7)【解】由  $A^2 + 2A + 3E = 0$ , 得  $A(A + 2E) = -3E$ . 所以  $|A| |A + 2E| = |-3E| \neq 0$ , 于是  $A$  可逆. 于是  $A + 2E + 3A^{-1} = 0, A^{-1} = -\frac{1}{3}(A + 2E)$ .

$$(8) \text{【解】} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = (\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1} = \frac{(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^*}{|\mathbf{A} + 3\mathbf{E}|}.$$

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(9) \text{【解】} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, (\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(-2\mathbf{A})^* = |-2\mathbf{A}| (-2\mathbf{A})^{-1} = (-2)^3 |\mathbf{A}| \frac{\mathbf{A}^{-1}}{(-2)} = 4\mathbf{A}^{-1}.$$

$$[(-2\mathbf{A})^*]^{-1} = (4\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{4} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(10) \text{【解】} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & -30 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ 所以, } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 19 & -30 & 3 & -5 \\ -7 & 11 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. (1)【解】因为  $\mathbf{A}$  可逆, 所以存在可逆  $\mathbf{P}_A, \mathbf{Q}_A$  使  $\mathbf{P}_A \mathbf{A} \mathbf{Q}_A = \mathbf{E}$ . 同理, 存在可逆  $\mathbf{P}_B, \mathbf{Q}_B$  使  $\mathbf{P}_B \mathbf{B} \mathbf{Q}_B = \mathbf{E}$ .

于是  $\mathbf{P}_A \mathbf{A} \mathbf{Q}_A = \mathbf{P}_B \mathbf{B} \mathbf{Q}_B, \mathbf{P}_B^{-1} \mathbf{P}_A \mathbf{A} \mathbf{Q}_A \mathbf{Q}_B^{-1} = \mathbf{B}$ .

令  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_B^{-1} \mathbf{P}_A, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_A \mathbf{Q}_B^{-1}$ . 即答案是 D.

(2)【解】因为  $|A| = |A^T|$ ,  $|B^{-1}| = |B|^{-1}$  所以

$$\left| -2 \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \right| = (-2)^{2n} |A| |B|^{-1}. \text{ 即答案是 A.}$$

(3)【解】若  $A, B$  均可逆, 即  $A^{-1}, B^{-1}$  均存在, 则  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . 答案是 B.

(4)【解】因为  $|A| \neq 0$ , 所以  $A^{-1}$  存在. 由  $AB = 0$ , 得  $A^{-1}AB = 0$ , 即  $B = 0$ . 即答案是 A.

(5)【解】 $AB = (E - \alpha^T \alpha)(E + 2\alpha^T \alpha) = E - \alpha^T \alpha + 2\alpha^T \alpha - 2\alpha^T \alpha \alpha^T \alpha$   
 $= E$ . 答案是 C.

(6)【解】 $P_1 A$  表示将  $A$  的第一、二行互换,  $B$  表示先将  $A$  的第一、二行互换, 然后将互换后的矩阵的第一行乘

以  $(-1)$  加到第三行. 所以  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 即答案是 B.

(7)【解】 $(-A)^n = |-A| (-A)^{-1} = (-1)^n |A| \frac{1}{(-1)} A^{-1} = (-1)^{n-1} A^{-1}$ . 答案是 D.

(8)【解】多次利用公式  $A^* = |A| A^{-1}$  即可得到

$$(A^*)^* = (|A| A^{-1})^* = |A| A^{-1} (|A| A^{-1})^{-1} = |A|^n |A|^{-1} |A|^{-1} A = |A|^{n-2} A,$$

即答案是 C.

(9)【解】 $B = A_{m \times n} C_{n \times n}$ ,  $r(C) = n$ , 所以

$$r = r(AC) \geq r(A) + r(C) - n = r_1,$$

又因为  $A = BC^{-1}$ , 于是

$$r_1 = r(BC^{-1}) \geq r(B) + r(C^{-1}) - n = r,$$

所以  $r_1 = r$ . 即答案是 C.

(10)【解】若  $r(A) = n$ , 则  $A^{-1}$  存在. 由  $AB = 0$ , 得  $B = 0$ , 与  $B$  是非零矩阵矛盾. 所以  $r(A) < n$ . 同理  $r(B) < n$ . 答案是 B.

$$3. (1) \text{【解】} AB - BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -17 & -17 & 3 \\ 9 & -18 & 16 \end{bmatrix},$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ -15 & -15 & 9 \\ -3 & 26 & -13 \end{bmatrix}.$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 17 \\ -5 & 1 & -3 \\ 5 & 11 & 22 \end{bmatrix}.$$

(2) ①

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & : & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & : & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & : & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & : & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & : & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & : & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

② 因为  $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ , 由矩阵分块求逆公式:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\text{得到: } A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{③ } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{同 ② 得 } \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

④ 由矩阵分块求逆公式:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-2} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{A^*}{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{B^*}{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\text{得到: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$(3) \text{【解】由本题的条件知: } A \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & : & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & : & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & : & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

所以  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  的逆矩阵为  $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ .

得到  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}.$

(4)【解】要使  $A$  可逆, 则须使得  $|A| \neq 0$ , 即  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \neq 0$  经过初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{即得到 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ -1 & \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}.$$

(5)【解】因为  $(E+A)^m = \sum_{i=0}^m c_m^i A^i = E + \sum_{i=1}^m c_m^i A^i = 0 \Rightarrow E = -\sum_{i=1}^m c_m^i A^i$ .

所以  $A(-\sum_{i=1}^m c_m^i A^{i-1}) = E$ . 所以  $A$  可逆.

(6)【解】因为  $B$  可逆, 所以  $|-B^2| = (-1)^n |B|^2 \neq 0$ ,

又因为  $A^2 + AB + B^2 = 0$ , 即  $A(A+B) = -B^2$ ,

所以  $|A(A+B)| = |-B^2| \neq 0$ , 即得  $A, A+B$  都可逆.

(7)【解】 $E+AB$  可逆, 即  $(E+AB)^{-1}$  存在, 所以

$$\begin{aligned} (E+BA)(E-B(E+AB)^{-1}A) &= E+BA - (E+BA)B(E+AB)^{-1}A \\ &= E+BA - (B+BAB)(E+AB)^{-1}A = E+BA - B(E+AB)(E+AB)^{-1}A \\ &= E+BA - BA = E, \end{aligned}$$

即  $(E+BA)$  可逆, 且  $(E+BA)^{-1} = E-B(E+AB)^{-1}A$ .

(8)【解】因为  $(A-E)^{-1} = (B-E)^T$ , 所以  $(A-E)(B-E)^T = E$ ,

所以  $A(B^T - E) - B^T + E = E, A(B^T - E) = B^T$ .

由  $|B| \neq 0$  知  $B^{-1}, (B^T)^{-1}$  存在.

所以  $A(B^T - E)(B^T)^{-1} = E$ , 所以  $A$  可逆.

(9)【解】由  $A, B, A+B$  为正交矩阵, 即  $A^{-1} = (B^T - E)(B^T)^{-1}$  知  $(A+B)^T = (A+B)^{-1}, A^T = A^{-1}, B^T = B^{-1}$

所以  $(A+B)^{-1} = (A+B)^T = A^T + B^T = A^{-1} + B^{-1}$ .

(10)【解】因为  $\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E \\ E & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{bmatrix}$ ,

所以  $\begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{vmatrix}$ .

即  $(-1)^{n^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{vmatrix} = (-1)^n |AB - E|$ .

又因为  $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ , 所以  $\begin{vmatrix} A & E \\ E & B \end{vmatrix} = |AB - E|$ .

(11)【解】① 依题意得  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{bmatrix}$ ,

则  $AB = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 0 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 0 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 0 \end{bmatrix}$ ,

$E + AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 1 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 1 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 1 \end{bmatrix}$ ,  $|E + AB| = 1 - kla_{34}^2$ .

所以当  $\frac{1}{kl} \neq a_{34}^2$  时,  $E + AB$  可逆

② 因为  $E + AB$  可逆, 所以  $(E + AB)^{-1}$  存在,

即有  $(E + AB)^{-1}A = [A^{-1}(E + AB)]^{-1} = (A^{-1} + B)^{-1}$ .

因为  $A, B$  为实对称矩阵, 所以  $A^{-1} + B$  为实对称矩阵, 所以  $(E + AB)^{-1}A$  为对称矩阵.

(12)【解】① 因为  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ ,

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^3 = E \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ,

所以  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} E, & n \text{ 为偶数} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ .

② 令  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的特征值为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$  且它们互不相同. 于是存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$



$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } A^n = P \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} P \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{bmatrix} P^{-1} = 0, \text{ 即得到 } \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^n = 0.$$

(13)【解】下用数学归纳法

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 & 0 \\ (1+2)\lambda & 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{假设 } n=k \text{ 时, 成立, 即 } A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ (1+\cdots+k-1)\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix} \text{ 成立,}$$

$$\begin{aligned} \text{则当 } n=k+1 \text{ 时, } A^{k+1} &= \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ (1+\cdots+k-1)\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)\lambda^k & \lambda^{k+1} & 0 \\ (1+\cdots+k)\lambda^{k-1} & (k+1)\lambda^k & \lambda^{k+1} \end{bmatrix} \text{ 也成立.} \end{aligned}$$

$$\text{即得 } A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ (1+\cdots+n-1)\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

(14)【解】① 因为  $A$  可逆, 所以  $A^{-1}$  存在.  $AA^{-1} = E, (A^{-1})^T A^T = E$ . 所以  $A^T$  可逆且  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

②  $A^* = |A| A^{-1}, (A^*)^T = (|A| A^{-1})^T = |A| (A^{-1})^T = |A| (A^T)^{-1} = (A^T)^*$ .

③ 证明: 因为  $(AB)^* = |AB| (AB)^{-1} = |A| |B| B^{-1} A^{-1} = B^* A^*$

①

$AA^{-1} = E$ . 两边取“\*”运算, 所以由 ① 得  $(AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^* = E$ .

即证得  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

④  $[(A^{-1})^T]^* = [(A^{-1})^*]^T = [(A^*)^{-1}]^T = [(A^*)^T]^{-1}$ .

(15)【解】因为  $A^m = E$ , 所以  $|A|^m = 1$ , 所以  $A$  可逆.

又因为  $A_0 = (A^*)^T = [|A| A^{-1}]^T = |A| (A^T)^{-1}$ ,

所以  $A_0^m = [|A| (A^T)^{-1}]^m = |A|^m [(A^m)^T]^{-1} = |A|^m E^{-1} = E$ .

(16)【解】下面用数学归纳法证明:① 因为  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A + A^2 - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^3,$$

所以  $A^3 = A^{3-2} + A^2 - E$ .

现假设  $A^k = A^{k-2} + A^2 - E$ ,

下证  $A^{k+1} = A^{k-1} + A^3 - A$  成立.

因为  $A^{k+1} = A^{k-1} + A^3 - A = A^{k-1} + A + A^2 - E - A = A^{(k+1)-2} + A^2 - E$ ,

所以  $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ .

② 利用 ① 的逆推公式得:  $A^{100} = A^{98} + A^2 - E = A^{96} + 2A^2 - 2E = \cdots = 50A^2 - 49E$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(17)【解】由题意得:  $|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$ , 所以  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

因为  $A^6 = E, A^{11} = A^{12}A^{-1} = A^6 \cdot A^6 \cdot A^{-1} = EA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

(18)【解】因为  $(A-B)^2 = A+B$ , 所以  $(A-B)^3 = (A-B)^2(A-B) = (A+B)(A-B)(A-B)^3 = (A-B)(A-B)^2 = (A-B)(A+B)$ .

于是  $A^2 - BA + AB - B^2 = A^2 + BA - AB - B^2$ , 所以  $AB = BA$ .

由  $(A-B)^2 = A+B$ , 得  $A^2 - AB - BA + B^2 = A+B$ .

因为  $A^2 = A, B^2 = B$ , 所以  $2AB = 0$ , 所以  $AB = BA = 0$ .

(19)【解】因为  $B = E + AB$ , 所以  $B - AB = E$ . 即  $(E-A)B = E$ , 所以  $E-A, B$  可逆.

对于  $B = E + AB$ , 右乘  $B^{-1}$  得  $E = B^{-1} + A$ , 再左乘  $B$ , 得  $B = E + BA$ , 所以  $AB = BA$ .

因为  $B = E + AB, C = A + CA$ .

$$\begin{aligned} \text{所以, } B-C &= E+AB-A-CA = E-A+AB-CA = E-A+BA-CA \\ &= (E-A) + (B-C)A. \end{aligned}$$

所以  $(B-C)(E-A) = E-A$ .

右乘  $(E-A)^{-1}$ , 得  $B-C = E$ .

(20)【解】因为  $P = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$ ,

$$\text{所以 } PQ = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \alpha E \\ -\alpha^T A^* A + \alpha^T |A| & -\alpha^T A^* \alpha + b |A| \end{bmatrix}.$$

又因为  $|A| = A^* A$ , 所以  $-\alpha^T A^* A = -\alpha^T |A|, -\alpha^T A^* A + \alpha^T |A| = 0$ ,

$$\text{所以 } PQ = \begin{bmatrix} A & \alpha E \\ 0 & -(\alpha^T A^* \alpha + b) |A| \end{bmatrix}.$$

② 证明: 因为  $|P| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix} = |A|$ ,

所以  $|PQ| = |P||Q| = |A||Q|$ . 又由 ① 可得

$$|PQ| = \begin{vmatrix} A & \alpha E \\ 0 & -(\alpha^T A^{-1} \alpha + b) |A| \end{vmatrix} = (-\alpha^T A^{-1} \alpha + b) |A|^2.$$

所以  $|Q| = (-\alpha^T A^{-1} \alpha + b) |A|$ .

所以  $Q^{-1}$  存在的充要条件为  $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$ .

### 第三章 向 量

#### 习题三

1. (1) 【解】令  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$  即  $r(A) < 4$ , 由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关, 即

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  组成的矩阵秩小于等于 4.

于是  $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & k & 1 \end{bmatrix} = 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -10 & k & 1 \end{bmatrix} = -8 - 3k + 20 - 10 + 16k + 3 = 13k + 5 = 0, k = -\frac{5}{13}.$$

(2) 【解】同(1)可得:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & t \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & t & 3 & t \\ 4 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 3 & t & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -20t + 60 + 30 + 20t - 30 - 60 = 0.$$

所以对任何  $t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性相关.

(3) 【解】由  $2\alpha + 3x = \beta$  可得:  $x = \frac{1}{3}(\beta - 2\alpha) = \frac{1}{3} \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$

(4) 【解】 $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示, 即  $\beta, \alpha_1, \alpha_2$  线性相关, 且  $\alpha, \alpha_2$  线性无关, 于是同(1)可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0, \text{得 } k = -8. \text{ 当 } k = -8 \text{ 时, 三个向量的行列式为 } 0, \text{ 于是 } \beta, \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性相关. 又显然 } \alpha_1,$$

$\alpha_2$  线性无关, 所以  $\beta$  可用  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示.

(5) 【解】将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  表示成矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ , 将  $A$  经过初等变换后可得

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } r(A) = 3.
 \end{aligned}$$

(6)【解】同(5)可得

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{45}{88} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{40} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以  $r(A) = 3$ .

$$(7) \text{【解】} A = \alpha \cdot \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{同(5)可得}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $r(A) = 1$ .

$$(8) \text{【解】} \text{ 令 } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & t-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \end{bmatrix}$$

又  $r(A) = 2$ , 所以  $t-7=0$ , 即  $t=7$ .

2. (1)【解】对于 A, 假设  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ , 线性相关, 则存在不全为 0 的  $k_1, k_2, k_3$ , 使得  $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$  成立.

整理得  $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$ .

又  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  无关线性,

$$\text{所以 } \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

矛盾, 即  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ , 线性无关, 同 A 可证得 C 为答案.

(2)【解】因为  $r(A) = m < n$ ,  $A, B$  都错在“任意”;  $D$  不正确是因为应通过初等变换可将  $A$  变成  $(E_m, 0)$  的形式. 所以根据排除法答案是  $C$ .

(3)【解】由课本上的定理:若原向量组线性无关,则由原向量组加长后的向量组也线性无关,可知答案为  $B$ .

(4)【解】因为  $\beta, \alpha_1, \alpha_2$  线性相关,所以  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关. 又因为  $\beta, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,所以  $\alpha_1$  可用  $\beta, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示. 所以答案是  $C$ .

(5)【解】对于  $A$ , 取  $A \neq B$  且  $|A| \neq 0, |B| \neq 0$  则  $A - B \neq 0$ , 则  $r(A - B) \neq 0$ . 于是排除  $A$ ;

对于  $B$  取  $A = -B \neq 0$ , 则秩  $(A + B) \neq 2$  秩  $(A)$ , 排除  $B, C$  取  $A = B \neq 0$ , 则秩  $(A - B) \neq 2$  秩  $(A)$ . 对于  $D$ , 因为有定理:秩  $(A + B) \leq \text{秩}(B)$ . 所以答案是  $D$ .

3. (1)【解】令  $A = \begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , 当  $|A| = 0$  时,  $\alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 即  $\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2 - t - 4 = t^2 - t - 6 = 0, t_1 = 3, t_2 = -2$ .

所以, 当  $t = -2$  且  $t = 3$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.  $t \neq -2$  且  $t \neq 3$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关.

(2) 由题可知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  为三维向量, 则四个三维向量一定线性相关, 所以, 令  $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k = 2k(k - 1)$ .

①  $k \neq 0$  且  $k \neq 1$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 又  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  线性相关, 所以  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 由克莱姆法则知表达式唯一.

② 令系数矩阵为  $A = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ , 增广矩阵为  $\bar{A} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 & k \end{vmatrix}$

当  $k = 1$  时,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 2 & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$ . 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 即等于 2. 所以  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 但表示不唯一.

③ 当  $k = 0$  时,

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 \end{bmatrix}$ .

系数矩阵的秩等于 2, 增广矩阵的秩为 3, 所以  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示.

(3)【解】①  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表出. 因为  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 由原向量组线性无关推出  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 所以  $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3$  线性表出;

②  $\alpha_4$  不一定能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出. 反例:  $\alpha_1 = (4, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 0)^T, \alpha_4 = (0, 0, 2)^T$ .  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关,  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 可知  $\alpha_4$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表出.

(4)【解】① 假设  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ , 如果存在某个  $k_i = 0$ , 则  $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ .

又由题意可知任意  $m-1$  个都线性无关, 所以  $k_1, k_2, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_m$  都等于 0, 即这些系数  $k_1, k_2, \cdots, k_m$  或者全为零, 或者全不为零.

② 因为  $l_1 \neq 0$ , 所以由 ① 可知  $l_1, l_2, \cdots, l_m$  全不为零. 所以  $\alpha_1 = -\frac{l_2}{l_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{l_m}{l_1}\alpha_m$ .

代入第一式得:  $k_1\left(-\frac{l_2}{l_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{l_m}{l_1}\alpha_m\right) + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ ,

即  $\left(-\frac{l_2}{l_1}k_1 + k_2\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{l_m}{l_1}k_1 + k_m\right)\alpha_m = 0$ , 又因为  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关,

所以  $-\frac{l_2}{l_1}k_1 + k_2 = 0, \dots, -\frac{l_m}{l_1}k_1 + k_m = 0$ ,

即得:  $\frac{k_1}{l_1} = \frac{k_2}{l_2} = \dots = \frac{k_m}{l_m}$ .

(5)【解】假设存在不全为 0 的  $k_1, k_2, k_3$ , 使得  $k_1(a\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(b\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(c\alpha_3 - \alpha_1) = 0$  成立, 则得  $(k_1a - k_3)\alpha_1 + (k_2b - k_1)\alpha_2 + (k_3c - k_2)\alpha_3 = 0$ .

又因为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 所以  $\begin{cases} ak_1 - k_3 = 0 \\ -k_1 + bk_2 = 0 \\ -k_2 + ck_3 = 0 \end{cases}$

当行列式  $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0$  时,  $k_1, k_2, k_3$  有非零解. 所以当  $abc = 1$  时,  $a\alpha_1 - \alpha_2, b\alpha_2 - \alpha_3, c\alpha_3 - \alpha_1$  线性相关.

(6)【解】反证法, 假设  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  是线性相关的, 即存在不全为 0 的实数  $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$  使得  $b_0\alpha + b_1A\alpha + \dots + b_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0$ . 两边乘以  $A^{k-1}$ , 又因为  $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$ , 所以  $b_0A^{k-1}\alpha = 0, b_0 = 0$ .

由  $b_1A\alpha + \dots + b_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0$ . 两边乘以  $A^{k-2}$  得

$$b_1A^{k-1}\alpha = 0, b_1 = 0,$$

...

最后可得  $b_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0, b_{k-1} = 0$ , 即  $b_0 = \dots = b_{k-1} = 0$ . 矛盾.

所以向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  是线性无关的.

$$(7)【解】① \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & -18 & -4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (或  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ ) 是极大线性无关组. 由  $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$  得方程组

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 - k_3 = 2 \\ 9k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_3 = -3 \end{cases}, \text{解得 } k_1 = k_3 = -\frac{3}{2}, k_2 = \frac{1}{2}.$$

所以  $\alpha_4 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_3$ .

$$② \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  (或  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  或  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$  或  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ ) 是极大线性无关组. 由  $\alpha_5 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$  得方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 2 \\ k_2 = 1 \\ -k_3 = 0 \\ -4k_3 = 0 \end{cases}, \text{解得 } k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 0,$$

所以  $\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$ .

由  $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$  得方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 3 \\ k_2 = 1 \\ -k_3 = 0 \\ -4k_3 = 0 \end{cases}, \text{解得 } k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 0,$$

所以  $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$ .

(8)【解】① 当  $x = y = 0$  时,  $r(A) = 0$ .

② 当  $x = 0, y \neq 0$  或  $x \neq 0, y = 0$  时,  $r(A) = 3$ .

③ 当  $x = y \neq 0$  时,  $r(A) = 1$ .

④ 当  $x = -y \neq 0$  时,  $r(A) = 3$ .

⑤ 当  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$  时,

$$A = \begin{bmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} xy & y^2 & y^2 \\ xy & x^2 & xy \\ xy & xy & x^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} xy & y^2 & y^2 \\ 0 & x^2 - y^2 & xy - y^2 \\ 0 & xy - y^2 & x^2 - y^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & y \\ 0 & x+y & y \\ 0 & y & x+y \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & y \\ 0 & x+y & y \\ 0 & 0 & x(x+2y) \end{bmatrix}.$$

所以, 当  $x = -2y \neq 0$  时,  $r(A) = 2$ ; 当  $x \neq -2y$  时,  $r(A) = 3$ .

(9)【解】由第(11)题知

$$r(A+E) + r(A-E) = 3.$$

又因为  $A \neq \pm E$ , 所以  $r(A+E) \neq 0, r(A-E) \neq 0$ ,

即  $r(A+E), r(A-E)$  中必有一个为 1,

所以  $(\text{秩}(A-E)-1)(\text{秩}(A+E)-1) = 0$ .

(10)【解】因为  $A^2 = A$ , 所以  $A(A-E) = 0$ ,

所以  $0 = r(A(A-E)) \geq r(A) + r(A-E) - n$ ,

即得  $-r(A) + r(A-E) \leq n$  ①

又因为  $r(A) + r(A-E) = r(A) + r(E-A) \geq r(A+E-A) = r(E) = n$  即  $r(A) + r(A-E) \leq n$  ②

由 ①② 得  $r(A) + r(A-E) = n$ . 所以  $r(A-E) = n - r$ .

(11)【解】因为  $A^2 = E$ , 所以  $0 = (A-E)(A+E)$ ,

所以  $0 = r((A+E)(A-E)) \geq r(A+E) + r(A-E) - n$

所以  $r(A+E) + r(A-E) \leq n$  ①

又因为  $r(A+E) + r(A-E) = r(A+E) + r(E-A) \geq r(A+E+E-A)$

$$= r(2E) = n,$$

所以由 ①② 得  $r(A+E) + r(A-E) = n$ .

即  $r(A+E) + r(A-E) \leq n$ . ②

$$(12)【解】因为 A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1 \cdots b_n),$$

不妨令  $\lambda = (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n$  为实数.

$$\text{则 } A^k = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1 \cdots b_n) \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1 \cdots b_n) \cdots \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1 \cdots b_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \lambda^{k-1} (b_1 \cdots b_n) = \lambda^{k-1} A.$$

$$(13)【解】① r(A) = 3, \text{ 即 } A \text{ 满秩, 所以 } |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = bc - \frac{1}{2}a \neq 0. \text{ 即 } a \neq 2bc \text{ 时, } r(A) = 3;$$

② 根据对称矩阵的定义得  $a = 1, b = 0, c = 0$  时,  $A$  为对称矩阵;

$$\textcircled{3} \mathbf{A} \text{ 为正交矩阵, 由正交矩阵的定义得 } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \textcircled{1} \\ c^2 + \frac{1}{4} = 1 \textcircled{2} \\ ac + \frac{1}{2}b = 0 \textcircled{3} \end{cases}, \text{ 由 } \textcircled{2} \Rightarrow c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当  $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时, 解得  $a = \pm \frac{1}{2}, b = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

当  $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  时, 解得  $a = \pm \frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

所以  $(a, b, c)$  有四组解  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

$$(14) \text{【解】先证明: } r(\mathbf{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n).$$

“ $\Rightarrow$ ” 因为  $r(\mathbf{A}) = 1$ , 所以  $\mathbf{A}$  的行向量的极大线性无关组只含一个向量  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ , 即其他的行向量可以由  $\alpha_i$  线性表出.

$$\text{所以 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 \alpha_i \\ \vdots \\ k_{i-1} \alpha_i \\ \alpha_i \\ k_{i+1} \alpha_i \\ \vdots \\ k_n \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{i-1} \\ 1 \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \alpha_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{i-1} \\ 1 \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

$$\text{“}\Leftarrow\text{” 令 } \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{A} = \alpha (b_1 \cdots b_n) = (b_1 \alpha \cdots b_n \alpha),$$

所以  $r(\mathbf{A}) = 1$ .

证明本题:

因为  $r(\mathbf{A}) = n-1$ , 所以  $r(\mathbf{A}^*) = 1$ .

$$\text{所以由前面的结论可知: } \mathbf{A}^* \text{ 可分解成 } \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n),$$

$$\text{存在常数 } k, k = (b_1, \cdots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ 满足 } (\mathbf{A}^*)^2 = k \mathbf{A}^*$$

## 第四章 线性方程组

### 习题四

1. (1)【解】由定理知,  $r = n - k$ , 当  $k = n$  时,  $r = 0$  这时方程组只有零解.

(2)【解】假设该方程组为  $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 矩阵的秩  $r(\mathbf{A}) = r$ . 由定理可知当  $r = n$ , 方程组有唯一解; 当  $r < n$ , 方程组有无穷多解.

$$(3) \text{【解】由题意得 } \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} \neq 0, 3 + 2k - k - 6k \neq 0, \text{ 即当 } k \neq \frac{3}{5} \text{ 时, 方程组只有零解.}$$

(4)【解】因为矩阵  $\mathbf{A}$  的秩  $r(\mathbf{A}) = 2 < n - 1 = 4 - 1 = 3$ , 所以  $r(\mathbf{A}^*) = 0, \mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系所含解向



量的个数为  $4 - 0 = 4$ .

$$(5) \text{【解】} \text{因为 } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $r(A) = 2$ , 即基础解系所含解向量个数为  $3 - 2 = 1$ .

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_3 = 1, \text{则 } x_2 = x_1 = 1. \text{基础解系为 } (1, 1, 1)^T.$$

$Ax = 0$  的通解为  $k(1, 1, 1)^T$ ,  $k$  为任意常数.

(6)【解】由题意知:  $A\alpha_i = b$ , 且  $A(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \cdots + C_s\alpha_s) = b$ , 所以  $C_1b + C_2b + \cdots + C_sb = b$ , 即  $(C_1 + \cdots + C_s)b = b$ ,

所以  $C_1 + C_2 + \cdots + C_s = 1$ .

(7)【解】方程组  $Ax = 0$  的基础解系为  $\eta_1 = (1, 0, 2)^T$ ,  $\eta_2 = (0, 1, -1)^T$ , 所以  $n - r(A) = 2$ , 即  $3 - r(A) = 2, r(A) = 1$ .

$$\text{所以 } A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ k_1\alpha_1 \\ k_2\alpha_2 \end{bmatrix}, \text{假设 } \alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}).$$

$$\text{由 } A\eta_1 = 0, \text{得 } (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = a_{11} + 2a_{13} = 0 \quad ①$$

$$\text{由 } A\eta_2 = 0, \text{得 } (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_{12} - a_{13} = 0 \quad ②$$

取  $a_{13} = 1$ , 解 ①② 得  $a_{12} = 1, a_{11} = -2$ . 所以  $\alpha_1 = (-2, 1, 1)$ ,  $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ k_1\alpha_1 \\ k_2\alpha_2 \end{bmatrix}$  (其中  $k_1, k_2$  为任意常数).

$$(8) \text{【解】} \text{因为 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{所以 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \text{所以 } r(A) = 3. \text{即 } A \text{ 满秩.}$$

要使得  $Ax = b$  有解, 需使得系数矩阵的秩 = 增广矩阵的秩, 即  $r \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = r \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ .

$$\text{所以 } b = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

$$(9) \text{【解】} \text{由题设 } A_{3 \times 3} X_{3 \times 3} = B, \text{又因为 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{所以 } |B| = |A| |X| = 0, \text{即 } \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & k & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4k - 6 - 6k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2.$$

2. (1)【解】因为  $\xi_1, \xi_2$  的对应分量不成比例, 所以  $\xi_1, \xi_2$  线性无关. 所以方程组  $Ax = 0$  的基础解系所含解向量个数大于 2.

$$\text{对于 } A, \text{因为 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{所以 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{即 } r(A) = 3, \text{即 } A \text{ 满秩, 又因为 } A \text{ 是三阶矩阵,}$$

所以  $Ax = 0$  只有零解, 排除 A;

对于 B, 因为  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 所以  $r(A) = 2$ . 所以方程组  $Ax = 0$  的基础解系所含解向量个数:  $3 - r(A) = 1 < 2$ , 排除 B;

对于 C, 因为  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 所以  $r(A) = 2$ . 所以方程组  $Ax = 0$  的基础解系所含解向量个数:

$3 - r(A) = 1$ . 排除 C; 利用排除法, 答案为 D.

(2)【解】假设  $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$  线性相关, 则存在不全为 0 的实数  $k_1, k_2, k_3$  使得

$$k_1 \xi_1 + k_2 (\xi_1 + \xi_2) + k_3 (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 0,$$

即  $(k_1 + k_2 + k_3)\xi_1 + (k_2 + k_3)\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ . 因为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是  $Ax = 0$  的基础解系, 所以  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  线性无关. 于是

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } k_1 = k_2 = k_3 = 0, \text{ 矛盾, 所以 } \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \text{ 线性无关. 因此它也可以是}$$

方程组的基础解系. 所以, 答案是 C.

(3)【解】对于 A, B: 反例  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 不可逆;

对于 C, 假设  $A$  为  $n \times n$  矩阵,  $\bar{A}$  为  $A$  的增广矩阵. 当  $r(A) = r(\bar{A}) < n$  时,  $Ax = b$  有无穷多解, 但  $A$  不可逆; 用排除法, 答案是 D.

3. (1)【解】① 系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & -6 & 8 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 & 8 & -6 \\ 2 & 2 & -3 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 & 8 & -6 \\ 0 & 12 & 9 & -21 & 15 \\ 0 & 16 & 12 & -28 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -6 & 8 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{得方程组 } \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{令 } x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, \text{ 得 } \left( \frac{9}{4}, -\frac{3}{4}, 1, 0, 0 \right)^T,$$

$$\text{令 } x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, \text{ 得 } \left( \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 0, 1, 0 \right)^T,$$

$$\text{令 } x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, \text{ 得 } \left( -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, 0, 0, 1 \right)^T, \text{ 于是该方程组的通解为}$$

$$x = k_1 \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

② 系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 6 & 1 & -3 & 0 & : & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -1 & : & -1 \\ 3 & 9 & 1 & -5 & 1 & : & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & : & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & : & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -2 & : & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}, r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 3, \mathbf{A} \text{ 为系数矩阵; } \bar{\mathbf{A}} \text{ 为增广矩阵.}$$

所以基础解系含解向量个数为 2.

$$\text{齐次方程组} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

令  $x_2 = 1, x_5 = 0$ , 得  $(-3, 1, 0, 0, 0)^T$ ,

令  $x_2 = 0, x_5 = 1$ , 得  $(3, 0, 0, 2, 1)^T$ .

$$\text{对于非齐次方程组} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ -5x_3 + x_4 - 2x_5 = -4 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

令  $x_2 = x_5 = 0$ , 得  $x_4 = -4, x_1 = -5$ .

得到特解:  $(-5, 0, 0, 0, -4, 0)^T$ .

$$\text{于是, 原方程组的通解为: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2)【解】将条件方程与原方程组构成的增广矩阵记为  $\bar{\mathbf{A}}$ .

$$\text{增广矩阵 } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & \vdots & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & \vdots & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & \vdots & 56 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & \vdots & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & \vdots & -17 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & \vdots & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

可得到条件方程与原方程组兼容, 即加上条件后的方程组与原方程组有相同的通解.

$r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2$ , 方程组有解. 齐次方程组的基础解系含解向量的个数为  $4 - r(\mathbf{A}) = 2$ ;

$$\text{齐次方程} \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_4 = 0 \\ -14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases},$$

令  $x_2 = 0, x_4 = 1$  得  $x_1 = -4, x_3 = \frac{7}{2}$ ,

令  $x_2 = 1, x_4 = 0$  得  $x_1 = -9, x_3 = 7$ ,

基础解系为:  $(-4, 0, \frac{7}{2}, 1)^T, (-9, 1, 7, 0)^T$ .

$$\text{非齐次方程: } \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_4 = -17 \\ -14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 28 \end{cases},$$

令  $x_3 = 0, x_4 = 0$  得  $x_1 = 1, x_2 = -2$ ,

得到特解:  $(1, -2, 0, 0)^T$ .

$$\text{所以全部解为: } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \text{【解】} \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & : & 0 \\ 3 & 2 & 3 & : & -1 \\ -1 & 4 & m & : & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & : & 0 \\ 0 & -7 & 0 & : & -1 \\ 0 & 7 & m+1 & : & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & : & 0 \\ 0 & -7 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & : & k-1 \end{bmatrix}.$$

① 当  $m \neq -1$  时,  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 3$ , 方程组有唯一解;

② 当  $m = -1$  时,  $k \neq 1$  时,  $r(\mathbf{A}) \neq r(\bar{\mathbf{A}})$ , 方程组无解;

③ 当  $m = -1$  时,  $k = 1$  时,  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 3$ , 方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为  $3 - r(\mathbf{A}) = 1$ .

$$\text{齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_2 = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } x_2 = 0.$$

取  $x_3 = 1$ , 得  $x_1 = -1$ . 基础解系为  $(-1, 0, 1)^T$ .

$$\text{非齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_2 = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } x_2 = \frac{1}{7}.$$

取  $x_3 = 0$ , 得  $x_1 = -\frac{3}{7}$ . 非齐次方程特解为  $(-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, 0)^T$ .

$$\text{所以通解为 } x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中, } k \text{ 为任意常数.}$$

$$(4) \text{【解】} \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & : & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & : & 2\lambda+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & : & -3\lambda+2 \\ 0 & 1 & -2 & : & -4\lambda+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & : & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & : & -\lambda+1 \end{bmatrix}.$$

当  $-\lambda+1=0$ , 即  $\lambda=1$  时,  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 2 < 3$ , 方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为  $3 - r(\mathbf{A}) = 1$ .

$$\text{齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases},$$

取  $x_3 = 1$ , 得  $x_2 = 2, x_1 = -1$ . 基础解系为:  $(-1, 2, 1)^T$ .

$$\text{非齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases},$$

取  $x_3 = 0$ , 得  $x_1 = 1, x_2 = -1$ . 非齐次方程特解为:  $(1, -1, 0)^T$ .

$$\text{于是, 通解为 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中, } k \text{ 为任意常数.}$$

$$(5) \text{【解】} \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & : & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 3 & : & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & : & 3-a \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & : & 2-4a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & : & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & : & a-3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & : & 2-4a \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & : & 1-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & : & a-3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 5(1-a) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{当 } a=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

当  $a=1$  时,  $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 3 < 5$ , 方程组有无穷多解. 此时基础解系含解向量个数为  $5 - r(\mathbf{A}) = 2$ .

$$\text{齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

令  $x_4 = 1, x_5 = 0$ , 得  $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = -1$ . 得到:  $(-1, 1, -1, 1, 0)^T$ .

令  $x_4 = 0, x_5 = 1$ , 得  $x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = -2$ . 得到:  $(-2, 1, 0, 0, 1)^T$ .

于是基础解系为  $(-1, 1, -1, 1, 0)^T, (-2, 1, 0, 0, 1)^T$ .

$$\text{非齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_2 - x_4 - x_5 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

令  $x_4 = x_5 = 0$ , 得  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ . 非齐次方程特解为  $(1, -1, 1, 0, 0)^T$ .

$$\text{于是, 通解为 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中, } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

(6)【解】假设  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ , 求解方程组, 求  $x_1, x_2, x_3$ .

$$\text{增广矩阵 } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 2 & a+2 & b+2 & : & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & : & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & a & b+4 & : & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & : & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 \\ 0 & a & b+4 & : & 1 \\ 0 & 0 & a+5b+12 & : & 0 \end{bmatrix}.$$

①  $a = 0, b$  任意,  $r(\bar{A}) < r(\bar{A})$ , 方程组无解, 即  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合;

②  $a \neq 0, a+5b+12 \neq 0$  时,  $r(\bar{A}) = 3 = r(\bar{A})$ , 方程组有唯一解, 即  $\beta$  能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合, 且表

$$\text{示法唯一. 此时得方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ ax_2 + (b+4)x_3 = 1 \\ (a+5b+12)x_3 = 0 \end{cases}$$

解得:  $x_3 = 0, x_2 = \frac{1}{a}, x_1 = 1 - \frac{1}{a}$ , 表示式为:  $\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2 + 0\alpha_3$ .

(7)【解】依题意: 在第二个方程组中求一组特解. 令  $x_3 = 1$ , 解得  $x_4 = -1, x_2 = 1, x_1 = 0$ . 将该组特解代入第一个方程组中得:  $a = 1, b = 4, c = 4$ .

(8)【解】① 由第一个方程组:

$$\text{增广矩阵 } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & : & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & : & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & : & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & : & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & : & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & : & 21 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & : & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & : & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & : & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & : & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & : & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & : & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & : & 5 \end{bmatrix}.$$

$r(\bar{A}) = r(\bar{A}) = 3$ , 齐次方程基础解系所含解向量个数为:  $4 - r(\bar{A}) = 1$ .

$$\text{齐次方程组: } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_4 = 1, \text{ 解得 } x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 1.$$

基础解系为:  $(1, 1, 2, 1)^T$ .

非齐次方程组: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ x_2 - x_4 = -4 \\ -x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$
 . 令  $x_4 = 0$ , 解得  $x_3 = -5, x_2 = -4, x_1 = -2$ .

非齐次方程组的特解为  $(-2, -4, -5, 0)^T$

所以第一个方程组的通解为 
$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

② 将  $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$  代入第二个方程组: 
$$\begin{cases} -2 - 4m + 5 = -5 \\ -4n + 5 = -11 \\ -5 = -t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 4 \\ t = 6 \end{cases}.$$

(9)【解】令  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ , 其中  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为  $A$  的行向量.

则  $BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{1m}\alpha_m \\ b_{21}\alpha_1 + \cdots + b_{2m}\alpha_m \\ \vdots \\ b_{m1}\alpha_1 + \cdots + b_{mm}\alpha_m \end{bmatrix}.$

因为  $BA$  的行向量都是方程组  $Rx = 0$  的解, 所以  $R(\sum_{k=1}^m b_{ik}\alpha_k)^T = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ .

所以  $\sum_{k=1}^m b_{ik}R\alpha_k^T = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ , 即  $B(R\alpha_i^T) = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ . 即  $|B| \cdot |R\alpha_i^T| = 0$ .

因为  $B$  可逆, 所以  $|B| \neq 0$ , 所以  $R\alpha_i^T = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ . 即  $A$  的每个行向量为  $Rx = 0$  的解.

(10)【解】因为  $r(A) = m$ , 所以方程组  $Ax = 0$  的基础解系所含解向量的个数为  $n - r(A) = n - m$ .

假设  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m})_{n \times (n-m)}$  为  $n \times (n-m)$  矩阵且  $r(B) = n - m$ . 其中  $\beta_i$  为  $B$  的列向量  $(i = 1, 2, \dots, n - m)$ .

因为  $AB = 0$ , 所以  $(A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_{n-m}) = 0$ , 即  $B$  的列向量都是  $Ax = 0$  的解. 又因为  $r(B) = n - m$ , 所以  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$  为  $Ax = 0$  的基础解系.

所以满足  $A\alpha = 0$  的任意向量都是  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}$  的唯一线性组合, 即存在唯一的一组数  $k_1, k_2, \dots, k_{n-m}$ , 使  $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_{n-m}\beta_{n-m}$ .

令  $\beta = (k_1, k_2, \dots, k_{n-m})$ , 则  $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-m}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-m} \end{pmatrix} = B\beta$ .

(11)【解】① 必要性:

考查  $Ax = b \quad (1)$

$A^T z = 0 \quad (2)$

$b^T z = 0 \quad (3)$

即要证明: 若(1)有解, 则(2)的解必为(3)的解.

假设  $x$  为(1)的解, 则  $Ax = b$ . 取转置, 得  $x^T A^T = b^T$ . 又设  $z$  为(2)的解, 即  $A^T z = 0$ . 则

$b^T z = x^T A^T z = x^T 0 = 0$ .

所以  $z$  为(3)的解.

② 充分性:

假充  $Ax = b$  的系数矩阵为  $A$ , 增广矩阵为  $\bar{A}$ .

$$\text{考查: I. } A^T x = 0 \quad \text{II. } \begin{cases} A^T x = 0 \\ b^T x = 0 \end{cases}$$

因为  $A^T Z = 0$ , 则  $b^T Z = 0$ , 所以 (I) 和 (II) 为同解方程组, 所以  $r(A^T) = r\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}$ , 即  $r(A) = r(\bar{A})$ , 所以

$Ax = b$  有解.

(12)【解】① 充分性:

设  $|A| = 0$ , 则方程组  $Ax = 0$  有非零解  $x = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . 构成矩阵

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则  $B \neq 0$ , 且  $AB = 0$ .

② 必要性:

(反证法) 假设  $|A| \neq 0$ , 则  $A^{-1}$  存在. 在  $AB = 0$  的两边同右乘  $A^{-1}$  得  $B = 0$ , 与存在一个  $n$  阶非零矩阵  $B$ , 使  $AB = 0$  矛盾. 所以  $|A| = 0$ ;

(13)【解】令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 其中  $\alpha_i$  为  $A$  的列向量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 取  $\beta_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 只有第  $i$  个分量为 1, 其余全为 0. 则

$$A\beta_i = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i = 0, (i = 1, 2, \dots, n),$$

所以  $A = 0$ .

$$(14)【解】将 \eta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} 代入 Ax = b, 得到 1 - a + c - 1 = 0, a = c.$$

$$\text{增广矩阵 } \bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & : & 1 \\ 1 & a & a & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & : & 1 \\ 0 & a - \frac{1}{2} & a - \frac{1}{2} & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

当  $a = c = \frac{1}{2}$  时,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & : & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & : & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

于是  $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ , 基础解系所含解向量个数为  $4 - r(A) = 2$ .

$$\text{齐次方程: } \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases},$$

令  $x_3 = 1, x_4 = 0$ , 解得  $x_2 = -3, x_1 = 1$ , 解向量为  $(1, -3, 1, 0)^T$ .

令  $x_3 = 0, x_4 = 2$ , 解得  $x_2 = -2, x_1 = -1$ , 解向量为  $(-1, -2, 0, 2)^T$ .

$$\text{所以通解为 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

于是, 基础解系为  $(1, -3, 1, 0)^T, (-1, -2, 0, 2)^T$ , 又有特解  $\eta = (1, -1, 1, 1)^T$ .

当  $a = c \neq \frac{1}{2}$  时,

$$\text{增广矩阵 } \bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & a & a & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & \frac{1}{2}-a & \vdots & \frac{1}{2}-a \end{bmatrix},$$

于是  $r(A) = r(\bar{A}) = 3$ , 所以基础解系所含解向量个数为  $4 - r(A) = 1$ .

$$\text{齐次方程: } \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ (1-a)x_3 + (\frac{1}{2}-a)x_4 = 0 \end{cases},$$

令  $x_4 = 2$ , 解得  $x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = -2$ , 解向量为  $(-2, 1, -1, 2)^T$ ,

即基础解为  $(-2, 1, -1, 2)^T$ .

又有特解  $\eta = (1, -1, 1, -1)^T$ ,

$$\text{所以通解为 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (15) \text{【解】} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & 4 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & \vdots & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & -6 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & -2-a & -2-4a \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & 4 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & -6 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & \vdots & -2-a & -8-4a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

当  $a = -2$  时, 对于  $B$  的任一向量, 都有  $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ , 所以矩阵方程  $AX = B$  有解, 但解不唯一.

(16)【解】①  $A\eta_1 = b, A\eta_2 = b, \eta_1 \neq \eta_2$ , 由定理知  $\eta_1 - \eta_2$  是齐次方程  $Ax = 0$  的非零解.

假设  $\eta_1, \eta_1 - \eta_2$  线性相关, 即存在不全为 0 的实数  $k_1, k_2$ .

使得  $k_1\eta_1 + k_2\eta_1 - \eta_2 = 0$ ,

则  $(k_1 + k_2)\eta_1 - k_2\eta_2 = 0$ , 方程两边同乘以  $A$ .

则  $A\{(k_1 + k_2)\eta_1 - k_2\eta_2\} = 0$ .

$(k_1 + k_2)A\eta_1 - k_2A\eta_2 = 0, A\eta_1 = A\eta_2 = b$ ,

所以  $(k_1 + k_2 - k_2)b = 0$ , 即  $k_1b = 0$ .

因为  $b \neq 0$ , 所以  $k_1 = 0$ , 于是  $k_2(\eta_1 - \eta_2) = 0$ .

因为  $\eta_1 \neq \eta_2$ , 所以  $k_2 = 0$ . 向量组  $\eta_1, \eta_1 - \eta_2$  线性无关.

② 因为  $r(A) = n-1$ , 则方程组  $Ax = 0$  的基础解系含解向量个数为  $n - (n-1) = 1$ .  $\xi, \eta_1 - \eta_2$  都是  $Ax = 0$  的解, 所以  $\xi, \eta_1 - \eta_2$  线性相关. 即存在不全为 0 的  $k_1, k_2$ , 使得

$$k_1\xi + k_2(\eta_1 - \eta_2) = 0,$$

$$k_1\xi + k_2\eta_1 - k_2\eta_2 = 0,$$

故  $\xi, \eta_1, \eta_2$  线性相关.

## 第五章 特征值和特征向量

### 习题五

1. (1)【解】因为  $AA^* = A^*A = |A|E$ , 所以对于任意  $n$  维向量  $\alpha$  有  $AA^*\alpha = |A|E\alpha = |A|\alpha$ . 又  $B = AA^*$ , 所以 5 是  $B$  的特征值, 任意  $n$  维向量  $\alpha$  为对应的特征向量.

(2)【解】设  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$ , 则  $B$  的特征值为  $\lambda_1^2 = 2\lambda_1^2 - 3\lambda_1 = -1, \lambda_2^2 = -5, \lambda_3^2 = 4$ .



(3)【解】因为  $A, A^T$  具有相同的特征值. 又  $B = A^T$ , 所以  $B$  和  $A$  具有相同的特征值. 所以  $B$  的特征值为: 2 和 1 (二重).

(4)【解】因为  $A, B$  相似, 所以  $|A| = |B|$ , 即 
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \text{ 即 } 2 = -2y, y = 1.$$

又相似矩阵的迹相等, 所以  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ , 即  $2 + x = y + 2 - 1 \Rightarrow x = 0$ .

(5)【解】因为  $|A| \neq 0$ , 所以  $A$  可逆, 不妨令  $P = A$ , 于是  $P^{-1}ABP = A^{-1}ABA = BA$ , 即  $AB$  与  $BA$  相似, 所以  $P = A$ .

2. (1)【解】假设  $A$  的所有特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . 则  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ . 若 0 为  $A$  的特征值, 则  $|A| = 0$ .  $A$  不可逆, 若  $A$  不可逆, 则  $|A| \neq 0$ , 则 0 不为  $A$  的特征值, 所以答案为 C.

(2)【解】因为  $\lambda_1, \lambda_2$  为  $A$  的二个相异的特征值, 所以存在非零向量  $\xi, \eta$ , 使得  $A\xi = \lambda_1\xi, A\eta = \lambda_2\eta$  成立, 而且  $\xi, \eta$  线性无关.

假设存在  $\lambda$  满足:  $A(k_1\xi + k_2\eta) = \lambda(k_1\xi + k_2\eta)$ , 又  $A\xi = \lambda_1\xi, A\eta = \lambda_2\eta$ .

所以  $\lambda_1 k_1 \xi + \lambda_2 k_2 \eta = \lambda k_1 \xi + \lambda k_2 \eta$ , 即  $(\lambda_1 k_1 - \lambda k_1)\xi + (\lambda_2 k_2 - \lambda k_2)\eta = 0$ .

因为  $\xi, \eta$  线性无关, 所以  $\lambda_1 k_1 - \lambda k_1 = 0, \lambda = \lambda_1; \lambda_2 k_2 - \lambda k_2 = 0, \lambda = \lambda_2$ . 得到  $\lambda_1 = \lambda_2$  与  $\lambda_1, \lambda_2$  相异矛盾, 所以答案为 C.

(3)【解】因为齐次线性方程组  $(\lambda_0 E - A)x = 0$  的基础解系为  $\eta_1$  和  $\eta_2$ , 所以方程组  $(\lambda_0 E - A)x = 0$  的全部解为  $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$  ( $C_1, C_2$  为任意常数). 又特征向量不能为零, 所以  $A$  的属于  $\lambda_0$  的全部特征向量是:  $C_1\eta_1 + C_2\eta_2$  ( $C_1, C_2$  为不全为零的任意常数), 即答案为 D.

(4)【解】答案为 B.

(5)【解】令  $P = E$ , 则  $P^{-1} = E$ . 所以  $P^{-1}EP = EEE = E$ . 所以为 C.

(6)【解】因为  $A \sim B$ , 所以存在可逆方阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

则  $|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}| |\lambda E - A| |P| = |\lambda E - A|$ ,

所以  $A, B$  有相同的特征方程, 答案为 B.

3. (1)【解】 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ t & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(1-\lambda^2) - 4t + 2t(1+\lambda) = 0.$

当  $\lambda = 1$  时,  $-4t + 4t = 0$ , 所以  $t$  为任意实数.

① 当  $\lambda = 1, t \neq 0$  时,

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ t & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $r(A - \lambda E) = 2$ , 即方程组  $(A - \lambda E)x = 0$  基础解系所含解向量个数为

$$3 - r(A - \lambda E) = 3 - 2 = 1.$$

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 1$ , 得  $x_2 = 2$ . 则基础解系为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 则  $\lambda = 1$  的全部特征向量为

为  $k \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;

② 当  $\lambda = 1, t = 0$  时,

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以  $r(A - \lambda E) = 2$ , 即方程组  $(A - \lambda E)x = 0$  基础解系所含解向量个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 3 - 2 = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 1$ , 得  $x_2 = 2$ . 则基础解系为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 则  $\lambda = 1$  的全部特征向量

为  $k \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$$(2) \text{【解】} \text{依题意得: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & -\lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -\lambda & 1 \\ & & & & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n = 0, \lambda = 0,$$

$$\text{则 } A - \lambda E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, r(A - \lambda E) = n - 1.$$

所以方程组  $(A - \lambda E)x = Ax = 0$  的基础解系所含解向量个数为  $n - (n - 1) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$ , 令  $x_1 = 1$ , 得基础解系为  $(1, 0, \dots, 0)^T$ .

于是  $\lambda = 0$  的全部特征向量为  $k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  ( $k \neq 0$ ).

$$(3) \text{【解】} \text{假设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{依题意得: } \sum_{k=1}^n a_{ik} = a (i = 1, 2, \dots, n).$$

若  $\lambda = a$  是  $A$  的特征值, 且  $(1, 1, \dots, 1)^T$  是其对应的特征向量, 则  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{又因为 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 成立,}$$

所以  $\lambda = a$  为  $A$  的特征值, 对应的特征向量为  $(1, 1, \dots, 1)^T$ .

因为  $A$  可逆, 所以  $A^{-1}$  的特征值为  $\frac{1}{a}$ , 对应的特征向量也是  $(1, 1, \dots, 1)^T$ .

即  $A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ , 所以  $A^{-1}$  的每行和为  $\frac{1}{a}$ .

(4)【解】 考查方程组  $\begin{cases} Ax = 0 \\ Bx = 0 \end{cases}$ ,  $r(A) + r(B) < n$ , 所以方程组有非零解  $\alpha$ ,

则解向量  $\alpha$  为  $A, B$  的公共特征向量, 对应的特征为  $\lambda = 0$ .

(5)【解】 令  $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 通过初等变换求出  $P^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{即 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & : & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & : & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以  $P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , 由题知  $A$  的特征值为 1, 2, 3.

$$\text{所以 } P^{-1}AP = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } A &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 21 & 0 & -6 \\ 0 & 15 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(6)【解】 因为  $A$  相似于  $B$ , 所以  $|A| = |B|$ , 即  $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $-x = y$  ①, 又相似矩阵

有相同的迹, 即  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ , 所以  $x = y + 2$  ②.

求 ①② 得  $x = 1, y = -1$ .

由  $B$  的表达式知:  $A$  的二个特征值为  $\lambda = -1, \lambda = 1$  (二重).

当  $\lambda = -1$  时,

$$(A + E)x = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 2,$$

所以方程组  $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系所含解向量的个数为:  $3 - r(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ , 令  $x_1 = 1$  于是, 得特征向量为:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

当  $\lambda = 1$  (二重) 时,  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 即  $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1$ ,

方程组  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2$ .

相应的方程组为  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ . 令  $x_1 = 1, x_2 = 0$ , 得  $x_3 = 1$ ;

令  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , 得  $x_3 = 1$ .

于是二个线性无关的特征向量为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

所以矩阵  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned} (7) \text{【解】 } \mathbf{B} &= (k\mathbf{E} + \mathbf{A})^2 = \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 0 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 & 0 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 0 & k+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (k+1)^2 + 1 & 0 & 2k+2 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 2k+2 & 0 & (k+1)^2 + 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} (k+1)^2 + 1 - \lambda & 0 & 2k+2 \\ 0 & (k+2)^2 - \lambda & 0 \\ 2k+2 & 0 & (k+1)^2 + 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= [(k+1)^2 + 1 - \lambda]^2 [(k+2)^2 - \lambda] - 4(k+1)^2 [(k+2)^2 - \lambda] = 0. \end{aligned}$$

解得  $\lambda_1 = k^2, \lambda_2 = (k+2)^2$  (二重). 要使  $\mathbf{B}$  可对角化, 只须验证当  $\lambda_2 = (k+2)^2, (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有两个不同的解向量即可.

当  $\lambda = (k+2)^2$  时,  $(k+1)^2 + 1 - \lambda = k^2 + 2k + 1 + 1 - k^2 - 4k - 4 = -2k - 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} (k+1)^2 + 1 - \lambda & 0 & 2k+2 \\ 0 & (k+2)^2 - \lambda & 0 \\ 2k+2 & 0 & (k+1)^2 + 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2k-2 & 0 & 2k+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2k+2 & 0 & -2k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k-2 & 0 & 2k+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$r(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = 1$ , 所以方程组  $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = 2$ . 所以  $\mathbf{B}$  可

以对角化. 即  $\mathbf{B}$  相似于对角矩阵:  $\begin{bmatrix} (k+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$ .

当  $k \neq -2, k \neq 0$  时,  $\mathbf{B}$  的特征值都为正, 此时,  $\mathbf{B}$  为正定阵.

(8)【解】 因为  $\mathbf{A}$  的特征值为  $1, 2, \dots, n$ , 所以  $2\mathbf{A} + \mathbf{E}$  的特征值为  $2i+1 (i=1, 2, \dots, n)$ . 所以  $|2\mathbf{A} + \mathbf{E}| =$

$$\prod_{i=1}^n (2i+1).$$

$$(9) \text{【解】} |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - 4(2-\lambda) + 4\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4 \quad \langle 1 \rangle$$

下面求可逆矩阵  $U$ .

① 当  $\lambda_1 = -2$  时,

$$A + 2E = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是  $r(A - \lambda E) = 2$ , 基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 2$ , 解得  $x_2 = 2, x_1 = 1$ ,

则  $\lambda = -2$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

② 当  $\lambda_2 = 1$  时,

$$A - E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是  $r(A - \lambda E) = 2$ , 基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 2$ , 解得  $x_2 = -1, x_1 = -2$ ,

则  $\lambda = 1$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

③ 当  $\lambda_3 = 4$  时,

$$A - 4E = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是  $r(A - \lambda E) = 2$ , 基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 1$ , 解得  $x_2 = -2, x_1 = 2$ ,

则  $\lambda = 4$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; 又由  $\langle 1 \rangle$  知,  $A$  可对角化.

$$\text{所以 } U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, U^{-1}AU = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(10) \text{【解】} |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda) = 0,$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ ,  $A$  有三个不同的特征值, 即  $A$  可以对角化, 下求可逆矩阵  $U$ , 使得  $U^{-1}AU = \Lambda$ . ( $\Lambda$  为对角阵)

① 当  $\lambda_1 = 1$  时,

$$A - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r(A - \lambda E) = 2$ , 基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 1$ , 解得  $x_2 = 0, x_1 = -1$ ,

则  $\lambda = 1$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

② 当  $\lambda_2 = 2$  时,

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix},$$

于是  $r(A - \lambda E) = 2$ , 基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 1$ , 解得  $x_2 = -\frac{3}{5}, x_1 = -\frac{6}{5}$ ,

则  $\lambda = 2$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ .

③ 当  $\lambda_3 = -1$  时,

$$A + E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是  $r(A - \lambda E) = 2$ , 基础解系所含解向量的个数为  $3 - r(A - \lambda E) = 1$ .

相应的方程组为  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ . 令  $x_3 = 1$ , 解得  $x_2 = 0, x_1 = 0$ ,

则  $\lambda = -1$  的特征向量为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

令  $U = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 下求  $U$  的逆矩阵  $U^{-1}$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -\frac{6}{5} & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{6}{5} & 0 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 & : & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & : & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

所以  $U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } \mathbf{A}^{100} &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{100} \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2^{101} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}(1 - 2^{100}) & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(11)【解】(I) 由题设可得以下递推关系:

第  $n$  年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为  $x_n$  和  $y_n$ , 熟练工的  $\frac{1}{6}$ , 即  $\frac{1}{6}x_n$  支援其他生产部门, 缺额招收新的非熟练工, 所以总的非熟练工为  $\frac{1}{6}x_n + y_n$ . 到第  $n+1$  年, 其中的  $\frac{2}{5}$  成为熟练工,  $\frac{3}{5}$  还是非熟练工. 所以得到

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases},$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

(II) 若  $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  是  $\mathbf{A}$  的两个线性无关的特征向量, 且设  $\mathbf{A}$  的两个特征值分别为  $\lambda_1, \lambda_2$ , 即有

$$\begin{cases} \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{\eta}_1 \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{\eta}_2 \end{cases}.$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 是 } \mathbf{A} \text{ 的特征向量, 相应的特征值为 } \lambda_1 = 1;$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 是 } \mathbf{A} \text{ 的特征向量, 相应的特征值为}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{(III) 假设 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } \mathbf{A}^n = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + (\frac{1}{2})^n & 4 - 4(\frac{1}{2})^n \\ 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 + 4(\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}.$$

由(I)知:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2 \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = \mathbf{A}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}.$$

(12)【解】由题设知:  $A\eta_i = \lambda_i \eta_i (i = 1, 2, \dots, r)$ ,  $A\xi_j = \lambda_2 \xi_j (j = 1, 2, \dots, s)$ .

假设  $\eta_1, \dots, \eta_r, \xi_1, \dots, \xi_s$  线性相关, 则存在  $r+s$  个不全为零的常数  $k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_{r+s}$ , 使得  $k_1 \eta_1 + \dots + k_r \eta_r + k_{r+1} \xi_1 + \dots + k_{r+s} \xi_s = 0$  成立.

两边同乘以  $A$ , 得  $A(k_1 \eta_1 + \dots + k_r \eta_r) + A(k_{r+1} \xi_1 + \dots + k_{r+s} \xi_s) = 0$

于是  $\lambda_1(k_1 \eta_1 + \dots + k_r \eta_r) + \lambda_2(k_{r+1} \xi_1 + \dots + k_{r+s} \xi_s) = 0$ ,

所以  $\lambda_1(k_1 \eta_1 + \dots + k_r \eta_r) - \lambda_2(k_{r+1} \xi_1 + \dots + k_{r+s} \xi_s) = 0$ ,

所以  $(\lambda_1 - \lambda_2)(k_1 \eta_1 + \dots + k_r \eta_r) = 0$ .

又因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 所以  $k_1 \eta_1 + \dots + k_r \eta_r = 0$ .

因为  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  线性无关, 所以  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ ,

所以  $k_{r+1} \xi_1 + \dots + k_{r+s} \xi_s = 0$ .

因为  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  线性无关, 所以  $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_{r+s} = 0$  与假设矛盾.

即  $\eta_1, \dots, \eta_r, \xi_1, \dots, \xi_s$  线性无关.

## 第六章 二次型

### 习题六

1. (1)【解】由题意可得:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(2)【解】由题意可得:  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

(3)【解】 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2 > 0$ , 所以  $|t| < 1$  ①

且  $\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -4t - 5t^2 > 0, 5t^2 + 4t < 0, -\frac{4}{5} < t < 0$  ②

由 ①② 知: 当  $-\frac{4}{5} < t < 0$  时, 二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  是正定的.

(4)【解】假设  $x = A^{-1}y$ , 则  $x^T = y^T(A^{-1})^T = y^T(A^T)^{-1}$ , 又因为  $A$  为实对称可逆矩阵, 所以  $y^T(A^T)^{-1} = y^T A^T$ .

所以  $f = x^T A x = y^T A^{-1} A A^{-1} y = y^T A^{-1} y$ .

(5)【解】因为  $A$  的特征值为  $1, 2, \dots, n$ , 所以  $tE - A$  的特征值为  $t-1, t-2, \dots, t-n$ . 若  $tE - A$  是正定的, 则  $t-1 > 0, t-2 > 0, \dots, t-n > 0$ ,

所以  $t > n$  时,  $tE - A$  是正定的.

2. (1)【解】对于  $A$ : 令  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A \neq B, r(A) = r(B)$ . 但是, 对于任何三维向量

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ,  $x^T A x = x^T B x = x_1 x_2$ , 所以排除  $A$ .



对于 B: 取反例  $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $x^T A x = x^T B x$ , 所以排除 B.

对于 C: 取反例  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $x^T A x = x^T B x$ , 所以排除 C.

用排除法, 选 D.

(2)【解】一阶主行列式为  $2 > 0$ , 二阶主行列式为  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ , 三阶主行列式为  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 =$

$2 > 0$ , 所以答案为 D.

(3)【解】因为  $A, B$  均为  $n$  阶正定矩阵, 则  $A^*, B^*$  也均为  $n$  阶正定矩阵, 所以  $A^* + B^*$  为  $n$  阶正定矩阵. 所以, 答案为 A.

### 3. 计算证明题

(1)【解】① 依题意, 令  $\begin{cases} y_1 = -2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$ ,

则  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

② 依题意, 令  $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_{2n}, x_2 = y_2 - y_{2n-1}, \dots, x_n = y_n - y_{n-1} \\ x_{2n} = y_1 + y_{2n}, x_{2n-1} = y_2 + y_{2n-1}, \dots, x_{n+1} = y_n + y_{n+1} \end{cases}$ ,

则  $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \dots + x_n x_{n+1}$   
 $= (y_1 - y_{2n})(y_1 + y_{2n}) + (y_2 - y_{2n-1})(y_2 + y_{2n-1}) + \dots + (y_n - y_{n+1})(y_n + y_{n+1})$   
 $= y_1^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \dots - y_{2n}^2$ .

(2)【解】① 依题知, 二次型对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}$ .

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 8 & 2 \\ 8 & 5-\lambda & -10 \\ 2 & -10 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -10 \\ -10 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -10 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -10 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 = 0,$$

解得:  $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 18, \lambda_3 = -9$ .

所以可用正交变换将原二次型化成以下标准型:

$$f(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2.$$

② 依题知, 二次型对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1-\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 - 12(1-\lambda) + 16 = 0,$$

解得:  $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 5$ .

所以可用正交变换将原二次型化成以下标准型:

$$f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2.$$

(3)【解】二次型对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2a - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ = (2a - \lambda)(3 - \lambda)^2 - (2a - \lambda) = 0,$$

解得  $\lambda_1 = 2a, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$ . 与  $f = y_1^2 + ay_2^2 + by_3^2$  矛盾, 所以该题无解.

(4)【解】假设  $\lambda$  为  $A$  的特征值, 因为  $A^3 + A^2 + A = 3E$ , 所以  $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$ . 解得,  $\lambda = 1, \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}i$ . 因为  $A$  为实对称矩阵, 所以只能有  $\lambda = 1, \lambda = -1 \pm 2\sqrt{2}i$  舍去. 所以  $A$  为正定矩阵.

(5)【解】因为实对称矩阵  $A$  的特征值全大于  $a$ , 实对称矩阵  $B$  的特征值全大于  $b$ , 所以  $(A - aE) + (A - bE)$  的特征值全大于 0, 即  $(A - aE) + (A - bE)$  为正定阵.

假设  $\lambda$  为  $A + B$  的特征值, 相应的特征向量为  $x$ , 则  $(A + B)x = \lambda x$ .

$$\text{于是 } [(A - aE) + (B - bE)]x = (A + B)x - (a + b)Ex = [\lambda - (a + b)]x$$

所以  $\lambda - (a + b)$  为  $(A - aE) + (A - bE)$  的特征值. 又因为  $(A - aE) + (A - bE)$  为正定阵, 所以  $\lambda - (a + b) > 0$ , 即  $\lambda > a + b$ .

(6)【解】“充分性”(反证法)

反设  $r(A) < n$ , 则  $|A| = 0$ . 于是  $\lambda = 0$  是  $A$  的特征值, 假设相应的特征向量为  $x$ , 即  $Ax = \lambda x = 0x = 0 (x \neq 0)$ . 所以  $x^T A^T = 0$ .

所以  $x^T (AB + B^T A)x = x^T ABx + x^T B^T Ax = 0$ , 与  $AB + B^T A$  是正定矩阵矛盾, 假设不成立, 所以  $r(A) = n$ . “必要性”

因为  $r(A) = n$ , 所以  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  全不为 0.

取  $B = A$ , 则  $AB + B^T A = AA + AA = 2A^2$ , 它的特征值为  $2\lambda_1^2, 2\lambda_2^2, \dots, 2\lambda_n^2$  全部为正, 所以  $AB + B^T A$  是正定矩阵.

(7)【解】①  $\Leftarrow$  因为  $AB = BA$ , 则  $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ , 所以  $AB$  为对称矩阵.

因为  $A$  为正定矩阵, 所以存在可逆矩阵  $P$  使得  $A = P^T P$ ;

因为  $B$  为正定矩阵, 所以存在可逆矩阵  $Q$  使得  $B = Q^T Q$ .

所以  $Q(AB)Q^{-1} = Q(P^T P)(Q^T Q)Q^{-1} = QP^T PQ^T = (PQ^T)^T (PQ^T)$ . 因为  $PQ^T$  可逆, 所以  $(PQ^T)^T (PQ^T)$  为正定矩阵. 上式表明  $AB$  相似于正定矩阵, 又因为  $AB$  对称, 所以  $AB$  是正定矩阵.

②  $\Rightarrow$  因为  $A, B, AB$  均为  $n$  阶正定矩阵, 所以  $A, B, AB$  均为  $n$  阶实对称矩阵, 即  $A^T = A, B^T = B, AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$ , 所以  $A$  与  $B$  可交换.

(8)【解】 $(E + \varepsilon A)^T = E + \varepsilon A^T = E + \varepsilon A$ , 且  $\varepsilon$  为充分小的正数, 所以  $E + \varepsilon A$  为  $n$  阶实对称矩阵. 对于  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 假设它的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $E + \varepsilon A$  的特征值为  $1 + \varepsilon \lambda_1, 1 + \varepsilon \lambda_2, \dots, 1 + \varepsilon \lambda_n$ .

令  $\lambda = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$ , 取  $\varepsilon$  使  $\varepsilon \lambda < 1$ .

又  $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ , 所以  $\varepsilon \lambda > 0$ .

则  $1 + \varepsilon \lambda_1 > 0, 1 + \varepsilon \lambda_2 > 0, \dots, 1 + \varepsilon \lambda_n > 0$ , 所以  $E + \varepsilon A$  为正定矩阵.

(9)【解】依题知, 二次型对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

因为二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 - 2x_2x_3$  的正负惯性指数都是 1, 所以矩阵  $A$  有一个为 0 的特征值, 所以对应的行列式  $|A| = 0$ .

$$\text{于是 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = 3a - a^3 - 2 = 0,$$

所以  $a = -2, a = 1$ .

① 当  $a = 1$  时,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 + 2 - (1-\lambda) = (1-\lambda) + (1-\lambda),$$

解得  $\lambda_1 = 0$  (二重),  $\lambda_2 = 3$ . 和二次型的正负惯性指数都是 1 矛盾;

② 当  $a = -2$  时,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(2+\lambda)(1-\lambda)^2 - 4 + 4(2+\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)$$

$$= -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 4\lambda - 2\lambda^2 + 2 + 6\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda = 0,$$

解得  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$ . 所以  $a = -2$  为正确答案.

于是  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ .

在  $(1, 1, 0)$  处的法矢量为

$$\mathbf{n} = \{2x_1 + 2x_2 + 4x_3, -4x_2 + 2x_1 - 2x_3, 2x_3 - 2x_2 + 4x_1\} \big|_{(1,1,0)} = \{4, -2, 2\},$$

所以在  $(1, 1, 0)$  处的切平面为:  $2(x_1 - 1) - (x_2 - 1) + x_3 = 0$ , 即  $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$ .

(10)【解】对于实二次型  $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 存在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ , 使得:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $\mathbf{A}$  的全部特征值. 不妨假定:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ .

$$\text{则 } \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{y}^T \mathbf{y},$$

$$\lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{y}^T \mathbf{y},$$

依此类推:

$$\lambda_n \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda_n \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \lambda_n \mathbf{y}^T \mathbf{y},$$

$$\text{于是, } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

$$\text{又 } \lambda_1 \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2,$$

$$\lambda_n \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \lambda_n y_1^2 + \lambda_n y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

$$\text{且 } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

$$\text{所以 } \lambda_1 \mathbf{y}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n \mathbf{y}^T \mathbf{y},$$

$$\text{所以 } \lambda_1 \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_n \mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

$$\text{当 } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1, \text{ 即当 } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1 \text{ 时, } \lambda_1 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_n.$$

$$\text{由 } \lambda_n \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda_n \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \lambda_n \mathbf{y}^T \mathbf{y} \text{ 知, 当 } \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1 \text{ 时, } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1. \text{ 取 } \mathbf{y} = (0, 0, \dots, 1)^T \text{ 时, 相应地, } \mathbf{x} \text{ 有 } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = \lambda_n.$$

所以  $f$  在条件  $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$  下的最大值恰为矩阵  $\mathbf{A}$  的最大特征值.

## 第三篇 概率论与数理统计

### 第一章 随机事件和概率

1. (1)【解】因为  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{AB})$ ,  $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = P(\overline{ABC})$ .  
所以,  $P(AB - C) = P(AB - ABC) = P(AB) - P(ABC) = 1 - P(\overline{AB}) - 1 + P(\overline{ABC})$   
 $= 0.97 - 0.9 = 0.07$ .

(2)【解】令  $A = \{\text{二件产品中至少有一件是不合格品}\}$ ,  $B = \{\text{二件都是不合格品}\}$ , 则  $A \cap B = AB = \{\text{二件都是不合格品}\}$ .

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2}} = \frac{1}{5}.$$

(3)【解】 $n = 100$ , 所以标准差  $D = \sqrt{100p(1-p)}$ .

$$\frac{dD}{dp} = \frac{100(1-p) - 100p}{2\sqrt{100p(1-p)}} = \frac{100(1-2p)}{2\sqrt{100p(1-p)}} = 0.$$

解之得:  $p = \frac{1}{2}$ . 于是最大标准差为  $D = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5$ .

(4)【解】假设落点  $(X, Y)$  为二维随机变量,  $D$  为半圆. 则依题意可知:

$$P((X, Y) \in D) = k \frac{1}{2} \pi a^2 = 1, \text{ 其中 } k \text{ 为比例系数. 所以 } k = \frac{2}{\pi a^2}.$$

假设  $D_1 = \{D \text{ 中落点和原点连线与 } x \text{ 轴夹角小于 } \frac{\pi}{4} \text{ 的区域}\}$ ,

$$\text{则 } P((X, Y) \in D_1) = k \times D_1 \text{ 的面积} = \frac{2}{\pi a^2} \left( \frac{1}{4} \pi a^2 + \frac{1}{2} a^2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

(5)【解】因为  $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1$ ,

所以  $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.1 = 0.3$ .

(6)【解】假设  $A = \{\text{订日报}\}$ ,  $B = \{\text{订晚报}\}$ ,  $C = \{\text{至少订这两种报纸中的一种}\}$ . 则由题意可知  $C = A+B$ .

由已知  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.65$ ,  $P(C) = 0.85$ .

所以  $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0.5 + 0.65 - 0.85 = 0.3$ .

(7)【解】设  $A_i$  事件表示第  $i$  台机器运转不发生故障 ( $i = 1, 2, 3$ ).

则  $P(A_1) = 0.9$ ,  $P(A_2) = 0.8$ ,  $P(A_3) = 0.7$ , 因为“至少有一台发生故障”的对立事件为“全都不发生故障”.

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}) &= P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = 1 - P(A_1 A_2 A_3) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= 1 - 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.496. \end{aligned}$$

(8)【解】假设事件  $A, B, C$  表示元件  $A, B, C$  完好.

由已知  $P(A) = 0.7$ ,  $P(B) = 0.8$ ,  $P(C) = 0.9$ . 因为元件  $B, C$  并联且与  $A$  串联, 所以事件线路完好  $= A(B+C)$   
 $= AB + AC$ .

$$P[A(B+C)] = P(AB + AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{A, B, C \text{ 损坏与否相互独立}}{=} P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.7 \times 0.8 + 0.7 \times 0.9 - 0.7 \times 0.8 \times 0.9 = 0.686. \end{aligned}$$

所以  $P(\text{电路断路}) = 1 - 0.686 = 0.314$ .

(9)【解】设  $X$  表示甲进球数,  $Y$  表示乙进球数.

$$\begin{aligned}
 & \text{由题知: } P(\text{甲比乙进球多}) = P(X=3, Y=2) + P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=0) + \\
 & P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=0) + P(X=1, Y=0) \\
 & = P(X=3)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=1) + P(X=3)P(Y=0) + \\
 & P(X=2)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=0) \\
 & = 0.7^3 \cdot C_3^1 \cdot 0.4 \cdot 0.6^2 + 0.7^3 \cdot C_3^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6 + 0.7^3 \cdot 0.4^3 + \\
 & C_3^1 \cdot 0.3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.6 + C_3^1 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2 + C_3^1 \cdot 0.3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.4^3 + C_3^1 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 \cdot 0.4^3 \\
 & = 0.43624.
 \end{aligned}$$

(10)【解】设  $A$  表示甲单独译出密码,  $B$  表示乙单独译出密码,  $C$  表示丙单独译出密码,

$$\text{则 } P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}.$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{A, B, C \text{ 相互独立}} P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C) \\
 & = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

2. (1)【解】易知答案为 D.

(2)【解】对于 D,  $A(\overline{A+B+C}) = A\overline{A}\overline{B}\overline{C} = \Phi$ , 所以答案为 D.

$$\begin{aligned}
 (3) \text{【解】} & P(A+B)P(AB) - P(A)P(B) = [P(A) + P(B) - P(AB)]P(AB) - P(A)P(B) \\
 & = P(A)P(AB) + P(B)P(AB) - P(AB)P(AB) - P(A)P(B) \\
 & = -P(A)[P(B) - P(AB)] + P(AB)[P(B) - P(AB)] \\
 & = -[P(B) - P(AB)][P(A) - P(AB)] \\
 & = -P(B-A)P(A-B).
 \end{aligned}$$

又  $P(B-A) \geq 0, P(A-B) \geq 0$ , 所以  $-P(B-A)P(A-B) \leq 0$ .

即答案为 B.

(4)【解】至少有二个事件发生相当于恰有二个事件发生或恰有三个事件发生, 所以为  $(A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3) + A_1A_2A_3$ .

即答案为 B.

(5)【解】易知答案为 B.

(6)【解】因为  $A-B = A-AB$ , 所以  $P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$ . 即答案为 C.

(7)【解】概率理论中  $P(A) = 0$  不能推出  $A$  为不可能事件, 所以答案为 C.

(8)【解】“至少有一人中奖”的对立事件为“ $n$  个人都不中奖”.

$$P(n \text{ 个人都不中奖}) = \frac{C_n^{k-m}}{C_n^k}, \text{ 所以 } P(\text{至少有一人中奖}) = 1 - \frac{C_n^{k-m}}{C_n^k}. \text{ 所以答案为 A.}$$

$$(9) \text{【解】} P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \text{ (当 } B = \Omega \text{ 时等式成立).}$$

又因为  $0 < P(B) \leq 1$ , 所以  $\frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$ , 当且仅当  $B = \Omega$  时“=”成立. 答案为 B.

(10)【解】由  $P[(A_1 + A_2) | B] = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$  得到

$$\frac{P[(A_1 + A_2)B]}{P(B)} = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)}, \text{ 所以 } P(A_1B + A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B). \text{ 即答案为 B.}$$

3. (1)【解】二封信投入 4 个邮筒的方法有  $4^2$  种, II 号邮筒恰好投入一封信有  $C_2^1 C_3^1$  种可能,

$$\text{所以, } p = \frac{C_2^1 C_3^1}{4^2} = \frac{2 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

$$(2) \text{【解】} \textcircled{1} \text{ 依题意: 恰有 90 个次品的概率为 } P = 1 - \frac{C_{1100}^{110} C_{400}^{90}}{C_{1500}^{200}}.$$

$\textcircled{2}$  依题意: 至少有 2 个次品的概率为  $P = 1 - P(\text{没有次品}) - P(\text{恰有 1 个次品})$

$$= 1 - \frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}} - \frac{C_{400}^1 C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

(3)【解】该批产品合格的概率为  $P = P(\text{全部正品}) + P(\text{恰有 1 个次品})$

$$= \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_{95}^{49} C_5^1}{C_{100}^{50}} = 0.2794.$$

(4)【解】假设  $A = \{\text{至少有一本数学书}\}$ , 则  $A$  的对立事件  $\bar{A}$  为:  $\bar{A} = \{\text{没有数学书}\}$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}, \text{ 即 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{67}{91}.$$

(5)【解】依题意可知: 学生情况:

	男生	女生
北京	12	8
免修英语	32	8
总数	80	20

$$\textcircled{1} P(\text{不是北京} | \text{男生}) = \frac{68}{80} = \frac{17}{20}.$$

$$\textcircled{2} P(\text{男生} | \text{北京学生}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

$$\textcircled{3} P(\text{北京男生}) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}.$$

$$\textcircled{4} P(\text{女生} | \text{非北京学生}) = \frac{12}{80} = \frac{3}{20}.$$

$$\textcircled{5} P(\text{免修英语男生}) = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}.$$

(6)【解】令  $A = \{A \text{ 有效}\}$ ,  $B = \{B \text{ 有效}\}$ . 则依题意得

$$P(A) = 0.92, P(B) = 0.93, P(B | \bar{A}) = 0.85, P(\bar{B} | \bar{A}) = 1 - P(B | \bar{A}) = 0.15.$$

$$\textcircled{1} P(A+B) = 1 - P(\overline{A+B}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{B} | \bar{A})P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{B} | \bar{A})(1 - P(A))$$

$$= 1 - 0.15 \times 0.08 = 0.988;$$

$$\textcircled{2} P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{P(\bar{B} | \bar{A})P(\bar{A})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B} | \bar{A})(1 - P(A))}{1 - P(B)} = \frac{0.012}{0.07} = 0.171,$$

$$P(A | \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} | \bar{B}) = 1 - 0.171 = 0.829.$$

(7)【解】① 白球的概率为  $P = P(\text{白球} | \text{第一箱})P(\text{第一箱}) + P(\text{白球} | \text{第二箱})P(\text{第二箱}) + P(\text{白球} | \text{第三箱})P(\text{第三箱})$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{53}{120}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 白球属于第二箱的概率为 } P = \frac{P(\text{白球} | \text{第二箱})P(\text{第二箱})}{P(\text{白球})} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{53}{120}} = \frac{20}{53}.$$

(8)【解】设  $A_i = \{\text{挑出第 } i \text{ 个箱子}\}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $B_i = \{\text{第 } i \text{ 次取出一等品}\}$ ,  $i = 1, 2$ , 则  $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$

$$\textcircled{1} P(B_1) = P(B_1 | A_1)P(A_1) + P(B_1 | A_2)P(A_2) = \frac{10}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{18}{30} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

$$\textcircled{2} P(B_1 B_2) = P(B_1 B_2 | A_1)P(A_1) + P(B_1 B_2 | A_2)P(A_2)$$

$$= \frac{10}{50} \times \frac{9}{49} \times \frac{1}{2} + \frac{18}{30} \times \frac{17}{29} \times \frac{1}{2} = 0.194.$$

由条件概率公式

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{0.194}{\frac{2}{5}} = 0.485.$$

(9)【解】① 设  $B_i$  表示第一次比赛抽到  $i$  个新球 ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).  $A$  表示第二次比赛拍到的都是新球. 则

$$P(B_i) = \frac{C_5^i C_3^{3-i}}{C_{12}^3}, P(A | B_i) = \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

$$P(A) = \sum_{i=0}^3 P(B_i)P(A|B_i) = \sum_{i=0}^3 \frac{C_9^i C_3^{3-i} C_9^3}{(C_{12}^3)^2} = \frac{1}{(C_{12}^3)^2} (C_9^0 C_3^3 C_9^3 + C_9^1 C_3^2 C_9^3 + C_9^2 C_3^1 C_9^3 + C_9^3 C_3^0 C_9^3)$$

$$= \frac{7056}{48400} = 0.146$$

$$\textcircled{2} P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{84 \times 1 \times 20}{(220)^2}}{\frac{7056}{48400}} = \frac{5}{21}.$$

(10)【解】假设  $A = \{\text{先从甲袋中任取一球为白球}\}$ ,  $B = \{\text{先从甲袋中任取一球为红球}\}$ ,  $C = \{\text{再从乙袋中任取一球为白球}\}$ ,

$$\text{则: } P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{N+1}{N+M+1} \cdot \frac{n}{n+m} + \frac{N}{N+M+1} \cdot \frac{m}{m+n}$$

$$= \frac{n(N+1) + Nm}{(N+M+1)(m+n)}.$$

(11)【解】假设  $A = \{\text{先抽的一份为女生}\}$ ,  $B = \{\text{后抽的一份为男生}\}$ ,

$C_i = \{\text{从第 } i \text{ 个地区考生报名表中抽取}\} (i = 1, 2, 3).$

① 依题意:  $p = P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3)$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{25} \cdot \frac{1}{3} = \frac{29}{90};$$

② 依题意:  $P(AB) = P(AB|C_1)P(C_1) + P(AB|C_2)P(C_2) + P(AB|C_3)P(C_3)$

$$= \frac{3 \times 7}{10 \times 9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7 \times 8}{15 \times 14} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5 \times 20}{25 \times 24} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{90},$$

$$P(B) = P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2) + P(B|C_3)P(C_3) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{3} + \frac{20}{25} \cdot \frac{1}{3} = \frac{61}{90},$$

$$q = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{20}{61}.$$

(12)【解】设  $B_1 = \{\text{只有长机到达目的地}\}$ ,  $B_2 = \{\text{长机与任一架僚机到达目的地}\}$ ,  $B_3 = \{\text{三架飞机都到达目的地}\}$ ,  $A = \{\text{炸毁目标}\}$ .

$$P(B_1) = 0.8 \times 0.2 \times 0.2 = 0.032,$$

$$P(B_2) = 0.8 \times 0.2 \times 0.8 + 0.8 \times 0.8 \times 0.2 = 0.256,$$

$$P(B_3) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.512.$$

$$\text{于是 } P(A|B_1) = 0.3,$$

$$P(A|B_2) = 1 - (1 - 0.3)(1 - 0.3) = 0.51,$$

$$P(A|B_3) = 1 - (1 - 0.3)(1 - 0.3)(1 - 0.3) = 0.657.$$

$$\text{所以 } P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) = 0.477.$$

## 第二章 随机变量及其分布

### 习题二

$$1. (1) \text{【解】依题意得: } P(X=0) = 1 - P(X \geq 1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9},$$

$$\text{则 } (1-p)^2 = \frac{4}{9}, p = \frac{1}{3},$$

$$\text{于是, } P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}.$$

$$(2) \text{【解】依题意得: } 1 = \frac{1}{2c} + \frac{3}{4c} + \frac{5}{8c} + \frac{2}{16c} = \frac{32}{16c}, c = 2.$$

$$(3) \text{【解】依题意得: } P(X \leq a) = F(a); P(X=a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-0);$$

$$P(X > a) = 1 - F(a); P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

(4)【解】 $k$  的分布密度为  $f(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 \leq k \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

$4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$  有实根  $\Leftrightarrow \Delta = 16k^2 - 16k - 32 \geq 0$ .

即  $P\{4x^2 + 4kx + k + 2 = 0 \text{ 有实根}\} = P\{16k^2 - 16k - 32 \geq 0\}$

$$P\{k \leq -1 \text{ 或 } k \geq 2\} = \int_2^5 \frac{1}{5} dk = \frac{3}{5}.$$

(5)【解】依题知,  $P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = 1, a = \frac{6}{11}$ .

$P\{Y=-1\} + P\{Y=-2\} + P\{Y=-3\} = b + \frac{b}{4} + \frac{b}{9} = 1, b = \frac{36}{49}$ .

于题  $(X, Y)$  的联合分布为

$X \backslash Y$	-1	-2	-3
1	$ab$	$\frac{ab}{4}$	$\frac{ab}{9}$
2	$\frac{ab}{2}$	$\frac{ab}{8}$	$\frac{ab}{18}$
3	$\frac{ab}{3}$	$\frac{ab}{12}$	$\frac{ab}{27}$

$Z = X + Y$	-2	-1	0	1	2
$P$	$24a$	$66a$	$251a$	$126a$	$72a$

$$ab = 216a, a = \frac{1}{539},$$

$$P(Z=-2) = P(X=1, Y=-3) = \frac{ab}{9} = 24a,$$

$$P(Z=-1) = P(X=2, Y=-3) + P(X=1, Y=-2) = \frac{ab}{18} + \frac{ab}{4} = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4}\right) 216a = 66a,$$

$$P(Z=0) = P(X=3, Y=-3) + P(X=2, Y=-2) + P(X=1, Y=-1) = \frac{ab}{27} + \frac{ab}{8} + ab = 251a,$$

$$P(Z=1) = P(X=2, Y=-1) + P(X=3, Y=-2) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} = 126a,$$

$$P(Z=2) = P(X=3, Y=-1) = \frac{ab}{3} = 72a.$$

(6)【解】依题意得:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} c \sin(x+y) dx dy = 1, c = \sqrt{2} + 1$ ,

所以  $\varphi(x, y) = \begin{cases} (\sqrt{2} + 1) \sin(x+y), & 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

当  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$  时,

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} + 1) \sin(x+y) dx = (\sqrt{2} + 1) \cos(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} + 1) \left[ \cos y - \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \right].$$

所以  $\varphi_Y(y) = \begin{cases} (\sqrt{2} + 1) \left( \cos y - \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \right), & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(7)【解】依题意得:  $D$  的面积  $= \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2$ . 又  $(X, Y)$  在  $D$  上服从均匀分布, 所以二维随机变量  $(X, Y)$  的



密度为:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

下面求  $X$  的边缘密度:

当  $x < 1$  或  $x > e^2$  时,

$$\varphi_X(x) = 0;$$

当  $1 \leq x \leq e^2$  时,

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}, \text{ 所以 } \varphi_X(2) = \frac{1}{4}.$$

$$(8) \text{【解】} E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu, D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$\text{所以 } \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(9)【解】由题中  $(X, Y)$  的联合分布律可写成如下形式:

X \ Y	Y		
	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\alpha$	$\beta$

$$\text{则 } P(X=2) = \frac{1}{3} + \alpha + \beta, P(Y=2) = \frac{1}{9} + \alpha, P(Y=3) = \frac{1}{18} + \beta,$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = \alpha + \beta + \frac{2}{3} = 1.$$

$$\text{解} \begin{cases} \alpha = P(X=2, Y=2) = P(X=2)P(Y=2) = \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \\ \beta = P(X=2, Y=3) = P(X=2)P(Y=3) = \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)\left(\frac{1}{18} + \beta\right) \end{cases},$$

$$\text{得 } \alpha = 2\beta, \beta = \frac{1}{9}, \alpha = \frac{2}{9}.$$

(10)【解】依题意可得: ①  $Z = X + Y$  的分布律为:

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

②  $V = X - Y$  的分布律为:

$X-Y$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	5
$P$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

③  $U = X^2 + Y - 2$  的分布律为:

$X^2 + Y - 2$	$-\frac{15}{4}$	-3	$-\frac{11}{4}$	-2	-1	5	7
$P$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

2. (1)【解】A 不满足  $F(+\infty) = 1$ , 排除 A; B 不满足单增, 排除 B; D 不满足  $F\left(\frac{1}{2} + 0\right) = F\left(\frac{1}{2}\right)$ , 排除 D; 所以答案为 C.

(2)【解】因为  $P(X=k) = \frac{c\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (k=0, 2, 4, \dots)$ , 所以  $c > 0$ , 而  $k$  为偶数, 所以  $\lambda$  可以为负. 所以答案为 B.

(3)【解】因为  $E(X) = \mu = 1$ , 所以  $p(X \leq 1) = P(X \geq 1) = 0.5$ , 即答案为 C.

(4)【解】 $X \sim \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $Y \sim \varphi(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ . 所以

$(X, Y) \sim \varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ . 所以答案为 A.

(5)【解】易知答案为 D.

(6)【解】因为  $F(1+0) \neq F(1)$ , 所以  $F(x)$  不是分布函数, 即答案为 B.

(7)【解】 $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\{\max(X, Y) \leq z\} = P\{X \leq z \text{ 且 } Y \leq z\}$

因为独立  $P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z)$ .

即答案为 C.

(8)【解】因为  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P\{\min(X, Y) > z\} = 1 - P\{X > z \text{ 且 } Y > z\}$ .

因为  $X, Y$  相互独立,

所以  $F_Z(z) = 1 - [1 - P(X \leq z)][1 - P(Y \leq z)] = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$ , 所以答案是 D.

(9)【解】因为  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\{2X \leq y\} = P\left(X \leq \frac{y}{2}\right) = F_X\left(\frac{y}{2}\right)$ ,

$\varphi_Y(y) = [F_Y(y)]' = \left[F_X\left(\frac{y}{2}\right)\right]' = \varphi_X\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi(4+y^2)}$ .

答案为 B.

(10)【解】 $Z = \frac{X+Y}{2}$  是一维随机变量, 密度函数是一元函数, 所以排除 A, B.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \neq 1$ , 所以排除 D, 即答案为 C.

(11)【解】因为  $X$  和  $Y$  分别服从正态分布  $N(0, 1)$  和  $N(1, 1)$ , 且  $X$  和  $Y$  相互独立, 所以  $X+Y \sim N(1, 2)$ ,  $X-Y \sim N(-1, 2)$ .

于是  $P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ ,  $P\{X-Y \leq -1\} = \frac{1}{2}$ , 所以答案为 B.

(12)【解】分布函数:  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[\min(X, 2) \leq y] = 1 - P[\min(X, 2) > y]$ .

当  $y \geq 2$  时,  $F_Y(y) = 1 - P[\min(X, 2) > y] = 1 - 0 = 1$ .

当  $0 \leq y < 2$  时,  $F_Y(y) = 1 - P[\min(X, 2) > y] = 1 - P(X > y, 2 > y)$   
 $= 1 - P(X > y) = P(X \leq y) = 1 - e^{-\lambda y}$ .

当  $y < 0$  时,  $F_Y(y) = 1 - P[\min(X, 2) > y] = 1 - P(X > y, 2 > y)$   
 $= 1 - P(X > y) = P(X \leq y) = 0$ .

于是  $F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 2 \\ 1 - e^{-\lambda y} & 0 \leq y < 2 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$  只有  $y = 2$  一个间断点, 所以答案为 D.

3. (1) 证明: 因为  $X \sim N(a, \sigma^2)$ , 对于  $Y = \frac{X-a}{\sigma}$  来说,

$E(Y) = E\left(\frac{X-a}{\sigma}\right) = 0$ ,  $D(Y) = E\left(\frac{X-a}{\sigma}\right)^2 = 1$ ,

所以  $Y \sim N(0, 1)$ .

(2) 证明:依题意知,  $X$  的分布律为:  $P(X=k) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}, (k=0,1,2,\dots)$ .

$Y$  的分布律为:  $P(Y=k) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!}, (k=0,1,2,\dots)$ .

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(X+Y=i) &= \sum_{k=0}^i P(X=k, Y=i-k) = \sum_{k=0}^i P(X=k)P(Y=i-k) \\ &= \sum_{k=0}^i e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^i \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} (\lambda_1 + \lambda_2)^i \end{aligned}$$

$(i=0,1,2,\dots)$

即证得  $Z=X+Y$  服从参数为  $\lambda_1+\lambda_2$  的泊松分布.

(3) 证明:设分布函数  $F(x)$  对应的随机变量为  $X$ . 构造与  $X$  相互独立且在  $[-h, h]$  上服从均匀分布的随机变量  $Y$ , 则  $Y$  的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -h \\ \frac{y+h}{2h}, & -h \leq y \leq h \\ 1, & y > h \end{cases}$$

令  $Z=X+Y$ , 又设  $Z$  的分布函数为  $G(x)$ . 则

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+y) dF_Y(y) = \int_{-h}^h F(x+y) \frac{1}{2h} dy \stackrel{x+y=t}{=} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(t) dt.$$

即  $\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(t) dt$  为  $Z=X+Y$  的分布函数.

4. (1)【解】假设  $X$  表示命中目标的次数. 则  $X \sim B\left(5, \frac{2}{3}\right)$ . 所以

$X$	0	1	2	3	4	5
$p$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

其中,  $P(X=k) = C_5^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}, k=0,1,2,3,4,5$ .

(2)【解】假设  $X$  表示所用子弹数, 则  $X=1,2,3,4,5$ .

$P(X=i) = P(\text{前 } i-1 \text{ 次不中, 第 } i \text{ 次命中}) = (0.1)^{i-1} \cdot 0.9, i=1,2,3,4$ .

当  $i=5$  时, 只要前四次不中, 无论第五次中与不中, 都要结束射击 (因为只有五发子弹).

所以  $P(X=5) = (0.1)^4$ . 于是分布律为

$X$	1	2	3	4	5
$p$	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001

(3)【解】依题意得:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ , 即  $A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} dx = A e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{2})^2} dx \stackrel{\text{令 } x-\frac{1}{2}=t}{=} A e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt =$

$$A e^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}. A = \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}.$$

(4)【解】假设  $A_i$  表示第  $i$  次取出正品 ( $i=1,2,3,\dots$ ).

① 每次取出的产品不放回:

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{10}{13},$$

$$P(X=2) = P(A_2 | \overline{A_1}) P(\overline{A_1}) = \frac{10}{12} \cdot \frac{3}{13},$$

$$P(X=3) = P(A_3 | \overline{A_2})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{10}{11} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{13},$$

$$P(X=4) = P(A_4 | \overline{A_3})P(\overline{A_3} | \overline{A_2})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = 1 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{13}.$$

② 每次抽取后将原产品放回,  $X$  的分布律为:

$X$	1	2	...	$k$	...
$p$	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{10}{13}$		$\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{13}$	...

$$P(X=k) = p(\overline{A_1} \cdots \overline{A_{k-1}} A_k) = P(\overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k) = \left(\frac{3}{13}\right)^{k-1} \frac{10}{13}, (k=1, 2, \cdots)$$

③ 每次抽取后总以一个正品放回,  $X$  的分布律为:

$X$	1	2	3	4
$p$	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{11}{13}$	$\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{12}{13}$	$1 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{13}$

$$P(X=1) = P(A_1) = \frac{10}{13},$$

$$P(X=2) = P(A_2 | \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{11}{13} \cdot \frac{3}{13},$$

$$P(X=3) = P(A_3 | \overline{A_2} \overline{A_1})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{12}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{13},$$

$$P(X=4) = P(A_4 | \overline{A_3} \overline{A_2} \overline{A_1})P(\overline{A_3} | \overline{A_2} \overline{A_1})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(\overline{A_1}) = 1 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{13}.$$

(5)【解】依题意得: ①  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2c \arcsin x \Big|_0^1 = 2c \cdot \frac{\pi}{2} = c\pi = 1, c = \frac{1}{\pi}.$

②  $P(X \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$  因为  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  为偶函数,

所以  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}.$

(6)【解】① 当  $x \leq -1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$

当  $-1 < x < 1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-1}^x \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2}.$

当  $x \geq 1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-t^2} dt = 1.$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{x}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} & -1 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

② 当  $x < 0$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$

当  $0 < x < 1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2},$

当  $1 \leq x < 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1,$

当  $2 \leq x$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt = 1,$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

(7)【解】因为  $\varphi(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{3200}\right)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 所以  $X \sim N(20, 40^2)$ .

① 测量误差的绝对值不超过 30 的概率为:

$$\begin{aligned} P(|X| < 30) &= P\{-30 < X < 30\} = P\left\{-1.25 < \frac{X-20}{40} < 0.25\right\} \\ &= \Phi(0.25) - \Phi(-1.25) = \Phi(0.25) - (1 - \Phi(1.25)) \\ &= \Phi(0.25) + \Phi(1.25) - 1 \\ &= 0.5987 + 0.8944 - 1 = 0.4931. \end{aligned}$$

其中,  $\Phi(x)$  为  $N(0, 1)$  的分布函数.

② “至少有一次误差的绝对值不超过 30” 的对立事件为 “三次误差的绝对值都超过 30”.

$$\text{即 } P = 1 - (0.4931)^3 = 1 - 0.12 = 0.88.$$

(8)【解】因为  $X$  的密度  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & 100 < x \\ 0, & x \leq 100 \end{cases}$ . 所以  $P(X < 150) = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2} dx = \frac{1}{3}$ .

$$\text{令 } p = P(X \geq 150) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{① } 150 \text{ h 内三只元件没有一只损坏的概率为 } P = p^3 = \frac{8}{27}.$$

$$\text{② } 150 \text{ h 内三只元件全部损坏的概率为 } P = (1-p)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\text{③ } 150 \text{ h 内三只元件只有一只损坏的概率为 } P = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

(9)【解】直径  $D$  的分布密度为  $\varphi(d) = \begin{cases} 1, & 5 \leq d \leq 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

假设面积为  $X = \frac{\pi D^2}{4}$ ,  $X$  的分布函数为  $F(x)$ .

$$\text{则 } F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{\pi D^2}{4} \leq x\right).$$

〈1〉当  $x \leq 0$  时,  $F(x) = 0$ ;

〈2〉当  $x > 0$  时,  $F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{\pi D^2}{4} \leq x\right) = P\left\{-\sqrt{\frac{4x}{\pi}} \leq D \leq \sqrt{\frac{4x}{\pi}}\right\};$

〈3〉当  $\sqrt{\frac{4x}{\pi}} < 5$ , 即  $x < \frac{25\pi}{4}$  时,  $F(x) = 0$ ;

〈4〉当  $5 \leq \sqrt{\frac{4x}{\pi}} \leq 6$ , 即  $\frac{25\pi}{4} \leq x \leq 9\pi$  时,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P\left(\frac{\pi D^2}{4} \leq x\right) = P\left\{-\sqrt{\frac{4x}{\pi}} \leq D \leq \sqrt{\frac{4x}{\pi}}\right\} \\ &= \int_5^{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}} 1 dt = \sqrt{\frac{4x}{\pi}} - 5; \end{aligned}$$

〈5〉当  $x > 9\pi$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_5^6 dt = 1$ ,

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{25\pi}{4} \\ \sqrt{\frac{4x}{\pi}} - 5, & \frac{25\pi}{4} \leq x \leq 9\pi \\ 1, & x > 9\pi \end{cases}$$

$$\text{密度函数为 } \varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi x}}, & \frac{25\pi}{4} \leq x \leq 9\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(10)【解】① 因为  $X$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上服从均匀分布;

$$\text{所以, } X \sim \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

又  $Y = \sin X$ ,

所以,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y)$ .

(1) 当  $y \leq -1$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = 0$ ;

$$\begin{aligned} (2) \text{ 当 } -1 < y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = P(-\frac{\pi}{2} \leq X \leq \arcsin y) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} \frac{1}{\pi} dx = \frac{\arcsin y}{\pi} + \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

(3) 当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = 1$ .

所以,  $Y = \sin X$  的密度函数

$$\varphi_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

② 同 ①, 因为  $X$  在  $[0, \pi]$  上服从均匀分布,

$$X \sim \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$Y = \sin X$ ,

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y)$ .

(1) 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = 0$ .

$$\begin{aligned} (2) \text{ 当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) \\ &= P(0 \leq X \leq \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \leq X \leq \pi) \\ &= \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{\pi} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} x \Big|_0^{\arcsin y} + \frac{1}{\pi} x \Big|_{\pi - \arcsin y}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin y + \frac{1}{\pi} (\pi - \pi + \arcsin y) = \frac{2}{\pi} \arcsin y. \end{aligned}$$

(3) 当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = 1$ ,

即  $Y = \sin X$  的密度函数.

$$\varphi_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

③ 同 ①②,  $X$  在  $[0, 2\pi]$  上服从均匀分布,

$$X \sim \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即  $Y = \sin X$ ,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y)$ .

(1) 当  $y \leq -1$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \langle 2 \rangle \text{ 当 } -1 < y \leq 0 \text{ 时, } F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) \\
 &= P(\pi - \arcsin y \leq X \leq 2\pi + \arcsin y) \\
 &= \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi - \arcsin y} \frac{1}{2\pi} dx = \frac{\arcsin y}{\pi} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 3 \rangle \text{ 当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) \\
 &= P(0 \leq X \leq \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \leq X \leq 2\pi) \\
 &= \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{2\pi} dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} dx \\
 &= \frac{\arcsin y}{\pi} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$\langle 4 \rangle$  当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) = 1$ ,  
即  $Y = \sin X$  的密度函数,

$$\varphi_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(11)【解】依题意得:  $X$  的分布律为:

$X$	0	1
$P$	0.4	0.6

又

$Y$	1	2	3
$P(Y   X = 0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$Y$	1	2	3
$P(Y   X = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$P(X=1, Y=1)P(Y=1 | X=1)P(X=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = 0.3,$$

$$P(X=1, Y=2) = P(Y=2 | X=1)P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0.1,$$

$$P(X=1, Y=3) = P(Y=3 | X=1)P(X=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = 0.2,$$

$$P(X=0, Y=1) = P(Y=1 | X=0)P(X=0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = 0.1,$$

$$P(X=0, Y=2) = P(Y=2 | X=0)P(X=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0.2,$$

$$P(X=0, Y=3) = P(Y=3 | X=0)P(X=0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = 0.1.$$

所以  $Y$  的分布律为

$Y$	1	2	3
$P$	0.4	0.3	0.3

所以  $(X, Y)$  的联合概率分布为

$X$	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.1	0.2

$$P(X=0 | Y \neq 1) = \frac{P(X=0, Y \neq 1)}{P(Y \neq 1)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5,$$

$$P(X=1 | Y \neq 1) = \frac{P(X=1, Y \neq 1)}{P(Y \neq 1)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5.$$

所以在  $Y \neq 1$  时,  $x$  的条件分布为:

$X   Y \neq 1$	0	1
$P$	0.5	0.5

$$(12) \text{【解】} \text{依题意得: } X \sim \varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 0 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, Y \sim \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 0 \leq y \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因为  $X, Y$  相互独立, 所以  $(X, Y)$  联合密度为

$$(X, Y) \sim \varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{81}, & 0 \leq x, y \leq 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z\right).$$

当  $z \leq 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ .

当  $0 < z < 1$  时,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z\right) = P(Y \leq Xz)$$

$$= \iint_{D_1} \frac{1}{81} dx dy = \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9z = \frac{1}{2}z.$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{Y}{X} \leq z\right) = P(Y \leq Xz) = \iint_{D_2} \frac{1}{81} dx dy$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \left(81 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{9}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z}.$$

$$\text{所以, } \varphi_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < z < 1 \\ \frac{1}{2z^2}, & z \geq 1 \end{cases}.$$

(13)【解】因为  $X, Y$  相互独立, 所以  $(X, Y)$  的联合密度为

$$(X, Y) \sim \varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - \frac{y}{3}}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$$

当  $z \leq 0$  时,  $F_Z(z) = 0$ .

当  $z > 0$  时,

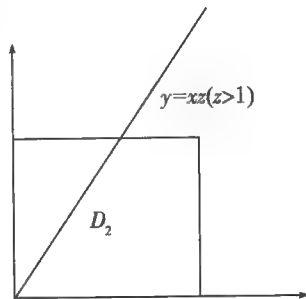
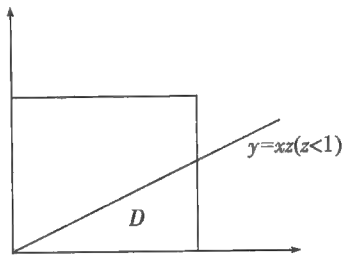
$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X + Y \leq z) = \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq z}} \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{2} - \frac{y}{3}} dx dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} \left[ \int_0^{z-x} e^{-\frac{y}{3}} dy \right] dx = \frac{1}{6} \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-3) e^{-\frac{y}{3}} \Big|_0^{z-x} dx = 2e^{-\frac{z}{2}} - 3e^{-\frac{z}{3}} + 1, \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \varphi_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ e^{-\frac{z}{2}} (1 - e^{-\frac{z}{6}}), & z > 0 \end{cases}.$$

$$(14) \text{【解】} \text{依题意得 } X \sim \varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, Y \sim \varphi_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

因为  $X, Y$  相互独立, 所以  $(X, Y)$  的联合密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$





$X^2 + 2 \times X + Y = 0$  有实根  $\Leftrightarrow \Delta = 4X^2 - 4Y \geq 0$ ,

即  $P(X^2 + 2X + Y = 0 \text{ 有实根}) = P(X^2 - Y \geq 0) = \iint_{\substack{0 \leq x, y \leq 1 \\ y \leq x^2}} 1 dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{x^2} dy \right] dx = \frac{1}{3}.$

(15)【解】① 依题意得:  $\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy$ .

当  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$  时,  $\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = 0$ ,

当  $0 < x < 1$  时,  $\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \int_0^{1-x} 24y(1-x-y) dy = 4(1-x)^3$ ,

所以  $\varphi_X(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

所以  $\varphi(y|x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)} = \begin{cases} \frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}, & x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

所以  $\varphi(y|x = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 24y(1-2y), & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

② 依题意得: 同 ①

$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx$ .

当  $y \leq 0$  或  $y \geq 1$  时,  $\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = 0$ .

当  $0 < y < 1$  时,  $\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \int_0^{1-y} 24y(1-x-y) dx = 12y(1-y)^2$ ,

所以  $\varphi_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

所以  $\varphi(x|y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2(1-x-y)}{(1-y)^2}, & x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

所以  $\varphi(x|y = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 4(1-2x), & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

(16)【解】依题意可知,  $Y$  的密度分布为  $\varphi(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

$X_1 = \begin{cases} 0, & Y \leq 1 \\ 1, & Y > 1 \end{cases}, X_2 = \begin{cases} 0, & Y \leq 2 \\ 1, & Y > 2 \end{cases}$ .

①  $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(Y \leq 1, Y \leq 2) = P(Y \leq 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - e^{-1}$ ,

$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(Y \leq 1, Y > 2) = 0$ ,

$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(Y > 1, Y \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$ ,

$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(Y > 1, Y > 2) = P(Y > 2) = \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = e^{-2}$ .

于是  $(X_1, X_2)$  的联合概率分布为

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$1 - e^{-1}$	0
1	$e^{-1} - e^{-2}$	$e^{-2}$

$X_1$  的分布为:

$X_1$	0	1
$p$	$1 - e^{-1}$	$e^{-1}$

$X_2$  的分布为:

$X_2$	0	1
$p$	$1 - e^{-2}$	$e^{-2}$

$$\textcircled{2} E(X_1) = e^{-1}, E(X_2) = e^{-2}, E(X_1 + X_2) = e^{-1} + e^{-2}.$$

### 第三章 随机变量的数字特征

#### 习题三

1. (1)【解】因为  $X, Y$  相互独立, 且  $D(X) = 2, D(Y) = 4$ ,

所以  $D(2X - Y) = 4D(X) + D(Y) = 12$ .

(2)【解】因为  $X \sim N(-3, 1), Y \sim N(2, 1), Z = X - 2Y + 7$ , 所以  $Z$  服从正态分布.

$$E(Z) = E(X) - 2E(Y) + 7 = 0.$$

$$D(Z) = D(X - 2Y + 7) = D(X) + 2^2 D(Y) = 1 + 4 = 5. \text{ 所以 } Z \sim N(0, 5)$$

(3)【解】假设  $X_i$  表示第  $i$  颗骰子的点数 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 则

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{又设 } X = \sum_{i=1}^n X_i, X_i (i = 1, \dots, n) \text{ 之间相互独立, 则 } E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{7n}{2}.$$

(4)【解】 $X \sim B(2, p)$ , 所以  $E(X) = 0.9$ , 所以  $2p = 0.9, p = 0.45, q = 1 - p = 0.55$ ,

$$D(X) = 2pq = 2 \times 0.45 \times 0.55 = 0.495.$$

(5)【解】因为  $E(X) = 0, Y = X^{2n}, E(XY) = E(X^{2n+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow{x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ 为奇函数}} 0$ ,

$$\text{cov}(X, Y) = E(X)E(Y) - E(XY) = 0,$$

所以  $\rho_{XY} = 0$ .

$$(6)【解】X \sim \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$\text{因为 } P(Y = 1) = P(X > 0) = \int_0^2 \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3},$$

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0,$$

$$P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-1}^0 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3},$$

$$\text{于是 } E(Y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, E(Y^2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

(7)【解】 $X$  服从  $B(3, 0.2)$ . 所以  $E(X) = 3p = 0.6, D(X) = 3pq = 0.48$ .

(8)【解】因为  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 所以  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

$$(9)【解】因为  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3},$$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y) dy = \int_{\frac{1}{5}}^{+\infty} y \cdot e^{-(y-\frac{1}{5})} dy = 6,$$

又  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 所以  $E(XY) = E(X)E(Y) = 4$ .

(10)【解】因为  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 所以

$$D(Y) = D(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = D(X_1) + 4D(X_2) + 9D(X_3) = 46.$$

2. (1)【解】因为  $X$  和  $Y$  同分布, 所以  $E(U) = E(X) - E(Y) = 0, E(U)E(V) = 0,$

$$E(UV) = E(X^2) - E(Y^2) = 0.$$

所以  $\text{cov}(X, Y) = E(UV) - E(U)E(V) = 0$ . 所以答案是 D.

(2)【解】 $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ , 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$  发散. 所以答案是 D.

(3)【解】因为  $X_1, X_2, X_3$  都服从  $[0, 2]$  上的均匀分布,

$$\text{所以 } E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{0+2}{2} = 1. \text{ 所以 } E(3X_1 - X_2 + 2X_3) = 3E(X_1) - E(X_2) + 2E(X_3) = 4.$$

所以答案为 C.

(4)【解】 $P(X=0) = 0.4, P(Y=0) = 0.3$ .

又因为  $0.1 = P(X=0, Y=0) \neq P(X=0) \times P(Y=0)$ . 所以答案是 A.

(5)【解】因为  $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = p_1 + 2p_2 + 3(1 - p_1 - p_2) = 3 - 2p_1 - p_2 = 2.3$

即  $2p_1 + p_2 = 0.7$  ①

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = p_1 + 4p_2 + 9(1 - p_1 - p_2) = 5.9,$$

即  $8p_1 + 5p_2 = 3.1$ . ②

解 ①② 得  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5$ . 所以答案为 B.

(6)【解】易知答案为 A.

(7)【解】假设  $X$  表示随机地不放回地抽取 3 张, 抽得奖券的金额.

$$\text{则 } P(X=6) = P(3 \text{ 张都是 } 2 \text{ 元}) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$$

$$P(X=9) = P(2 \text{ 张 } 2 \text{ 元}, 1 \text{ 张 } 5 \text{ 元}) = \frac{C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15},$$

$$P(X=12) = P(1 \text{ 张 } 2 \text{ 元}, 2 \text{ 张 } 5 \text{ 元}) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以, } E(X) = 6 \cdot \frac{7}{15} + 9 \cdot \frac{7}{15} + 12 \cdot \frac{1}{15} = 7.8, \text{ 所以答案为 C.}$$

(8)【解】因为  $X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2)$

$$\text{所以 } P_1 = \{X \leq \mu - 4\} = P\left\{\frac{X - \mu}{4} \leq -1\right\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1),$$

$$P_2 = \{Y \geq \mu + 5\} = P\left\{\frac{Y - \mu}{5} \geq 1\right\} = 1 - P\left\{\frac{Y - \mu}{5} \leq 1\right\} = 1 - \Phi(1).$$

[其中  $\Phi(x)$  为  $N(0, 1)$  的分布函数]. 所以答案为 A.

(9)【解】 $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$

$$E(\xi\eta) = E[(X+Y)(X-Y)] = E(X^2 + YX - XY - Y^2) = E(X^2) - E(Y^2)$$

$$\begin{aligned} E(\xi)E(\eta) &= [E(X) + E(Y)][E(X) - E(Y)] = E^2(X) - E(X)E(Y) + E(Y)E(X) - E^2(Y) \\ &= E^2(X) - E^2(Y). \end{aligned}$$

所以答案为 B.

(10)【解】令  $X_i$  表示每人的体重 ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ), 则  $X_i$  独立同分布于  $X$ . 所以  $E(X_i) = a$ .

$$\text{又 } Y = \frac{X_1 + \dots + X_{10}}{10}, \text{ 则 } E(Y) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_{10}}{10}\right) = \frac{1}{10}E(X_1 + \dots + X_{10})$$

$$= \frac{1}{10}[E(X_1) + \dots + E(X_{10})]$$

$$= \frac{1}{10} \times 10 \times a = a.$$

所以答案为 A.

3. (1) 证明: 因为  $E[(X-c)^2] = E[X^2 - 2cX + c^2] = c^2 - 2cE(X) + E^2(X)$ .

把  $c$  看做未知量, 则这是关于  $c$  的二次三项式. 当  $c = \frac{2E(X)}{2} = E(X)$  时有最小值.

所以  $D(X) < E\{(X-c)^2\}$ , 其中  $c \neq E(X)$ .

(2) 证明: 因为  $X, Y$  为相互独立的随机变量, 且  $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ .

所以  $Z$  的密度

$$\begin{aligned}\varphi_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(2)}} \sim N(0, 2),\end{aligned}$$

即证得  $Z = X + Y$  的分布密度服从正态分布

(3) 证明: 因为  $X, Y$  相互独立,

$$\begin{aligned}&\text{所以 } D(X)D(Y) + [E(X)]^2D(Y) + [E(Y)]^2D(X) \\ &= \{E(X^2) - [E(X)]^2\}\{E(Y^2) - [E(Y)]^2\} + [E(X)]^2\{E(Y^2) - [E(Y)]^2\} + [E(Y)]^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} \\ &= E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = D(XY).\end{aligned}$$

即证得  $D(XY) = D(X)D(Y) + [E(X)]^2D(Y) + [E(Y)]^2D(X)$ .

(4) 证明: 由(1)知:  $D(X)$  是  $E\{(X-c)^2\}$  对于一切  $c$  的最小值, 所以

$$E[X - \frac{x_i + x_k}{2}]^2 \geq D(X).$$

$$4. (1) \text{【解】} \text{依题意得: } E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1}.$$

$$\text{令 } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k+1},$$

$$\text{则 } \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k+1} = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = x^2 \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{a}{1+a}\right) = \frac{\frac{a^2}{(1+a)^2}}{\left(1 - \frac{a}{1+a}\right)^2} = a^2, \text{ 即 } E(X) = \frac{1}{a} \cdot a^2 = a.$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 a^k}{(1+a)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1-1)k \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{1}{1+a} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k \frac{a^k}{(1+a)^k} - a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{令 } f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)kx^k, \text{ 则 } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^{k-1} = x \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1}\right)' \\ &= x \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = x \left[\frac{-x^2 - (1-x)2x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{2x}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{a}{1+a}\right) = \frac{\frac{2a}{1+a}}{\left(1 - \frac{a}{1+a}\right)^3} = 2a(1+a)^2,$$

$$\text{所以 } E(X^2) = \frac{1}{1+a} \cdot 2a(1+a)^2 - a = a + 2a^2.$$

$$\text{即 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = a + 2a^2 - a^2 = a + a^2.$$

(2)【解】依题意得:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \frac{2}{\pi} \cos^2 x dx \stackrel{x \cos^2 x \text{ 为奇函数}}{=} 0,$

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{2}{\pi} \cos^2 x dx \stackrel{x^2 \cos^2 x \text{ 为偶函数}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3)【解】依题意:  $X+Y$  的分布律为

$X+Y$	0	1	2	3
$P$	0.10	0.40	0.35	0.15

所以  $\sin \frac{\pi(X+Y)}{2}$  的分布律为

$\frac{\sin \pi(X+Y)}{2}$	0	1	-1
$p$	0.45	0.40	0.15

即得:  $E\left[\sin \frac{\pi(X+Y)}{2}\right] = 0 \times 0.45 + 1 \times 0.40 + (-1) \times 0.15 = 0.25.$

(4)【解】依题意: 假设  $X$  为该汽车首次遇到红灯已通过的路口数,

则  $P(X=0) = P\{\text{第一个路口为红灯}\} = \frac{1}{2}.$

$P(X=1) = P\{\text{第一个路口为绿灯, 第二个路口为红灯}\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2},$

$P(X=2) = P\{\text{第一, 二路口为绿灯, 第三个路口为红灯}\} = \frac{1}{2^3},$

$P(X=3) = P\{\text{第一, 二, 三路口为绿灯}\} = \frac{1}{2^3},$

所以  $X$  的概率分布为

$X$	0	1	2	3
$p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

则  $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{67}{96}.$

(5)【解】依题意得:

$$\begin{aligned} E(\sqrt{X^2+Y^2}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+y^2} \varphi(x,y) dx dy = \iint_{\substack{x>0 \\ y>0}} \sqrt{x^2+y^2} 4xy e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \cos\theta \sin\theta \cdot r \cdot 4r^2 \cdot e^{-r^2} \cdot r dr d\theta = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

即  $E(\sqrt{X^2+Y^2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

(6)【解】依题意得:  $(X,Y)$  的联合密度为  $\varphi(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,y) dx dy = 2 \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} x dx dy = 2 \int_0^1 x \left[ \int_0^x dy \right] dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x,y) dx dy = 2 \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} y dx dy = 2 \int_0^1 \left[ \int_0^x y dy \right] dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x, y) dx dy = 2 \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} x^2 dx dy = 2 \int_0^1 x^2 \left[ \int_0^x dy \right] dx \\ &= 2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \varphi(x, y) dx dy = 2 \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} y^2 dx dy = 2 \int_0^1 x^2 \left[ \int_0^x y^2 dy \right] dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^3 dx \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \varphi(x, y) dx dy = 2 \iint_{0 \leq y \leq x \leq 1} xy dx dy = 2 \int_0^1 x \left[ \int_0^x y dy \right] dx \\ &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{18}, D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{18},$$

$$\text{则 } \rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{18}} \sqrt{\frac{1}{18}}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{即得: } \rho_{XY} = \frac{1}{2}$$

(7)【解】依题意:假设  $X, Y$  为线段上的两点, 则它们都服从  $[0, l]$  上的均匀分布, 且它们相互独立.

$X$  服从概率密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  的分布,  $Y$  服从概率密度为  $\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \leq y \leq l \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  的分布,

则  $(X, Y)$  的联合分布为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{l^2}, & 0 \leq x, y \leq l \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设  $Z = |X - Y|$ ,  $D_1 = \{(x, y) : x > y, 0 \leq x, y \leq l\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) : x \leq y, 0 \leq x, y \leq l\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y| \varphi(x, y) dx dy = \iint_{D_1} (x - y) \frac{1}{l^2} dx dy + \iint_{D_2} (y - x) \frac{1}{l^2} dx dy \\ &= \frac{1}{l^2} \int_0^l \left[ \int_0^x (x - y) dy \right] dx + \frac{1}{l^2} \int_0^l \left[ \int_0^y (y - x) dx \right] dy \\ &= \frac{1}{l^2} \int_0^l \left( xy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx + \frac{1}{l^2} \int_0^l \left( yx - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{y^2}{2} dy = \frac{l}{3}, \end{aligned}$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - y)^2 \varphi(x, y) dx dy = \frac{1}{l^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq l \\ 0 \leq y \leq l}} (x - y)^2 dx dy = \frac{l^2}{6},$$

$$\text{即 } D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{l^2}{6} - \frac{l^2}{9} = \frac{l^2}{18}.$$

(8)【解】因为  $X \sim N(a, \sigma^2)$ ,  $Y \sim N(a, \sigma^2)$ ,

$$\text{令 } Z = X - Y, \text{ 则 } Z \sim N(0, 2\sigma^2), \min(X, Y) = \frac{X + Y - |X - Y|}{2} = \frac{X + Y - |Z|}{2},$$

$$\text{所以 } E[\min(X, Y)] = E\left[\frac{X + Y - |X - Y|}{2}\right] = \frac{E(X) + E(Y) - E(|Z|)}{2} = a - \frac{1}{2} E(|Z|),$$

$$E(|Z|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz \stackrel{|z| e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \text{ 为偶函数}}{=} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

$$\text{所以 } E[\min(X, Y)] = a - \frac{1}{2} E(|Z|) = a - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} = a - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}, \text{ 即求得 } E[\min(X, Y)] = a - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

$$\begin{aligned}
 (9) \text{【解】} \text{依题意得: } E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx \xrightarrow{t=x-\mu} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+\mu) e^{-|t|} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-|t|} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-|t|} dt.
 \end{aligned}$$

因为  $te^{-|t|}$  为奇函数,  $e^{-|t|}$  为偶函数,

$$\text{所以 } E(X) = 0 + \mu \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \mu,$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx \xrightarrow{t=x-\mu} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+\mu)^2 e^{-|t|} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} \mu^2 e^{-t} dt = \mu \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 2 + \mu^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 + \mu^2 - \mu^2 = 2,$$

$$\text{即求得 } E(X) = \mu, D(X) = 2.$$

$$(10) \text{【解】} \text{依题意得: } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x,y) dx dy = \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy \xrightarrow{\substack{x \text{ 为奇函数} \\ \text{积分区域中心对称}}} 0.$$

$$\text{同理: } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(x,y) dx dy = \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y dx dy = 0,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x,y) dx dy = \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{4} d\theta = \frac{1}{4},$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \varphi(x,y) dx dy = \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 dx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4}.$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi(x,y) dx dy = \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy dx dy = 0,$$

$$\text{所以, } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{4}, D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } \rho_{(XY)} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = 0.$$

$$\text{即求得 } D(X) = \frac{1}{4}, D(Y) = \frac{1}{4}, \rho_{(XY)} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = 0.$$

(11)【解】假设  $X$  表示一周内发生故障的天数. 则  $X \sim B(5, 0.8)$ ,

$$\text{则 } P(X=0) = (0.8)^5 = 0.33, P(X=1) = C_5^1 \times 0.2 \times (0.8)^4 = 0.41,$$

$$P(X=2) = C_5^2 \times 0.2^2 \times (0.8)^3 = 0.20,$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - 0.33 - 0.41 - 0.20 = 0.06.$$

又设  $Y$  为该企业的利润, 依题意可知  $Y$  的分布律为

$Y$	10	5	0	-2
$p$	0.33	0.41	0.20	0.06

$$\text{则 } E(Y) = 10 \times 0.33 + 5 \times 0.41 + 0 \times 0.20 + (-2) \times 0.06 = 5.23 (\text{万元}),$$

即求得一周内期望利率为 5.23 万元.

(12)【解】由二维正态密度的性质得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x,y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x,y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, (i=1,2).$$

$$\textcircled{1} f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x,y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x,y) dy \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x,y) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x,y) dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

$$\text{即可知, } E(X) = 0, E(Y) = 0, D(X) = 1, D(Y) = 1,$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dx dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy[\varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y)]dx dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right] = 0,$$

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0.$$

② 由已知条件得:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{1}{9}}} \exp \left[ -\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{9}\right)} \left( x^2 - \frac{2}{3}xy + y^2 \right) \right],$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\frac{1}{9}}} \exp \left[ -\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{9}\right)} \left( x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2 \right) \right],$$

则  $f_1(x)f_2(y) \neq f(x,y)$ , 因此  $X,Y$  不相互独立.

## 第四章 大数定律和中心极限定理

### 习题四

本章中  $\Phi(x)$  为  $N(0,1)$  的分布函数.

1. (1)【解】由伯努利大数定律知:  $\forall \epsilon = 0$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$ ,

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1 - 1 = 0$ .

(2)【解】 $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 2 - 2 = 0$ ,

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2\rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = 1 + 4 - 2 \times 0.5 \times 1 \times 2 = 3,$$

所以由切比雪夫不等式  $P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$  得:

$$P(|X - Y| \geq 6) \leq \frac{D(X-Y)}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

2. (1)【解】依题意得:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^3 e^{-x} dx = 3$ ,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^4 e^{-x} dx = 12.$$

所以  $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 12 - 9 = 3$ .

令  $Y = X - 3$ , 所以  $E(Y) = E(X) - 3 = 0, D(Y) = 3$ .

$$P\{0 < X < 6\} = P\{|X - 3| < 3\} = P\{|Y - E(Y)| < 3\} \geq 1 - \frac{D(Y)}{3^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(2)【解】依题意: 假设  $X$  表示 400 台机器中发生故障的台数, 则  $X \sim B(400, 0.02)$ ,

由德莫弗—拉普拉斯定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - 400 \times 0.02}{\sqrt{400 \times 0.02 \times 0.98}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P\left(\frac{X - 8}{\sqrt{400 \times 0.02 \times 0.98}} \leq \frac{-7}{\sqrt{400 \times 0.02 \times 0.98}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(-2.5) = 1 - [1 - \Phi(2.5)] = 0.9938. \end{aligned}$$

即机器出故障的台数不少于 2 台的概率为 0.9938.

(3)【解】依题意: 假设  $X$  表示 10000 盏灯中开着的灯数, 则  $X \sim B(10000, 0.7)$

由德莫弗—拉普拉斯定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X - 7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$



所以  $P(6800 \leq X \leq 7200)$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{6800-7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}} \leq \frac{X-7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}} \leq \frac{7200-7000}{\sqrt{10000 \times 0.3 \times 0.7}}\right) \\ &\approx \Phi(4.36) - \Phi(-4.36) = \Phi(4.36) - 1 + \Phi(4.36) \\ &= 2\Phi(4.36) - 1 = 2 \times 0.999993 - 1 = 0.999. \end{aligned}$$

即在 6800 与 7200 之间的概率为 0.999.

(4)【解】依题意:假设  $X$  表示 10000 中不合格品数,所以  $X \sim B(10000, 0.005)$

由德莫弗—拉普拉斯定理:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X-50}{\sqrt{10000 \times 0.005 \times 0.995}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(X \leq 70) &= P\left(\frac{X-50}{\sqrt{10000 \times 0.005 \times 0.995}} \leq \frac{70-50}{\sqrt{10000 \times 0.005 \times 0.995}}\right) \\ &\approx \Phi(2.84) = 0.998. \end{aligned}$$

即不合格品不多于 70 件的概率为 0.998.

[注:(2),(3),(4)为同一类型的题型]

(5)【解】依题意:假设  $T_i$  表示检查  $i$  个产品需要的时间,则  $T_i$  独立同分布.

$T_i = \begin{cases} 10, & \text{第 } i \text{ 个产品没有重复检查} \\ 20, & \text{第 } i \text{ 个产品需重复检查} \end{cases}$ , 则  $T_i$  的分布律为:

$T_i$	10	20
$p$	0.5	0.5

所以  $E(T_i) = 10 \times 0.5 + 20 \times 0.5 = 15$ ,  $E(T_i^2) = 100 \times 0.5 + 400 \times 0.5 = 250$ ,

$$D(T_i) = E(T_i^2) - E(T_i)^2 = 25. (i = 1, 2, \dots, 1900)$$

由林德伯格—勒维定理:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1900} T_i - 1900 \times 15}{\sqrt{1900 \times 5}} \leq x\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P\left(\sum_{i=1}^{1900} T_i \leq 8 \times 3600\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1900} T_i - 1900 \times 15}{\sqrt{1900 \times 5}} \leq \frac{8 \times 3600 - 1900 \times 5}{\sqrt{1900 \times 5}}\right) \\ &\approx \Phi(1.38) = 0.9162. \end{aligned}$$

即求得在 8 h 内检查员检查的产品多于 1900 个的概率为 0.9162.

## 第五章 数理统计的基本概念

### 习题五

第五、六、七章中  $\Phi(x)$  为  $N(0, 1)$  的分布函数;分位数用上侧分位数.

1. (1)【解】因为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $N(0, \sigma^2)$  的样本,

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, n\sigma^2), \text{ 则 } \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1),$$

$$\text{所以 } \sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}, C = \frac{1}{n\sigma^2}.$$

(2)【解】因为  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  取自正态总体  $X \sim N(0, 2^2)$ ,

则  $X_1 - 2X_2 \sim N(0, 20)$ ,  $3X_3 - 4X_4 \sim N(0, 100)$ ,

$$\text{所以 } \frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0, 1), \frac{3X_3 - 4X_4}{\sqrt{100}} \sim N(0, 1),$$

$$\text{即 } \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{20}}, a = \frac{1}{20}, \sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{100}}, b = \frac{1}{100}.$$

$Y$  为自由度 2 的  $\chi^2$  分布.

(3)【解】依题意得:

$$E(X_i) = n, D(X_i) = 2n (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$E(\bar{X}) = n, D(\bar{X}) = \frac{D(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2} = \frac{n \cdot 2n}{n^2} = 2.$$

2. (1)【解】 $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自总体  $N(0, \sigma^2)$ , 所以

$$\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1), E\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 = 1, D\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 = 2,$$

$$D(A_2) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{D(\sum_{i=1}^n X_i^2)}{n^2} = \frac{\sigma^4 D\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\right)}{n^2} = \frac{\sigma^4 \cdot 2n}{n^2} = \frac{2\sigma^4}{n}. \text{ 所以答案为 C.}$$

(2)【解】因为  $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2), X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 假设  $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = X_1 - X_2$ ,

$$\text{则 } E(Y_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0.$$

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = E(X_1^2 - X_2^2) = E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0.$$

所以答案为 B.

(3)【解】因为  $X \sim N(0, 2^2), X_i (i = 1, \dots, 15)$  为  $X$  的简单随机样本,

$$\text{则 } \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{4} \sim \chi^2(10), \frac{X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2}{4} \sim \chi^2(5),$$

$$\text{所以 } \frac{\frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{40}}{\frac{X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2}{20}} \sim F(10, 5), \text{ 即 } Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)} \sim F(10, 5).$$

所以答案为 C.

### 3. 计算题

(1)【解】依题意: 因为  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  为总体  $N(0, 0.3^2)$  的一个样本,

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} \sim \chi^2(10).$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right) = P\left(\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} > \frac{1.44}{0.09}\right) = P[\chi^2(10) > 16] = 0.1,$$

$$\text{即 } P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right) = 0.1.$$

(2)【解】因为总体  $X$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 所以  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{10}} \sim N(0, 1)$ . 由  $P(|\bar{X} - \mu| > 4) = 0.02$ ,

$$\text{知 } P\left(|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{10}}| > \frac{4 \sqrt{10}}{\sigma}\right) = 0.02,$$

$$\text{即 } \Phi\left(-\frac{4 \sqrt{10}}{\sigma}\right) = 0.01.$$

$$\text{又 } \Phi\left(-\frac{4 \sqrt{10}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4 \sqrt{10}}{\sigma}\right), \text{ 所以 } \Phi\left(\frac{4 \sqrt{10}}{\sigma}\right) = 0.99,$$

$$\text{查表得 } \frac{4 \sqrt{10}}{\sigma} = 2.33, \text{ 得 } \sigma = \frac{4 \sqrt{10}}{2.33} = 5.43.$$

(3)【解】依题意: 假设样本容量为  $n$ , 则  $\bar{X} \sim N(72, \frac{100}{n}), \frac{\bar{X} - 72}{\sqrt{\frac{100}{n}}} \sim N(0, 1)$ ,

即  $\frac{\bar{X}-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ .

由  $P(\bar{X} > 70) \geq 0.95$  得  $P\left\{\frac{\bar{X}-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}} > \frac{70-72}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right\} \geq 0.95$ ,

所以  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right) \leq 0.95$ , 查表得  $\frac{\sqrt{n}}{5} \geq 1.65$ , 即  $n \geq 68.0625$ .

(4)【解】① 依题意得:  $E(|\bar{X}-\mu|^2) = D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{4}{n} \leq 0.1$ , 所以  $n \geq 40$ .

② 因为  $X \sim N(\mu, 4)$ , 所以  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{4}{n}\right)$ ,  $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ ,

所以  $P(|\bar{X}-\mu| \leq 0.1) = P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right\} \geq 0.95$ .

$\Phi\left(\frac{1}{20}\sqrt{n}\right) \geq 0.975$ , 查表得  $\frac{1}{20}\sqrt{n} \geq 1.96$ ,  $n \geq 1537$ .

(5)【解】由题意知:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 样本容量为  $n$ ,

则  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

所以  $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 1.5\right) = P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq 1.5 \times (n-1)\right] \geq 0.95$ ,

即  $P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > 1.5 \times (n-1)\right] < 1 - 0.95 = 0.05$ . (1)

由  $\chi^2$  分布的上侧分位数  $P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{0.05}^2(n-1)\right] = 0.05$ , (2)

比较(1),(2), 结合  $\chi^2$  分布密度的图形, 得到

$1.5 \times (n-1) > \chi_{0.05}^2(n-1)$ , 查  $\chi^2$  表可知,  $n \geq 27$ .

(6)【解】① 由  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$  得:

$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} > 2.041\right) = P\left(\frac{15S^2}{\sigma^2} > 15 \times 2.041\right) = P[\chi^2(15) > 30.615] = 0.01$ .

②  $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$ , 所以  $D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 2 \times 15 = 30$ ,

于是  $30 = D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = \frac{225}{\sigma^4}D(S^2)$ ,  $D(S^2) = \frac{30}{225}\sigma^4 = \frac{2}{15}\sigma^4$ .

(7)【解】① 因为  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\bar{X}\right) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2, \end{aligned}$$

即证得  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$ .

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2, \end{aligned}$$

即证得  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$ .

(8)【解】由题意,根据经验分布函数定义可得:

$$F_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ \frac{1}{10}, & -4 \leq x < 0 \\ \frac{2}{10}, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{4}{10}, & 2 \leq x < 2.5 \\ \frac{7}{10}, & 2.5 \leq x < 3 \\ \frac{8}{10}, & 3 \leq x < 3.2 \\ \frac{9}{10}, & 3.2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}.$$

(9)【解】由题意,根据经验分布函数定义可得:

$$F_8(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

(注:(8),(9)为同一类题型)

## 第六章 参数估计

### 习题六

#### 1. 填空题

(1)【解】因为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

由  $P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \lambda\right\} = 1 - \alpha$ ,  $-\lambda < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \lambda$ , 则  $\bar{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  得置入区

间  $\left(\bar{X} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ,

所以  $\lambda = u_{\frac{\alpha}{2}}$ .

(2)【解】由(1)题及查表知  $\lambda = u_{0.025} = 1.96$ . 所以  $\mu$  的置信区间为

$$\left(5 - 1.96 \times \frac{0.9}{\sqrt{9}}, 5 + 1.96 \times \frac{0.9}{\sqrt{9}}\right) = (4.412, 5.588).$$

(3)【解】 $E\left(CX_1 + \frac{1}{1999}X_2\right) = CE(X_1) + \frac{1}{1999}E(X_2) = \left(C + \frac{1}{1999}\right)\mu = \mu$ , 所以  $C = \frac{1998}{1999}$ .

(4)【解】因为  $X \sim V(\theta, \theta + 1) (\theta > 0)$

所以总体  $X$  的密度为  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \theta \leq x \leq \theta + 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

① 矩估计量:

$$E(X) = \int_0^{\theta+1} x dx = \frac{1}{2}(2\theta+1).$$

$$\text{用 } \bar{X} \text{ 来估计 } E(X): \frac{1}{2}(2\hat{\theta}+1) = \bar{X}, \hat{\theta} + \frac{1}{2} = \bar{X}, \hat{\theta} = \bar{X} - \frac{1}{2}.$$

② 最大似然估计:

$$\text{因为 } X_i \sim \varphi_i(x_i) = \begin{cases} 1, & \theta \leq x_i \leq \theta+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{所以 } (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 的联合密度为 } \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \theta \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$  在  $\theta \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta+1$  范围中为常数, 又  $\theta \geq \min\{x_1, \dots, x_n\}$ . 所以

$$\hat{\theta} = \min\{x_1, \dots, x_n\}.$$

(5)【解】因为  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$\begin{aligned} \text{即 } E\left\{\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{b}\right\} &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{a} n\sigma^2 - \frac{1}{b} n\sigma^2 = n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sigma^2, \end{aligned}$$

所以  $E(X_i - \mu)^2 = n\sigma^2$ .

## 2. 选择题

(1)【解】易知  $\mu$  的置信区间为  $(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , 当  $1-\alpha$  缩小时,  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  缩小. 置信区间长度为  $2u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

所以答案为 A.

(2)【解】由(1)知  $\mu$  的置信区间长度为  $2u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , 与样本的取值无关, 所以答案为 C.

(3)【解】答案为 A.

(4)【解】因为  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计, 所以  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . 所以  $\hat{\theta}^2$  为  $\theta^2$  的有偏估计.

又  $E(\hat{\theta}^2) = D(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta})]^2 = D(\hat{\theta}) + \theta^2 \neq \theta^2$ , 所以  $\hat{\theta}^2$  为  $\theta^2$  的有偏估计. 即答案为 B.

(5)【解】按矩估计方法:  $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\mu}^2 = \bar{X}^2, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$ ,

所以  $\hat{\mu}^2 + \sigma^2 = \bar{X}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ . 即答案为 D.

(6)【解】易知答案为 C.

3. (1)【解】依题意可得:  $X_i \sim P(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k=0, 1, 2, \dots)$

① 矩估计因为  $E(X) = \lambda$ , 所以  $\hat{\lambda} = \bar{X}$ .

② 最大似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!},$$

$$\ln L(\lambda) = \ln e^{-n\lambda} + \ln \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = -n\lambda + \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0, \text{ 所以 } \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}. \text{ 即 } \lambda \text{ 的矩估计为 } \hat{\lambda} = \bar{X}, \text{ 最大似然估计为 } \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =$$

$\bar{X}$ .

(2)【解】① 矩估计:

因为  $X$  服从  $(a, b)$  上的均匀分布, 所以  $E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

$$\text{所以 } \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2} = \bar{X}, \hat{a} + \hat{b} = 2\bar{X} \quad \langle 1 \rangle$$

$$\frac{1}{12}(\hat{b} - \hat{a})^2 = M_2, \hat{b} - \hat{a} = 2\sqrt{3M_2} \quad \langle 2 \rangle$$

$$\text{其中 } M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$\text{解 } \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \text{ 得 } \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3M_2}, \hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3M_2},$$

$$\text{所以 } \hat{b}^3 = (\bar{X} + \sqrt{3M_2})^3, \hat{a}^3 = (\bar{X} - \sqrt{3M_2})^3.$$

② 最大似然估计:

$$X_i \sim \varphi_i(x_i) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x_i \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{所以 } (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 的联合密度为 } \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq x_1, \dots, x_n \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由联合密度函数的方程可知:  $b-a$  越小,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  就越大,

但  $b-a$  的值不能小于  $\max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ .

$$\text{所以 } \hat{b} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i, \hat{a} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i; \hat{b}^3 = (\max_{1 \leq i \leq n} x_i)^3, \hat{a}^3 = (\min_{1 \leq i \leq n} x_i)^3.$$

(3)【解】依题意可得最大似然函数为

$$f(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} x_i^{-1} e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln f = \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} x_i^{-1} e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2.$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(\ln x_i - \mu) = 0 \quad \langle 1 \rangle$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \mu)^2 = 0 \quad \langle 2 \rangle$$

解  $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle$  得:  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu)^2$ , 即  $\mu$  和  $\sigma^2$  的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i; \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \mu)^2.$$

(4)【解】依题意可得: 总体  $X \sim \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

① 矩估计:

$$\text{因为 } E(X) = \frac{\theta}{2}, \text{ 所以 } \frac{\hat{\theta}_1}{2} = \bar{X}, \hat{\theta}_1 = 2\bar{X},$$

$$E(\hat{\theta}_1) = E(2\bar{X}) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta, \text{ 所以 } \hat{\theta}_1 \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计;}$$

$$\text{因为 } D(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D(X_i),$$

$$D(\hat{\theta}_1) = 4D(\bar{X}), \text{ 所以 } 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

所以  $\hat{\theta}_1$  是  $\theta$  的一致估计.

② 最大似然估计:

因为  $X$  服从  $(0, \theta)$  上的均匀分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为取自  $X$  的样本,

所以  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合密度为  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

由联合密度函数可知

$\theta$  越小,  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  就越大. 但  $\theta$  的值不能小于  $\max_{1 \leq i \leq n} x_i$ .

所以  $\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ .

假设  $Z = \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ , 又设  $F_X(x)$  是总体  $X$  的分布函数, 则  $Z$  的密度函数为

$$F_Z(z) = \{F_X(z)\}^n,$$

$Z$  的密度函数为

$$\varphi_Z(z) = \{[F_X(z)]^n\}' = n\{F_X(z)\}^{n-1}\varphi(x) = \begin{cases} n\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}, & 0 \leq z \leq \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{所以 } E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\varphi_Z(z)dz = \int_0^\theta zn\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dz = \int_0^\theta n\left(\frac{z}{\theta}\right)^n dz = \frac{n}{n+1} \frac{z^{n+1}}{\theta^n} \Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta,$$

所以  $\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$  不是  $\theta$  的无偏估计.

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\varphi_Z(z)dz = \int_0^\theta z^2 n\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dz = \int_0^\theta n\frac{z^{n+1}}{\theta^n} dz = \frac{n}{n+1} \frac{z^{n+2}}{\theta^n} \Big|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

所以  $\hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$  是  $\theta$  的一致估计.

(5)【解】依题意可得最大似然函数为

$$f(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \lambda^n a^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{a-1}$$

$$\ln f = \ln \lambda^n + \ln a^n - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \ln \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \ln \prod_{i=1}^n x_i^{a-1} + \ln a^n,$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\text{所以 } \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

$$\text{即参数 } X \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}.$$

$$(6)【解】① \text{ 依题意得: } E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X), \text{ 又 } \sum_{i=1}^n X_i = 1,$$

$$\text{所以 } E\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X) = E(X),$$

即得  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$  为  $E(X)$  的无偏估计.

$$② D\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 D(X_i) = D(X) \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

该问题转化为: 在条件  $\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  下,  $\alpha_i$  取何值时,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  最小.

$$\text{条件极值: } \begin{cases} \text{条件: } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \\ \text{目标函数: } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{ 最小} \end{cases}$$

下面用拉格朗日乘子法算:

$$\text{令 } F(a_1, \dots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \lambda \left( \sum_{i=1}^n a_i - 1 \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 2a_i + \lambda = 0, (i = 1, 2, \dots, n). \text{ 解得 } a_1 = \dots = a_n = \frac{1}{n}.$$

所以在上述所有无偏估计中, 以  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  最有效.

(7) 依题意可得:  $1 - \alpha = 0.95, \alpha/2 = 0.025, n = 20, s^2 = 0.049$ .

$$\text{又 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{19S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(19),$$

由  $P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(19) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(19)\} = 1 - \alpha = 0.95$  查  $\chi^2$  表, 查得

$$\text{所以 } \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(19) = \chi^2_{0.025}(19) = 32.9, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(19) = \chi^2_{0.975}(19) = 8.91.$$

$\sigma^2$  的 95% 置信区间为

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(19)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(19)} \right] = \left[ \frac{19 \times 0.049}{32.9}, \frac{19 \times 0.049}{8.91} \right] = [0.03, 0.10],$$

所以,  $\sigma^2$  的 95% 置信区间为  $[0.17, 0.32]$ .

(8) 【解】依题意知:  $m = 200, \sigma_1 = 2.18, \bar{X} = 5.32; n = 100, \sigma_2 = 1.76, \bar{y} = 5.76$ .

因为  $\sigma_1, \sigma_2$  已知, 所以置信区间的上限为  $(\bar{X} - \bar{y}) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ ,

置信区间的下限为  $(\bar{X} - \bar{y}) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ .

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96, u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{(2.18)^2}{200} + \frac{(1.76)^2}{100}} = 0.46,$$

$$\bar{X} - \bar{y} = -0.44.$$

即得  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 95% 的置信区间为  $[-0.9, 0.02]$ .

## 第七章 假设检验

### 习题七

1. (1) 【解】当  $\sigma^2$  未知时, 要检验  $H_0: \mu = \mu_0$ , 应选统计量:  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$ , 当  $H_0$  成立时, 该统计服从  $t(n-1)$  分布.

(2) 【解】在显著性检验中, 对于犯二类错误的概率, 当一个缩小时另一个会扩大. 所以要犯两类错误的概率同时变小, 只能增加样本容量.

$$2. (1) 【解】显著水平 \alpha = 0.05 下拒绝 H_0 的拒绝域为: \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025}.$$

$$\text{接受 } H_0 \text{ 的接受域为 } \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \leq u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025}; \text{查表得 } u_{0.025} = 1.96.$$

显著水平  $\alpha = 0.01$  下拒绝  $H_0$  的拒绝域为:  $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.005}$ . 接受  $H_0$  的接受域为  $\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \leq u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.005}$ , 查表得  $u_{0.005} = 2.57$ . 所以答案为 B.

(2) 【解】第二类错误的定义为:  $H_0$  假时, 接受  $H_0$ . 所以答案为 C.

(3) 【解】当  $\sigma^2$  未知时, 检验假设  $H_0: \mu = \mu_0 = 0$  时, 使用的统计量为

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n}} = \frac{\sqrt{n(n-1)} \bar{X}}{Q}. \text{ 所以答案为 A.}$$



3. (1)【解】依题意知:  $n = 9, \alpha = 0.05$ , 零件强度服从正态分布

$\mu$  未知, 检验  $H_0: \sigma^2 = 1.6^2$ .

选取统计量  $\chi^2 = \frac{(9-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(8)$ ,

接受域为  $2.18 = \chi_{0.975}^2(8) < \frac{(9-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{0.025}^2(8)$ , 查表得  $\chi_{0.025}^2(8) = 17.535$ ,

而  $\frac{(9-1)s^2}{\sigma^2} = 3.73$ . 所以认为  $\sigma^2$  没有发生显著变化.

(2)【解】依题意得:  $n = 31, \alpha = 0.05$ ,

$\sigma$  未知检验  $H_0: \mu = \mu_0 = 10.5$ ,

选取统计量  $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(30)$  (当  $H_0$  成立时),

拒绝域为  $|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}| > t_{0.025}(30)$ , 查表得  $t_{0.025}(30) = 2.042$ ,

而  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = \frac{11.08 - 10.05}{0.516} \sqrt{30} = 6.26 > 2.042$ . 所以不能认为机床正常工作.

(3)【解】依题意得:  $m = n = 31, \alpha = 0.05$ , 其中  $m, n$  分别为甲, 乙的样本量.

$\sigma_1 = \sigma_2$  未知的情形下检验  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ .

选取统计量  $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2) = t(8)$  (当  $H_0$  成立时),

其中,  $S_w = \sqrt{\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}}$ ,

拒绝域为  $\left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(8) = 2.306$ ,

$s_w = \sqrt{\frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{4 \times 2.07^2 + 4 \times 2.35^2}{5+5-2}} = 2.21$ ,

而  $\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{89.6 - 88}{2.21 \sqrt{\frac{2}{5}}} = 1.36 < 2.306$ . 所以认为可用乙代替甲.

(4)【解】依题意知:  $n = 100, \alpha = 0.01$ ,

①  $\sigma = 1$  已知的情形下检验  $H_0: \mu = \mu_0 = 5$ .

选取统计量  $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$  (当  $H_0$  成立时),

拒绝域为  $|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}| > u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.005} = 2.58$ ,

而  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{5.32 - 5}{1} \sqrt{100} = 3.2 > 2.58$ . 所以拒绝  $H_0$ , 接受  $H_1$ .

② 检验  $H_1: \mu = 4.8$  下犯第二类错误的概率. 总体为  $N(4.8, 1)$ ,

$\bar{X} \sim N(4.8, \frac{1}{100})$ ,

$\beta = P(\text{接受 } H_0 \mid \mu = 4.8) = P\left(\sqrt{100} \frac{|\bar{X} - 5|}{1} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{10 |\bar{X} - 5|}{1} \leq u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ ,

$= P\left(\frac{50 - u_{0.005}}{10} < \bar{X} < \frac{50 + u_{0.005}}{10}\right)$

$= \Phi(2 + u_{0.005}) - \Phi(2 - u_{0.005}) = \Phi(2 + 2.58) - \Phi(2 - 2.58)$

$= \Phi(4.58) - \Phi(-0.58) = \Phi(4.58) - 1 + \Phi(0.58) = 1 - 1 + \Phi(0.58) = 0.7190$ .